GEO-SPATIAL INFORMATION SCIENCE

高等学校测绘工程系列教材

地球物理大地测量学原理与方法

Geophysical Geodesy Principles and Methods

许才军 申文斌 晁定波 编著





WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

责任编辑/王金龙
责任校对/程小宜
版式设计/支　笛
封面设计/汪　卉



ISBN 7-307-05133-8

9 787307 051331 >

定价：39.00 元

ISBN 7-307-05133-8 / P · 120

高等学校测绘工程系列教材

地球物理大地测量学原理与方法

许才军 申文斌 晁定波 编著





WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

地球物理大地测量学原理与方法/许才军,申文斌,晁定波编著.—武汉:武汉大学出版社,2006.9
(高等学校测绘工程系列教材)
ISBN 7-307-05133-8

Ⅰ.地…　Ⅱ.①许…　②申…　③晁…　Ⅲ.①地球物理学—高等学校—教材　②大地测量学—高等学校—教材　Ⅳ.①P3　②P22

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第071721号

责任编辑:王金龙　　责任校对:程小宜　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)
印刷:武汉大学出版社印刷总厂
开本:787×1092　1/16　印张:27.75　字数:668千字
版次:2006年9月第1版　2006年9月第1次印刷
ISBN 7-307-05133-8/P·120　定价:39.00元

内 容 提 要

本书是作为教科书编写的，全书共13章。第1章：绪论；第2章：相关的地球物理问题；第3章：地球参考系统与地球参考框架；第4章：潮汐大地测量观测方法及潮汐改正；第5章：确定地球自转参数的空间大地测量方法；第6章：板块构造学说与活动地块学说；第7章：地壳运动监测与数据处理；第8章：地壳应力与应变分析；第9章：连续形变、应变观测与数据处理；第10章：地震活动的大地测量研究方法；第11章：海洋学大地测量监测方法；第12章：全球重力场及其地学解释；第13章：大地测量反演理论与方法。

本书既有大地测量学和地球物理学的一些背景知识，又有大地测量学和地球物理学的一些新的交叉内容，具有内容新、覆盖面广、概念清楚、深入浅出、通俗易懂等特点，有较强的理论性和实用性，可作为测绘工程专业与固体地球物理专业本科生、研究生教材或教学参考书，亦可供从事相关领域及专业的科技人员和研究人员参考。



前　　言

本书是作者在给武汉大学测绘工程专业本科生及固体地球物理专业本科生、硕士研究生讲授的地球物理大地测量学课程的基础上编写的。

大地测量学科发展的总趋势是向地球科学纵深发展，深入到其他地学学科的交叉领域，其主要任务是监测和研究地球动力学现象，研究地球本体的各种物理场，认识与探索地球内部的各种物理过程并揭示其规律。

大地测量如何参与研究、认识与探索地球内部的各种物理过程并揭示其规律，是本教材希望讲授的内容，故取名《地球物理大地测量学原理与方法》。以空间大地测量为标志的现代大地测量技术，不论在测量的空间尺度上还是已达到的精度水平方面，已经有能力监测地球动力学过程产生的运动状态和物理场的微变化。早期用大地天文观测方法已能进行地球自转变化的监测，但时间分辨率和精度都较低。现今利用卫星激光测距（SLR）和甚长基线干涉测量（VLBI）技术已能对地球自转进行近于连续的监测，精度比大地天文方法高20倍，极移测定精度优于±1cm，日长变化测定精度优于50μs。对监测数据时间序列的频谱分析，可以给出极移和日长变化的频谱分布，描述地球自转时空变化的精细结构，并用于对不同频谱成分激发机制的研究和解释。利用现代高精度固体潮重力仪、倾斜仪和伸缩仪，可以精确测定重力固体潮、地倾斜固体潮。对观测数据进行调和分析，得出各分潮波的振幅与相位，通过与理论值的比较，可得出实际观测的潮高、重力固体潮和地倾斜固体潮与理论值（平衡潮）之比的特征数（潮汐因子），从而可求解表征地球弹性的各类勒夫数。这些潮汐参数可准确地定量描述和解释地球的潮汐现象。在各大板块上设置若干VLBI站或SLR站以及GPS永久跟踪站，通过定期或连续观测，可以毫米级的精度测定板块的运动速率，由此可建立以欧拉向量（表示两板块间绕定轴旋转的相对角速度向量）表示的全球板块运动模型，用以准确描述板块的运动模式。在一个区域内，根据板内块体的分布，布设一个具有适当密度的GPS定位网络，通过定期复测或GPS永久跟踪站的连续观测，并联合相邻板块同步观测数据，不仅可以分析描述板块间的运动趋势，还可以准确求定板内各地块间的相对运动速率。通过对所获数据的分析处理，利用大地测量反演方法求解地壳弹性应力-应变的分布，并作出动力力源解释。在活动断裂带上，特别是地震活动带上，综合利用GPS、激光测距、水准测量和重力测量的定期复测，根据监测数据可以反演求解断层的几何和运动参数并分析其构造应力的积累，结合其他地球物理数据评估地震发生的可能性和估计震源参数。综合利用GPS、重力测量和卫星测高等大地测量技术，可以监测冰期后回弹、极地冰原的运动和变化、陆地冰川的运动以及海平面变化乃至厄尔尼诺和拉尼娜事件的发生与发展，并据此分析全球环境变迁，对其动力学机制和效应进行解释。

本书共13章，其中第2、4、5章由申文斌教授编写，第11、12章由晁定波教授编写，其余8章由许才军教授编写。本书的编写吸取了我国许多地学工作者的最新研究成果，同时包含了不少作者及其与所带研究生合作的研究成果；徐新禹、史新奎、张敏等做了大量文字编辑工作，

李进、韩建成、田伟、富宇宁、黄继锋等做了大量的校对工作，有不少听过课的本科生和研究生对进一步完善原来的讲义提出了宝贵意见，在此深表谢意。对于关心、鼓励和支持本书出版的同志们表示真挚的感谢。

一方面由于水平所限，另一方面由于知识更新的速度越来越快，书中难免存在不足、缺憾和疏漏，敬请读者指正。

编著者

2006.2



目　录



第1章　绪　　论

§1.1　地球物理学的发展

狭义地讲,地球物理学是利用物理学原理及研究成果探索地球奥秘的学科。广义地讲,地球物理学是集物理学、地质学、大气科学、海洋科学、天文学等为一体,描述地球上所发生的各种地学事件并对其发生机制进行科学解释的一门边缘学科,并在20世纪迅速发展起来。

地球物理学的主要研究对象是人类赖以生存的地球及其周围空间;它用物理学的原理和方法,通过利用先进的电子和信息技术、航空航天技术和空间探测技术对各种地球物理场进行观测,探索地球内部及其周围空间、近地太空的介质结构、物质组成、形成和演化,研究与其相关的各种自然现象及其变化规律;在此基础上优化和改善人类生存和活动环境,防御并减轻地球与空间灾害对人类的影响,为探测和开发国民经济中急需的能源及资源提供新理论、新方法和新技术。

地球物理学包括固体地球物理学和空间物理学两个二级学科。固体地球物理学主要以固体地球作为研究对象,其研究内容涉及地球本体的各种物理场,目的是认识与探索地球内部奥秘(例如其物质组成及演化规律等),发现地球内部的各种物理过程并揭示其规律,其研究历史可追溯到牛顿和开尔文等物理学家的研究工作。固体地球物理学主要以物理学为依托,研究地球内部结构、演化过程及动力学模型;其研究范围涉及地壳、地幔和地核,包括岩石层和软流层发生的各种物理现象、成因及其过程。这就需要通过地球物理场的观测资料处理和模型计算,并以地球为整体进行综合研究,以达到深入认识地球、造福人类的目的。空间物理学以太阳系特别是日地空间物理环境作为主要研究对象,研究近地(包括电离层、磁层)和行星际空间的各种物理过程,太阳活动的规律、起因及其对地球环境和地外飞行器的影响。地球物理学是一门应用性很强的基础学科,它的研究成果不仅有助于增进人类对地球及其空间环境的科学认识,而且支持着众多的国民经济建设中具有重要意义的产业部门和高科技领域,为太空时代的人类活动提供必要的基础。今天,地球物理学已成为地球科学中最具活力的学科之一,其研究成果将对21世纪人类的生存发展、太空环境的充分利用产生重要影响。

地球物理学不仅是一门处于发展前沿的地球科学分支,而且还支持着为数可观的产业部门,在能源和矿产资源的勘探与开发(其中勘探地球物理学是使用地震、重力、磁、电和放射性等方法来寻找石油、天然气、矿石、水等具有经济开发价值的资源的分支学科)、灾害的预测预防、环境监测和保护,甚至文物勘查以及监测核爆炸等方面,取得了辉煌的成果。

地球物理学是一门涉及面十分广泛的边缘科学,它涉及地球内部、大陆、海洋和宇宙空间。从20世纪50年代起,陆续实施了一系列大型的、全球性的研究计划,如国际地球物理年、国际上地幔计划、国际地球动力学计划、国际岩石圈计划、国际地学大断面计划、国际减灾十年、大陆钻探计划、全球变化计划和大陆动力学计划、日地物理计划、地球空间环境计划、近磁层和磁

爆计划等。这些研究计划的实施深化了人类对地球本体的认识，提供了有关资源、能源、灾害和环境形成、分布与发展的深层过程和空间要素的信息。日地空间物理的研究使得人们的视野扩大到宇宙空间（它是地球系统最外的圈层），极大地增强了对地球整体研究的思维与导向，不仅推动了深入了解空间和地球（包括大陆和海洋）以及生态环境之间的耦合关系，而且也加深了对人类生存空间、社会进步与经济繁荣及其可持续发展间关系的认识，同时加深了对固、气、液态物质成分及结构从地核到宇宙空间的认识。

在20世纪，地球物理学在以下10个方面取得了具有全球性意义的重大成就（陈运泰等，2001；滕吉文，2003）：

（1）全球范围的地球物理研究计划和规划对地球物理学乃至整个地球科学领域均产生了极为深刻的影响。对全球范围内重要构造地域的沉积建造，地壳、Moho界面、地幔盖层、软流层的分布特征、介质的基本物理属性和结构有了一个较全面的认识；为全球动力学研究，不同构造域的对比研究和规律性的认识提供了坚实的深层过程与基本要素；为资源、能源、灾害和环境研究给出了深、浅部的构造格局和包括地球外部空间在内的耦合网络；提出了"板块构造学说"，并对其块体运动和驱动力源进行了探索；对青藏高原的形成与隆升、环太平洋地震带与成矿带的成因有了较深入的认识。

（2）发现了地球内部圈层结构的基本图像。1935年英国的杰弗瑞斯（H. Jefferys）和新西兰的布伦（K. E. Bullen）基于当时已有的地球内部信息和地震资料联合编制了全球走时表，1968年综合利用新的地震体波走时、视速度、地震面波的频散以及地球自由振荡的本征周期等数据，反演地球内部的速度和密度，给出了新的地球内部分层结构与特征，即分为A、B（B′、B″、B‴）、C、D（D′、D″）、E（E′、E″）、F和G层，美国重新编制了平均P波走时表。走时表的建立为地震学和地球内部物理学的发展起到了重要作用。

（3）板块构造理论经历了大陆漂移、海底扩张和岩石圈板块构造发展的过程，它以活动论为基本内涵，动摇了一系列传统观念，也触及了一些以前人们不敢触及的问题，并使得许多孤立的地学现象进一步得到规律性的认识。板块构造理论是地质学和固体地球物理学有史以来最为重要的科学成就，被誉为"科学革命"，以表征它在岩石圈板块大地构造中的作用和意义。

（4）全世界共完成了175条GGT断面，其中包括中国的11条全球GGT大断面计划。在GGT大断面编制过程中以地球物理学为主导，在走廊域（宽100km，深部软流层）内（跨越不同构造单元）进行单一地球物理场的深入研究和多种地球物理场的综合研究与解释。GGT大断面是综合地球物理研究的产物，它对构造带的划分和深层过程的研究有着极为显著的作用，并对资源、能源和灾害深部背景和预测起着一定的指导作用。

（5）地震活动和地震预测的研究进展迅速。自从1906年米尔恩（J. Milne）给出了全球地震图，1910年里德（Reid）根据1906年旧金山大地震与圣安德烈斯断层的现场考察提出地震成因的弹性回跳理论，并成为地震断层说的支柱以来，中外地球物理学家们在地震活动和地震预测方面做了一系列研究工作与探索，对地震的全球分带特征（喜马拉雅—古地中海和环太平洋世界地震带的形成与板内地震活动的特异构造背景及其分区与分带特征），大地震"孕育"、发生与发展的深部介质和构造环境与震源的物理-力学过程和成因有了一定的认识；防震、减灾、地震灾害评估和地震预测（包括地点、时间与震级）取得了重要进展；建立了全球地震数字台网和各个国家和区域的数字地震台网。

（6）非均匀性、非线性与各向异性介质中的地震波动理论与计算方法得到了发展，并在资源、能源、灾害和环境研究中得到了应用。

(7)自20世纪中叶前后，一系列地球物理勘探方法相继问世，特别是电法勘探、地震勘探、重力勘探、放射性勘探等，它们在世界范围内为科学进步、社会和经济的发展、确保20世纪的发展与繁荣起到了重要作用，为人类提供了大量的金属、非金属矿产和石油、天然气、煤、煤成气及地热等能源。资源与能源的勘查、开采与利用，对全球各国的科学进步、社会与经济的发展作出了重要贡献。此外，在大陆深部的钻探中，不论是超深钻井还是深钻井均在重要的地表地质构造部位，它是直接检测与获取深部介质结构与资源和灾害背景的唯一手段，但在开钻前又必须进行详细的深部地球物理探测。这不仅对检验深部结构与深层过程十分重要，而且对证实与修正地球物理反演结果以及对应力、应变和深部流体作用等也是至关重要的。

(8)在军事需要和国防建设及维护领土主权方面，地球物理学起到了中坚作用，如大陆的自由延伸与国土海域的划分界带；地下、地面与空中核监测与核侦察；中、远程导弹飞行轨迹以及落地点的准确计算；海中下潜物及其所在海底停卧位置的探测；飞行器的空中姿态；核泄漏的监测与防护导向，等等。

(9)全球范围内最具典型性地域的地球物理研究取得了显著成果。全球范围内最具典型性的地域有青藏高原、南北极地区、太平洋东西海域和陆缘地域等。在全球范围内，不论是板块、板缘和板内，其构造格局与深层动力过程都是十分复杂的，而且是不相同的，这些典型地域的地球物理研究在地球动力学的系统研究中起着控制作用。

(10)全球数字地震台网布局已初步完善并实施。大动态、宽频带、三分量数字化地震观测系统与台阵的提出及其在大陆、海洋与海底的观测已在逐步实现；全球定位系统(GPS)、人卫激光测距(SLR)、甚长基线干涉测量(VLBI)、精密重力测量(包括相对与绝对精密重力测量)和干涉合成孔径雷达(INSAR)观测网已初见成效。地球物理观测系统已得到不断完善，全球观测体系已初步形成，高分辨率的观测网络为大量可靠信息的获取提供了保证。

从20世纪50年代以来，地球物理学已逐渐成为地球科学中最重要的分支之一。在21世纪地球科学发展中必将成为地球科学中的先导学科。因为，不论是资源、能源、灾害、环境(包括空间环境)和深化对地球整体的认识，均必然地要研究和探索地球内部及外层空间物质与能量的交换、圈层耦合和其深层动力过程。地球物理学的发展体现了物理学、数学、信息科学等学科向地球科学的渗透，而地球物理学的发展又促进了物理学、应用数学、计算数学、信息科学、电子学及其他应用科学的发展。

21世纪地球物理的主攻方向是地球内部圈层结构、物质-能量的交换和耦合及深层要素。研究中心是地壳、地幔、壳-幔边界、核-幔边界及地核和其形成与演化的深层过程及响应。研究目标是深部物质运移与板块(特别是板内构造与物质运移)运动和力源机制及新的地球动力学模型的建立。研究目的是深化对地球本体的认识，为资源、灾害、环境和全球变化提供地球深层物质运动的要素，并对其潜在前景进行预测(滕吉文,2003)。

地球科学的最终目标是了解地球本体以及其他行星从太阳系诞生以来的状态及其演化过程，以便能对行星的物理学、化学、地质学和生物学的作用过程建立起详细的、定量的概念性预测模式，即要建立地球(包括行星)的整体理论。

§1.2 大地测量学的发展

传统大地测量学是研究测定地面点位置、地球形状和地球重力场的学科。

自20世纪50年代开始，由于电磁波测距、声呐、卫星大地测量、高速电子计算机和人工智

能以及甚长基线干涉测量等新技术的相继出现，大地测量发生了革命性的变化，现代大地测量已经或将要实现无人干预自动连续观测和数据预处理，可提供几乎是任意时域分辨率的观测系列。可以说现代大地测量技术已跨越了时空和恶劣自然环境的限制，成为一种能持续稳定工作，以高灵敏度、高准确度监测地球动力学过程所反映的地表大地测量信号的精密技术系统。国际大地测量学和地球物理学联合会（IUGG）认为，大地测量学已发展成为一门基础性地学学科，它有能力对地学的诸多领域（包括全球板块运动、地震区的形变、地球重力场及其随时间的变化、极移、地球自转速度变化、固体潮以及地球深部结构等）作出重要贡献。

大体上说，大地测量学包括几何大地测量学、物理大地测量学和卫星大地测量学（或空间大地测量学）三个主要学科分支，并进一步延伸和拓展，形成第四学科分支——地球物理大地测量学。

目前全球面临如下三大问题：一是地球动力现象引起的地震、海啸、火山喷发和异常气候（主要是厄尔尼诺现象）等自然灾害，给人类生命财产带来巨大损失；二是全球气候变暖、海平面上升、局部地层沉降和海上溢油公害等是随着工业发展引起的环境问题；三是由于人口不断增加和陆地资源日益枯竭，需要开拓生存空间和寻找新的矿产资源。面对上述三大问题，目前地学研究的目标有三个：一是减灾，二是监测环境，三是寻找新的矿产资源。与这些目标相适应，现代大地测量学将以延续人类生存、增进人类福祉为己任，向高要求和高难度的深层次发展（宁津生，1997）。

同传统大地测量比较，现代大地测量在三个方面有重大进展和突破：一是提高了观测精度，二是扩大了跨越范围，三是缩短了观测周期。如同生产技术的突破带来产品档次的更新换代一样，现代大地测量技术给大地测量成果带来了量和质的飞跃。整体水平变化的估计提高了 2～3 个数量级；相对定位的相邻点之间允许间距可达数千公里量级；可进行全天候观测，单点定位时间只需几小时甚至几分钟。GPS 技术与 INSAR 技术融合不仅可以提供网点的地形变信息，还可以提供相应地表面的地形变信息；卫星影像和 INSAR 技术还可以在冰川、沙漠以及人无法进入的地区得到应用，提供地壳运动信息。

现代科学技术的迅速发展导致了大地测量出现了以上的重大突破，技术上的突破也导致了大地测量学科经历了一次跨时代的革命性转变，从而推动了传统大地测量在概念上的更新，它从描述地球的几何空间发展到描述地球的物理—几何空间。传统的大地测量是在静态刚性地球的假设下测定地面点的坐标和地球几何参数（半径、扁率等），现代大地测量则是测定地球重力场、极移、自转、板块运动、断层蠕变等地球物理参数，并监测研究非刚性旋转地球的动态变化。因此，现代大地测量学与地球物理学、地质学、地球动力学等学科相互交叉与渗透。更重要的方面体现在从地球表层测量到内部结构的反演。传统的大地测量理论只描述地球表面及其外部重力场，现代大地形变测量和全球动力学监测不仅要求观测地球的各种动态变化，而且还要对这些变化的激发机制作出解释，大地测量必须由地球表面深入到地球内部结构的反演。因此，大地测量从原来的服务对象——为测绘地形和工程测量等提供地面标准点位的控制（即为工程技术服务）的初级阶段为主转向以研究地球科学问题、为探索地球深部结构和动力学过程乃至地学各个领域提供多种信息的高级阶段。现代大地测量学将扩大其直接服务于社会经济活动的应用面，但总的趋势是向地球科学的深层次发展，推动学科发展的主动力将是其在相关地学领域的科学目的。大地测量学的学科性质将从以工程应用为主的应用型学科转向为以研究地球科学问题为主的基础性学科。现代大地测量已大大超过原来传统的大地测量的目标，形成了学科交叉意义上的大地测量学，可以提供和处理原来是地球动力学、大气学、

海洋学、冰川学、地质学和地球物理学的信息。

现代大地测量学的基本任务是:

(1)建立和维持高精度的惯性和地固参考系,建立和维持地区性和全球性的三维大地网(包括海底大地网),以一定的时间尺度长期监测这些网随时间的变化,为大地测量定位和研究地球动力学机制提供一个高精度的地球参考框架和地面基准点网。

(2)监测和解释各种地球动力学现象,包括地壳运动、地球自转运动的变化、地球潮汐、海面地形和海平面变化等。

(3)测定地球形状和地球外部重力场精细结构及其随时间的变化,并对观测结果进行地球物理学解释。

此外,现代大地测量学由面向地球的大地测量学发展为包括月球和太阳系各行星的测量学。

由传统大地测量到现代大地测量的发展过程,是由区域到全球、由静到动、由表及里和由测地到测月和太阳系行星的过程。现代大地测量学的这些任务将在现代科学技术的支持下和与相关地球学科的交叉发展中得到实现。现代大地测量学将成为推动地球科学发展的前沿学科之一,并在经济和社会发展,防灾、减灾和救灾以及在环境监测、评估与保护及国防建设中发挥重要作用。

§1.3 地球物理大地测量学内涵

地球物理大地测量学是由大地测量学、地球物理学、地质学和天文学交叉派生出来的边缘学科,它的研究内容和目的是:利用近代空间大地测量和地球物理观测新技术,精确测定地球表面点的几何位置、地球重力场元素、地球自转轴在空间的位置和方向以及上述参数随时间的变化,并从动力学的观点研究地球动态变化的物理机制,进而为环境变迁和海平面变化的研究、地震火山等自然灾害的孕育预测、空间飞行器精密定轨和制导以及地下资源的勘探等提供服务。比如,测定地球自转(章动、极移和周日长)是大地测量学、天文学和地球物理学共同关心的问题。在天文学中需要建立严密的章动理论;在大地测量学中,需要建立和保持一个平极系统,并保持协调世界时与观测的恒星时之间的严密关系,以便在观测结果中顾及极移和地球自转速度变化的影响,并需要建立定量的极移理论,使极移预测成为可能。天文学和大地测量学所要研究的是,短时间尺度(1 天到 100 年)的地球自转变化现象。从地球物理学的观点来看,需要探索大气层、海洋和固体地球之间的相互作用,阐明地幔和地核的构造及其相互作用,并最终解释导致地球自转变化的各种动力学机制。从大地构造学的观点来看,需要研究长时间尺度(10^6 年以上)的地球自转变化现象,如极移和日长的变化等。

地球自转参数(地球自转速度和极移)的变化中包含着各种地球物理因素的变化信息,精确的、高分辨率的、长期的地球自转参数资料是探索这些地球物理因素的变化在激发维持地极的摆动、长期漂移和地球自转速度变化等方面所必需的。

地球物理观测是提供有关地球内部结构信息的主要来源,它们包括地震波的走势、振幅和频率、通过地表的热流量和磁场参数。行星的形状以及外部重力场的大地测量观测则提供进一步的约束。这些观测结果与物理和化学参数一起成为估测地球内部的性质并构成描述地球和其他行星演化模型的基础。地质学(包括地貌学和地球化学)的观测结果,是了解地壳演化史、变形事件史、变质作用史、岩浆活动史以及水平垂直运动史的关键。地震活动性研究在短

得多的时间尺度上提供了地壳的局部和区域变形的信息。中心的问题是确定导致这种变化的物理过程。如:作用在地壳上的已经发展成为当前这种状态的力的性质有何特点?造成大尺度水平运动的过程如何?产生变质和岩浆活动的热源的起源是什么?大地测量对于了解这些地质过程的贡献有两个方面:第一,大地测量的观测结果为地球对已知力的响应提供了一种量度,例如,在地表载荷问题中,作用力是已知的,变形的观测结果为地壳和地幔的流变性质提供约束;第二,大地测量观测结果被用来对力源本身提供约束(K. Lambeck,1988)。

许多地球物理观测结果可用径向对称地球模型来拟合,但重力场的卫星测量结果表明,横向结构也很重要,这些资料提示了地球内部的非流体静力状态。这些全球的重力测量结果反映了地球的动力学过程,为地球的现今结构提供了进一步的约束,并间接地对地球的演化提供了约束。全球的构造运动的证据是很多的,但目前描述地震位移场和板块运动的模型基本上是运动学模型,只有很少的模型能解释引起地表运动的动力学机制,几乎没有模型能解释地壳或岩石圈下的变形。现代物理学和地质学的中心任务就是要定量了解所涉及的机制。虽然近年来在这方面已经有了显著的进展,但由于我们对地壳和地幔流变学的知识有限,对于作用在行星内部的力的性质的了解也很有限,因此,许多地球物理研究不仅是为了解决全球问题,而且也是为了解决相当专门的问题,包括地球的地震模型的进一步改进,地壳和地幔流变性质的确定,以及板块边界和板块内部的构造过程的研究。这样一来,作为研究地质学和地球物理学相关问题的大地测量学的发展就显得尤为重要了。

现代大地测量学包括地壳运动和变形,重力场的时、空变化及地球的潮汐和自转变形。大地测量学的观测结果在地球结构和演化的研究中起着重要的作用。在很长的时间尺度上,重力和大地水准面异常观测结果提供了有关地球内部非流体静应力和地球对这种应力的响应的信息。例如,在海山或沉积盆地上的重力观测结果可提供岩石圈对时间尺度为 $10^6 \sim 10^7$ 年的载荷的响应量度;在 $10^3 \sim 10^4$ 年的尺度上,海平面的视变化提供了地幔对发生在18000年至6000年以前的大范围的冰川消退的响应估计;在更短的几天到几十年的时间尺度上,固体潮和地球自转的观测结果提供了地球全球弹性和非弹性响应的估计;在局部,大地测量观测值提供了地壳变形的估计,而这种变形由于地震仪的响应频带宽度不够是探测不到的;倾斜和应变测量结果也可以解释地震前后的变形过程。

现代大地测量学观测手段与技术可以从相对短的时期内的观测中看到高噪声的地球物理信号,如地球短周期章动的VLBI观测。近地卫星的高精度激光跟踪也为重力场的中长波部分的测量和对由于固体潮、气象和冰期后回弹变形引起的重力场随时间的变化提供重要的信息。

已发射的CHAMP、GRACE和将于2006年发射的GOCE重力卫星,将会在很大程度上改善上述求定重力场的不足。由于这些低轨卫星借助于星载GPS不间断的精确三维定轨,以及高灵敏度的新一代加速度计对非惯性力的测定,加上高精度激光测距仪对同轨双星间距离变化的感知(即卫星跟踪卫星测距),完全可以构建几乎纯粹由地球重力场起作用的卫星轨道运动,由此反演地球重力场及其变化。根据估算,由这些卫星运动一个月所提供的重力数据所确定的重力场,其精度和空间分辨率(中低频)的可靠性将超过目前正在使用的地球重力场模型。CHAMP卫星能提供和改善小于90阶的重力场球谐系数,GRACE达到150阶(陈俊勇,2003),GOCE预测达到200阶左右。

重力卫星对地球重力场的持续观测可提供地球重力场的时变值。重力场的时变主要是由地球上各种物质的重新分布(各种物质迁移)引起的,这包括日月潮汐,后冰期回弹,大气移

动,其中影响较大的是地球水源(海、湖、河、地下水、冰川、冰原、雪原等)质量分布的变化。今后重力场的时变测量,近期来说,将对海平面上升、冰川学、海洋动力学和大陆水量变化的研究作出独特的贡献(陈俊勇,2003)。

地球物理大地测量学是现代大地测量学的延伸和拓展。现代大地测量学和地质学、地球物理学的关系非常紧密,大地测量学能够给研究地球物理问题和地质问题提供必要的资料,同时,它的发展也是伴随着地球物理学和地质学的发展和要求而不断发展的。

地球物理大地测量学主要是利用大地测量技术与手段,包括天体测量学技术与手段,结合地质学和地球物理学证据一起对地球的慢形变进行研究,并对观测结果进行地球物理解释。这种慢形变包括地壳运动和变形、重力场的空间和时间的变化,行星自转和潮汐变形。

地球物理大地测量学原理与方法主要讲述研究地球慢形变的理论、观测技术和研究方法;着重讨论地壳运动及与其相关的一些问题,包括板块构造运动和地壳运动的监测,研究地壳运动的方法与手段,应力应变分析,大地测量地球物理反演,地震的预测预报等。

§1.4 地球物理大地测量学和地球动力学的关系

与地球物理大地测量学密切相关的术语是地球动力学。地球动力学是地球科学与力学相结合的跨学科研究分支,它从地球整体运动、地球内部和表面的构造运动探讨其动力演化过程,进而寻求它们的驱动机制(王仁,1997)。地球动力学的名称是著名弹性力学家勒夫(Love)于1911年在其论文"Some Problems of Geodynamics"中首次提出的,他对地壳的均衡、固体潮、地球内的压缩效应等进行了卓越的研究,在地震学和潮汐理论中的勒夫波和勒夫数就是以他的名字命名的。

地球动力学研究地球的整体运动、地球内部运动及其与地表结构的相互作用和地表大型构造变形和破裂的力学过程。地球动力学是一个复杂的跨学科课题:它依赖于地质学提供近地表的结构;大地测量学提供位移测量;地球化学、材料科学和岩石力学提供介质的性质;地球物理学提供深部结构以及可能的动力学驱动机制;地震学给出地震机制数据和地震勘探结果;古生物学和古地磁学决定过去的历史,等等。

地球动力学又有天文地球动力学和空间地球动力学之分。天文地球动力学是用天文手段测定和研究地球各种运动状态及其力学机制的一门学科(郑大伟,1994),它所研究的主要内容是地球的整体自转运动和公转运动以及地球内部、地壳、水圈、大气圈的物质运动。因此,天文地球动力学是天文学与大地测量、气象、海洋、地质、地震、地球物理等多学科相互交叉、相互渗透而发展起来的一门新兴前沿学科。在这门学科领域中,天文学的重要作用是:精确地测定地球的各种运动状态,提供测量所需要的参考坐标系,研究地球各种运动的规律和机制。空间地球动力学则是用空间观测技术来研究人类赖以生存的地球系统中的各种运动状态及其力学机制的一门学科,属天文、地质、空间大地测量和地球物理等学科的交叉前沿研究领域。空间地球动力学主要用空间技术精确测量地球的整体运动、地球各圈层(特别是岩石圈)的物质运动与形变,定量地给出地球随时间的变形过程,确定各种运动或变形过程的相互联系,探索它们的演化过程和动力学机制(叶叔华、黄珹,1995)。

空间技术在地球动力学乃至地球科学的研究中起着关键作用。地球科学的研究,从静态研究发展为动态研究,从运动学扩展到动力学,从三维空态拓展到四维时空,从刚体领域转变为弹性体和流变体的研究,从地球表面伸向地球外部空间,深入地球内部,从孤立的地球整体

和地球各圈层（大气圈、水圈、岩石圈、地幔、地核）运动的研究，转变为把地球整体和地球各圈层的运动看成一个完整体系，研究其相互激发、驱动和制约的动力学关系，从地球动态变化的一些定性假设到以高精度实测为基础建立精细的现代地球的定量模型、进而建立完整的动力学体系，从各学科封闭式的研究状态转向各学科交叉、综合的研究。地球科学随空间新技术的发展正经历一场深刻的变革。此外，通过空间新技术可发现传统方法无法探测到的地壳运动非线性时变细节，进而能真正探索地震、火山喷发、海陆升降的成因过程与机制，为预测灾害、保护人类生存环境作出贡献（叶叔华、黄珹，1995）。

地球动力现象的空间尺度是非常广阔的，从地球整体、全球范围直到一个小的局部。从时间尺度来看，地球动力现象有以亿年计的大陆漂流、海底扩张和造山运动过程，有以万年计的冰期和间冰期所引起的一些构造过程和海洋过程，也有周期为几十年、十年、一年、半年、一月、半月乃至一日的各种周期运动，直到为时短暂的地震发生和火山爆发。

透过这些复杂的地球动力现象，探索其力学机制，进而掌握其发生和变化的规律，预测其发展趋势，这属于地球动力学的任务，而地球物理大地测量学的基本原理和方法是研究地球动力学的基础。



第2章 相关的地球物理问题

地球物理学的发展与很多学科分支密切相关。确定地球物理参数（如密度、压强、温度、波速）是地球物理学的重要目标之一。大地测量观测给地球物理参数提供了强制性约束。比如，大地测量手段可提供地球的总体积，地震波观测可提供大致的密度分布，由此可求出总质量。但更为精确的地球总质量的确定需要利用卫星大地测量技术。这就是对总质量的一种约束。地球的转动惯量张量（6个独立分量）也只有通过卫星观测技术才能较精确地确定。上述两种大地测量结果均对密度分布构成约束。本章主要阐述与大地测量（包括卫星大地测量）密切相关的地球物理问题，但并不试图详细展开，那是后续章节的任务（当然不可能面面俱到）。

§2.1 太阳系主要成员

粗略地说，太阳系由太阳和9大行星组成，地球是太阳系9大行星中的一员，月球是地球的卫星。以太阳为中心，由内向外依次为：水星，金星，地球（有1颗天然卫星，后同），火星（有4颗卫星），木星（有16颗卫星），土星（有23颗卫星），天王星（有24颗卫星），海王星（有8颗卫星），冥王星。按物理化学特性，将水星、金星、地球、火星归为类地行星，将木星、土星、天王星、海王星归为类木行星。至于冥王星，则比较特殊，它有可能是后来的俘获物，因其公转轨道面与黄道面相差较大，而其他行星的公转轨道面均与黄道面比较接近。另外，所有9大行星的公转方向与太阳的自转方向一致，这是太阳系旋转星云起源假说的一个重要依据。行星自转轴的取向，则显示出较差的规律性（见后）。充分了解地球周围的重要成员（太阳、月球以及其他行星），对于研究地球本身来说是重要的。

太阳 对地球影响最大的恒星，也是太阳系中的中心天体，基本上处于高能粒子流状及气体状。整个太阳系大约在50亿年前诞生，由9个大行星、75颗天然卫星（这是目前所观测到的天然卫星数目，实际的卫星数目肯定更多，它们环绕大行星旋转）、数以万计的小行星（估计有50万颗）以及很多彗星和无数固体粒子块（包括流星）构成。太阳位于距银河系中心约8.5 pc的旋臂内（其中pc是秒差距，相当于在3.261633a（年）内光在真空中所穿越的直线距离，也即3.261633光年，光年距离的单位用LY表示，$1\text{pc} = 3.261633\text{LY} = 3.085678 \times 10^{11}\text{km}$）；银河系本身类似于盘状，盘面直径大约50kpc，盘厚约4kpc；太阳绕银心旋转的公转速度约220km/s（太阳所在的银河系的自转周期为2.46×10^8a，这当然也是太阳的公转周期），太阳半径6.959×10^5km，自转周期则与太阳的部位有关，在赤道区为25d（天），纬度80°的地方大约35d。太阳质量大约332488M_e（其中M_e是地球质量），占整个太阳系质量的99.9%，但太阳的角动量仅为太阳系总角动量的0.6%；太阳的平均密度为1.41g/cm^3，中心密度约150g/cm^3，表面基本磁场约10^4T（其中T表示特斯拉，$1\text{T} = 10^4$高斯$= 10^9$伽马），磁偶极矩$3 \times 10^6 m_e$（其中m_e是地球的磁偶极矩），表面温度5800K，中心温度约1.5×10^7K，其中

K 是开尔文(Kelven)绝对温标，绝对温标零度相当于摄氏温标 273.15 度。

月球 地球的唯一一颗天然卫星,对地球的影响仅次于太阳,周围没有卫星。月球绕地球的公转周期约 30d,离开地球的平均距离为 38 万 km,月球的平均半径约为 0.2728R_e(其中 R_e 是地球平均半径)，月球赤道面与黄道面夹角（月球的黄赤交角）约 1°30′，月球轨道面与黄道面交角约 5°09′，月球的自转周期与公转周期相同，平均密度为 3.34g/cm^3，质量是地球质量的 1/81，月球表面的平均磁场强度小于 2×10^{-9}T(2×10^{-5}高斯)(Jacobs, 1974)，远远小于地球表面的平均磁场，月球的磁偶极矩小于 $2\times10^{-6}m_e$；月球表面几乎没有大气层，没有水源，昼夜温差可达 300℃，没有发现生命现象。

水星 离太阳最近的一颗行星，属于类地行星，基本上由重物质（岩石）构成，周围没有卫星。绕太阳旋转的公转周期 0.2408τ_e(相当于 88d，其中 τ_e 是地球绕太阳的公转周期)，到太阳的平均距离 0.387AU(其中 AU 是一个天文单位，相当于地球绕太阳公转轨道的长半轴，1AU = 1.495985×10^8km)，公转轨道的偏心率 0.2056，水星本身的赤道半径 0.383R_e，自转周期 58.7 日，赤道与轨道面交角 2°，轨道面与黄道面交角 7°，质量 0.054M_e，密度 5.43 g/cm^3,磁偶极矩 $6.6\times10^{-4}m_e$，表面温度 600K(温差变化极大，从 100K 到 770K)。水星表面没有水，没有大气层，没有生命现象。

金星 离太阳次近的一颗行星，属于类地行星，基本上由重物质（岩石）构成，周围没有卫星。公转周期 0.6156τ_e(224.7d)，到太阳的平均距离 0.723AU，公转轨道的偏心率为 0.0068,赤道半径 0.949R_e,自转周期 243d，但自转方向与太阳的自转方向相反，赤道与轨道面交角 177.3°，轨道面与黄道面交角 3°24′，质量 0.815M_e，密度 5.26g/cm^3，磁偶极矩小于 $10^{-4}m_e$，表面温度 750K（温差比地球表面的温差要小)。金星表面有大气层，但二氧化碳占 97%，表面的压力达到 9×10^7Pa，尚未发现生命现象。

地球 属于类地行星，质量远远小于太阳质量（太阳占整个太阳系质量的 99% 以上)，平均密度约 5.54g/cm^3，平均半径约 6371km（赤道半径 6378km)，自转角速度约每 24h 旋转一周（23h 56min)，黄赤交角 23.45°(苏宜，2002)，绕太阳的公转速度约 30km/s，离开太阳的距离大约 8 个光分钟（在真空中光行走 8 分钟所穿越的直线距离)，属于非常普通的行星，将来也不可能演变为特殊星体（如白矮星、中子星、黑洞之类)。尽管如此，地球的演化史同太阳系的演化史乃至宇宙的演化史密切相关。地球表面的平均温度为 15℃，最大（不同地区）温差达到 80℃左右，地心温度大约 5000℃，地面的平均磁场强度大约 0.5×10^{-4}T(Stacey, 1977)，地磁极与通常的地理南北极之间的夹角为 11.5°，地球的赤道隆起，旋转角速度不均匀，密度和压强随着深度而变大，温度随着深度而升高，具有明显的分层结构（即内核、外核、地幔、地壳)。其中最为奇特的是，内核是固态，具有超速旋转，外核是液态。另外，地球还伴随有各种复杂的形变运动以及物质迁移运动。

火星 离太阳最远的类地行星，基本上由重物质（岩石）构成，周围有 2 颗卫星。公转周期 1.8809τ_e(687d)，到太阳的平均距离 1.524AU，公转轨道的偏心率 0.0933，赤道半径 0.532R_e，自转周期 24 h 37min，赤道与轨道面交角 25.2°(苏宜，2002，但刘南 1987 所给的数据为 23°59′)，轨道面与黄道面交角 1°51′，质量 0.108M_e，密度 3.96g/cm^3，磁偶极矩 $3\times10^{-4}m_e$，表面温度 230K，但昼夜温差较大，从 300K 到 400K。火星表面有大气层，但极为稀薄，其中 95% 是二氧化碳，尚未发现生命现象。

木星 离太阳最近的类木行星，基本上由流体以及气态物质构成，外围有环状物质微粒

(在光辐射作用下形成亮环)，周围已发现 16 颗卫星。公转周期 11.8622τ_e，到太阳的平均距离 5.203AU，公转轨道的偏心率 0.0483，赤道半径 11.2R_e，自转周期 9 h 50 min，赤道与轨道面交角 3.12°，轨道面与黄道面交角 1°18′，质量 317.9M_e，密度 1.33，磁偶极矩 $1.9\times10^4 m_e$（它比地球的磁偶极矩大得多），磁极方向正好与地球的磁极方向相反（地球的磁南极 S 在北极附近，而木星的磁南极 S 在南极附近），表面温度 128K，它的大气层由约 1000km 厚的氢和氦组成，而木星表面是液态氢海洋，尚未发现生命现象。

土星 离太阳次近的类木行星，基本上由流体以及气态物质构成，外围有环状物质微粒（即土星环），周围已发现 23 颗卫星，其中最大的，直径达到 5150km，最小的，直径只有 300km；土星公转周期 29.458τ_e，到太阳的平均距离 9.539AU，公转轨道的偏心率 0.0559，赤道半径 9.4R_e，自转周期 10 h 14 min，赤道与轨道面交角 26.7°，轨道面与黄道面交角 1°29′，质量 95.2M_e，密度 0.69g/cm^3，磁偶极矩小于 $2.5\times10^3 m_e$，表面温度 105K。土星表面是液态氢海洋，由浓密的大气层包围，大气层主要由氢和氦构成，尚未发现生命现象。

天王星 属于类木行星，基本上由液态物质构成，外围有环状物质微粒（9 条环带），周围已发现 24 颗卫星；公转周期 84.013τ_e，到太阳的平均距离 19.191AU，公转轨道的偏心率 0.0471，赤道半径 4.01R_e，自转周期 15 h 30 min（但刘南 1987 所给数据为 16.8h，苏宜 2002 给出的数据为 17 h 54 min，网上查询最新数据为 17 h 14 min），赤道与轨道面交角 97.86°(即自转轴几乎在公转轨道面内)，轨道面与黄道面交角 0°46′，质量 14.6M_e，密度 1.29g/cm^3，表面温度 70K。

海王星 属于类木行星，基本上由液态物质构成，外围有环状物质微粒，已发现 8 颗卫星，大的比月球还大，其周围可能有大气层，小的直径大约 400km，其中有一颗卫星的公转轨道与太阳的自转方向相反。海王星的公转周期 164.79τ_e，到太阳的平均距离 30.061AU，公转轨道的偏心率 0.0085，赤道半径 3.9R_e，自转周期 15 h 48 min(但刘南 1987 所给数据为 22.08 h，苏宜 2002 所给数据为 19 h 12 min，网上查询最新数据为 16 h 6 min)，赤道与轨道面交角 29.6°(但刘南 1987 所给数据为 28.8°)，轨道面与黄道面交角 1°46′，质量 17.2M_e，密度约 1.66g/cm^3，表面温度 57K。

冥王星 离太阳最远的行星，基本上由液态或固态物质构成，周围发现了一颗天然同步卫星，其公转周期与冥王星的自转周期完全相同。冥王星的公转周期 248.4τ_e，到太阳的平均距离 39.529AU，公转轨道的偏心率 0.2494，赤道半径 0.21R_e，自转周期 6.387d(逆行)，赤道与轨道面交角 122.46°，轨道面与黄道面交角 17°09′，质量 0.0024M_e，平均密度约1.5g/cm^3（刘南，1987；苏宜 2002 的数据 2.03g/cm^3 恐有误），表面温度 50K。

Lyttleton(1960) 曾经提出了一种裂变学说，认为地球、火星以及月球原本是一个天体，但该天体的自转不稳定，会发生分裂（最可能的分裂是变为两个独立的物体，其质量比为8:1），按质量比 8:1 抛射出一大块物质，后者随即又按质量比 8:1 抛射出一小块物质，大的即为火星，小的即为月球。不过，目前尚无定论。关键的问题是存在两个难点：如何解释约 5°的白赤交角，以及月球上的玄武岩为何与地球上的玄武岩有较大的差异。尽管如此，Lyttleton 的学说还是有很大的诱惑力。McCrae(1969) 指出，水星和金星也是由同一个天体分裂而来。类似地，土星、天王星以及海王星也是分裂的产物。

§2.2 地球的构造

从地球表面往上看，被大约 1000km 厚的大气层所包围，正是这一大气层的存在，保护了

地球上的生命。大气层又分为几个层次，从内向外依次为对流层、平流层、中间层（或过渡层）、电离层（也叫热层或暖层）、散逸层、磁层。

对流层的厚度约 10km 左右，层内空气具有强烈的水平运动和垂直运动，气温随高度升高而降低，占大气总质量的80%左右。对流层以上到50km 的高空是平流层，空气稀薄，气流稳定。50km 以上至 85km 构成过渡层，其性质与平流层类似。85km 以上至 500km 的范围是电离层，温度随高度的升高而升高，原子处于电离状态，虽然稀薄，但运动能量很高，能反射无线电波。再往外至 1000km 甚至延伸到 3000km 的范围，空气非常稀薄，但常常有分子和原子逃离地球引力场。磁层则构成了一种特殊的屏障，地球免遭太阳高能粒子的轰击，磁层在面向太阳的一侧离开地心的距离大约 6 万 km，背向太阳的一侧离开地心的距离可达百万公里。利用卫星探测技术可确定高空（200km 以上）大气的密度分布。卫星除了受地球引力场的制约之外，还受到日月行星摄动、太阳光辐射及地球反射光辐射压力摄动、地球潮汐摄动、空气阻尼摄动等因素的影响。星载加速度计可以获得非引力（包括光辐射阻尼和空气阻尼）引起的加速度。光辐射阻尼可利用理论模型计算，由此可获得由空气阻尼引起的加速度。最后，利用空气阻尼模式可求出空气密度。

2.2.1 地球内部的主要分层

最早期的地球理论基本上只涉及地球形状，认为地球是圆球状（Aristotels 亚里士多德）。如果说对地球的内部还有进一步的认知，那也只限于各种猜测。牛顿力学体系建立之后，牛顿便断言地球是旋转椭球体，因为离心力越接近赤道越大，从而使越靠近赤道的部分隆起越大。弹性力学（以牛顿力学为基础）的建立导致了完整的弹性波（地震波）理论，后者为发现地球的内部结构起到了关键性作用。最初发现的是莫霍面（Mohorovičič，1909），也即地幔与地壳的分界面，深度大约 35km（海域部分较浅，为 5 ~ 10km，陆地部分较深，约 60km）。在莫霍面处，密度跳跃大约 0.4g/cm^3，莫霍面以上的，即地壳；莫霍面以下的，即地幔。5 年之后，Gudenberg 发现了核幔分界面，在距离地心大约 3485km 处，核幔分界面以下的部分称为地核，分界面处的密度跳跃为 4.41g/cm^3。至此，地球基本上分为三层结构：地核、地幔、地壳。地幔厚度大约 2265km。

地震波探测使地球内部的分层越来越细。地核又分为固态内核（内核半径 1221km）和液态外核，分界面处的密度跳跃为 0.59g/cm^3（Dziwonski and Anderson，1981）；地幔又分为上地幔和下地幔，其分界面在距地心约 5701km 处，分界面处的密度跳跃为 0.3g/cm^3。由于在此分界面处物相具有急剧的转变，因而又将此分界面称为相变面（实际上是厚度约 150km 的过渡层）。

2.2.2 地球基本物理参数沿径向和横向的变化

如果从地球表面向地心方向考察，随着深度的加深，密度、压强以及温度均为增值函数。地球表面的平均密度约 2.67g/cm^3，地心密度约 13.1g/cm^3；地球表面的平均温度 300K，随着深度的增加，温度逐渐升高，呈连续变化，在地心处达到大约 5500K。

2.2.2.1 地球内部的密度和压力分布

确定地球内部的密度涉及反演问题。通常采用的方法是利用地震波波速资料进行反演，因为波速资料包含了密度信息。纵波和横波与密度之间存在确定的函数关系（见式(2.6)）。

反演问题的最大难点是解的不唯一性。为了确定密度分布，通常假定（周惠兰，1991），除了地壳和上地幔顶部之外，密度仅仅是深度的函数，与经向和纬向无关，同时需满足如下强约束条件

$$M_e = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r)\,dr = 5.974 \times 10^{27}\,g \tag{2.1}$$

$$p_{center} = 3638 \times 10^8\,Pa \equiv 363.8\,GPa \tag{2.2}$$

$$C = \frac{I}{MR^2} = 0.3308 \tag{2.3}$$

其中 M_e、R、I 分别为地球的质量、平均半径、绕平均自转轴的转动惯量，p_{center} 是地心处的压强，其单位是帕斯卡(Pa)，$1\,Pa = N/m^2$。这里需要说明的是，地球质量和转动惯量均由卫星大地测量方法获得。反演密度分布不惟一，求出的密度分布也只是经验值。所利用的数据源越多，模型越精确。每一类数据源实际上就是附加了一类边值条件。

地球内部任意一点的密度 ρ 是压力、温度、化学组成以及物质相态(p, T, n_m, q_a)的函数，即

$$\rho = \rho(p, T, n_m, q_a), m = 1, 2, \cdots, N; a = 1, 2, \cdots, M \tag{2.4}$$

其中相态又是(p, T, n_i)的函数。密度随深度的变化可以表示成

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{dp}{dz} + \frac{\partial\rho}{\partial T}\frac{dT}{dz} + \frac{\partial\rho}{\partial n_m}\frac{dn_m}{dz} + \frac{\partial\rho}{\partial q_a}\frac{dq_a}{dz} \tag{2.5}$$

其中指标 m 和 a 分别对化学组成个数(N)和相态个数(M)求和，采用爱因斯坦求和约定：在一项中出现两个相同的指标，并且一个在上一个在下时，则表示求和。例如，如果是三维的，则有 $A^iB_i = A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3$，$T_i^i = T_1^1 + T_2^2 + T_3^3$，但 A^iB^i（或 T_{ii}）只表示一项，不求和，因为尽管有两个相同指标，但它们均在上（或下）。

直接解算方程（2.5）十分困难。布伦（Bullen）当初通过考察地球内部的不同区域将方程（2.5）进行简化，先求出简化模型，然后将计算结果与观测数据再进行比对，看是否需要修正。比如，如果认为地球或地球的某一部分是绝热的均匀区，则有如下简单方程

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{dp}{dz} = \frac{\rho}{k}g\rho \tag{2.6}$$

其中 g 是重力加速度，k 是绝热系数(或体膨胀系数)，满足

$$\frac{k}{\rho} = V_P^2 - \frac{4}{3}V_S^2 \tag{2.7}$$

方程（2.7）称为 W-A 公式，由 Williamson-Adams 提出。

按上述方法，布伦于 1936 年首先提出了 A 模型，但精度不高，当时他任意选取了地心密度 $\rho_{center} = 17.3\,g/cm^3$。1940 年左右，根据更加丰富的资料，取 $\rho_{center} = 12.3\,g/cm^3$，得到了 A′模型。1975 年，再联合人造卫星资料，他又将模型修改为 A″模型。布伦模型实际上就是采用逼近法逐渐接近真值。不过，总的说来，布伦模型的可靠性有限。普雷斯在 20 世纪 70 年代采用 Monte-Carlo 随机尝试法(参见 13.5.3 节)研究地球的密度分布（傅承义等，1985），从数百万个可能的模型中选出了 27 个最合理的模型，称为 Press 模型群，它们均给出核幔界面处核的密度为 $9.9 \times 10.2\,g/cm^3$。

随着观测资料的日益丰富，反演技术不断提高，特别是借助于大型计算机，Dziewonsky and Anderson（1981）发表了 PREM 模型，已被国际地球物理协会推荐使用。该模型除了利用

体波资料外，还利用了天文测量和大地测量数据，利用了自由振荡和面波资料，同时考虑了所有间断面；得出的密度分布具有如下几个显著特征：在 0 ~ 670km 深度，密度值上升不均匀，共有三个跳跃值，其中在 670km 处从 3.99g/cm^3 跃变为 4.38g/cm^3；然后逐渐增加密度直到核幔界面处的 5.57g/cm^3，跳跃到 9.90g/cm^3，进入外核；在内外核界面密度达到 12.17g/cm^3，跃变到 12.76g/cm^3，进入内核；之后缓慢增加，直到地心处的 13.09g/cm^3。

根据密度分布 ρ 可以求出引力分布。注意到球对称分布假定，引力可以表示成

$$g = \frac{4\pi G}{r^2}\int_0^r r^2 \rho \mathrm{d}r \tag{2.8}$$

其中：G 是引力常数；r 是坐标系原点至积分流动点 $\mathrm{d}r$ 的距离。显然，这种表述是近似的，没有考虑地球的水准椭球特性以及实际密度分布的不均匀性。

有了密度以及引力分布，即可按下式求出压强分布

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = g\rho \tag{2.9}$$

在地心处，压强为 363.8GPa。

2.2.2.2 地球内部的温度分布

地热主要来自三个方面：引力收缩，将引力位能转化为热能；太阳辐射，将电磁能转化为热能；物质的放射性，将原子核内能转化为热能。按星云假说，地球当初是较冷的旋状气态物质，这种气态物质由于引力作用而不断收缩。在地球的早期演化阶段，地热主要来源于引力收缩作用。随着收缩的进行，地温不断升高，向外产生热辐射。引力收缩大约使地温升高 1000℃(腾吉文，2003)。在热辐射与引力基本达到平衡以后，地热则主要来源于放射性。太阳辐射对地球的温度变化影响较小。

描述地球温度分布，可通过求解热传导方程来实现。首先引进各向同性体热传导定律(傅里叶定律)

$$q = -k\ \nabla T(\mathrm{cal\cdot cm^{-2}\cdot s^{-1}}) \tag{2.10}$$

其中：q 表示热流量矢量，它是单位时间流过单位面积的热量；k 是导热率，它是单位时间每升高一度穿过单位距离的热量。通常，固体的导热率在 10^{-4} ~ 1cal/(cm · s · K)之间(1cal = 4.1868J)，地壳的热导率在 0.001 ~ 0.1cal/(cm · s · K)之间。方程(2.10)可以推广到一般介质之中

$$q_i = -k_i^j\frac{\partial T}{\partial x^j} \equiv -k_i^j\partial_j T \tag{2.11}$$

其中：k_i^j 表示在第 i 个面沿 j 方向的导热率。注意：指标 j 表示从 1 到 3 求和，$x^1 \equiv x, x^2 \equiv y, x^3 \equiv z$。

选定一个任意微元体积 $\mathrm{d}V$，其温度变化 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ 来源于两方面原因：流进和流出的热量有差异；微元体自身产热。流进 $\mathrm{d}V$ 的热量通量(净值)可以表示成

$$\mathrm{d}Q = -\int_{\partial(\mathrm{d}V)} q\cdot n\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t = \int_{\mathrm{d}V}\partial_i q^i\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

自产热可以表示成

$$\mathrm{d}Q' = \int_{\mathrm{d}V} A_0\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

其中：A_0 是单位时间单位体积产热率。另外，微元体在 $\mathrm{d}t$ 时间内由于温度变化而增能

$$\mathrm{d}E = \int_{\partial V} \frac{\partial T}{\partial t} c\rho \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t$$

其中：c 和 ρ 分别是物质的比热容和密度。综合上述三个方程，利用热力学第一定律，可得

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c\rho}\partial^i (k_i^j \partial_j) T + \frac{A_0}{c\rho} \tag{2.12}$$

给定了初值条件和边界条件，即可根据方程（2.12）求出温度在任意时刻的空间分布。但一般说来，初始温度并不容易给定，因涉及非常多的不确定因素。如果假想地球温度不随时间变化，则方程（2.12）就变成了与时间无关的偏微分方程

$$\frac{1}{c\rho}\partial^i (k_i^j \partial_j) T + \frac{A_0}{c\rho} = 0 \tag{2.13}$$

通过实际测量（从理论上），可以得到在某个时刻地球表面的温度

$$T|_{\partial\Omega} = f(P)|_{\partial\Omega} \tag{2.14}$$

其中：$\partial\Omega$ 表示地球域 Ω 的边界。方程（2.13）和（2.14）构成第一类边值问题，其解就是地球的温度分布。这一解算过程极为繁杂。

对于各向同性介质，如果不产热，则方程（2.12）可以简化为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \nabla^2 T \tag{2.15}$$

其中：$\nabla^2 \equiv \Delta$ 是拉普拉斯算符。方程（2.15）是在研究地热过程中经常采用的热传导方程。如果将地球表面近似看成无限平面，温度只与第三个坐标轴有关，则方程（2.13）有通解

$$T = C\mathrm{e}^{-z\frac{\sqrt{\omega}}{a\sqrt{2}}} \sin\left(\omega t - z\frac{\sqrt{\omega}}{a\sqrt{2}} + \delta\right) \tag{2.16}$$

其中：$a^2 = \kappa = k/c\rho$ 是热扩散率。假定要研究由于太阳辐射给地球温度变化带来的影响，取太阳辐射到地面的温度 $T_0 = C\sin(\omega t + \delta)$，则有

$$T = C\mathrm{e}^{-\frac{z}{16.8}} \sin\left(\omega t - z\frac{\sqrt{\omega}}{a\sqrt{2}} + \delta\right) \tag{2.17}$$

由此可以得到如下结论：深入到地下 1m，受太阳影响的温度变化不到地表温度变化的 300 分之一；深入到 10m，温度变化不到 $1/300^{10}$，这已经非常微小了。

目前关于地球内部的温度分布多采用半经验半理论公式。对于地壳，温度分布为（周惠兰，1991）

$$T(z) = \frac{q + A_0 H}{\kappa} z + \frac{A_0 H^2}{\kappa} (\mathrm{e}^{-\frac{z}{H}} - 1) \tag{2.18}$$

其中：H 是地壳厚度。由此可以计算出，在 Moho 面处的温度大约有 500℃。

核幔温度分布通常采用由 Irvine and Stacey（1975）提出的估算公式

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\bar{\lambda} \tag{2.19}$$

其中：$\bar{\lambda}$ 是一经验因子，大约等于 2（Jeanloz，1979；Stacey，1977；Barton and Stacey，1985；周惠兰，1991）。由公式（2.19）可计算核幔温度（绝对温标）分布，比如（从地心向外）：地心处 4286K；500km 处 4266K；1220km 处（内外核分界面）4168K；2500km 处 3745 K；3490km 处（核幔交界）3157K；5500km 处 2335K；6360km 处 540K。

2.2.3 小结

密度虽然从总体上也随着深度的加深而逐渐增大，但有很多间断，并非连续函数。波速的变化规律比较复杂。首先，波有纵波与横波之分，前者的波速大于后者的波速；其次，在液态外核以及海水中没有横波；第三，纵波大体上随深度的增加而增加，但在液态外核之中突然变慢，大约 8km/s，在内核中达到 11km/s，在距离地球中心 3481 ~ 4500km 的下地幔中，达到约 13km/s(极大值)，在上地幔中大约 8km/s，在地壳中的平均传播速度为 6.5km/s，在海水中的传播速度为 1.5km/s；第四，横波的速度在上地壳中约 3.5km/s，下地壳中约为 3.8km/s，上地幔中为 4 ~ 5km/s，下地幔中达到最大值约 7km/s，在内核中只有大约 3.5km/s；波速并非连续变化函数，因为密度不连续。由于重力在地球内部是连续函数，因而压强也是连续函数。地球表面的压强也即通常的大气压 10^5Pa 左右，在大陆地壳底部可达到 10^9Pa，在深部地幔中的压力变化范围为$(3 \sim 13) \times 10^{10}$Pa(Jacobs, 1974)，在地核中的压力变化范围为$(1.4 \sim 3.6) \times 10^{11}$Pa，在地心处达到最大值，约 3.63×10^{11}Pa。

从横向看，密度、压强、波速以及温度也有变化，其变化规律并非如径向变化那么明显。尽管如此，从总体上看，可总结出如下两条规律：

(1)越往地球深处走，上述物理参数沿横向的变化幅度越小。

(2)上述物理参数沿经度方向和纬度方向的变化幅度略有不同，沿纬向的变化幅度（从总体上看）略微大一些。

§2.3 地球潮汐

2.3.1 潮汐现象

整个地球随日相和月相而发生形变的现象称为潮汐现象。这是由于地球并非刚体，在日月引力的作用下会发生形变。以太阳引力作用为例，假定地球是圆球，由于地球上的各个质点受到太阳引力作用的不同，地球将变成一个橄榄球形，其对称轴正好通过日地连线。我们将这种使地球发生形变的日月引力通称为引潮力。由于日月相对于地球的方位随时间变化，因而潮汐也随时间变化，其变化周期从每天两周到每年两周不等。实际上，潮汐还应该包括其他行星的作用，只不过这种作用相对来说比较小，通常可以不考虑（这主要取决于对精度的要求）。再广义一点，潮汐还应该包括由于离心力（各种离心力）的变化而引起的潮汐现象。更广义地说，由所有外力（不包括地球自身引力）以及各种惯性力（包括离心力）的变化而引起的地球形变称为地球潮汐。比如，以 14 个月为周期的 Chandler 摆动，导致一种附加的潮汐现象。潮汐又分大气潮、海潮和固体潮。大气潮比较微弱，一般情况下可以忽略；海潮变化幅度很大，可达到几十米甚至上百米（但这并非真正意义上的海洋潮汐），再加上受风浪的影响，变化规律比较复杂。相比之下，固体潮变化幅度小，大约几十厘米的数量级，受其他随机干扰因素的影响不大，易于把握。但对于上述三种潮汐来说，它们变化的频率是相同的。对地球的整体形变以及地球的旋转运动影响最大的是固体潮，海潮大约占固体潮的 10%，而大气潮只占固体潮的 1%(Lambeck, 1980)。后面的讨论基本上限于固体潮。

潮汐概念本身可以追溯到很久以前。但真正使潮汐概念用于科学研究的，当归功于自然科学哲学家康德(Kant)。早在 1695 年，哈雷通过分析大量的月球观测资料得出结论：月球

可能在黄经方向有加速。为了解释月球为何加速，康德于1754年提出了关于地球的潮汐摩擦学说，他认为，由于日月潮汐对地球的摩擦作用，地球的旋转角速度会逐渐减小；为了维持角动量守恒，地球角动量减少（损失）的部分将转移给月球绕地球的运动，其结果是，月球将获得加速。这一观点的确是正确的，但在当时并没有引起重视。直到1898年Darwin的卓越研究（Stacey，1977），人们才真正相信了潮汐作用。根据目前的监测资料分析，地球的旋转角速度正以每年约0.002时秒的速率减慢。如果地球损失的角动量转移给了月球绕地球的公转，则月球的角动量增加。其结果是，月球的转动惯量增加，或角速度增加，或二者兼有，或转动惯量增加而角速度减小（但这种可能性极小）。精确的判断需要借助二体运动方程。目前的观测结果（利用激光测月技术）表明，月球正以5cm/a的速率退行（即远离地球）。如果在过去的历史时期月球一直保持上述退行速率，则可推论出如下结论（目前的地月距离是38万km）：大约在30亿年前，月球离开地球的距离大约为10个地球半径；再往前推4亿年，月球位于Roche极限（2.7个地球半径）处。Roche极限是月球要发生破裂的极限位置(Jacobs，1974；Stacey，1977)。

2.3.2 引潮力、引潮位及潮汐分析

2.3.2.1 引潮力

地球内部任意一点的引潮力是除了地球自身引力以及由于地球旋转而引起的恒定离心力部分以外的所有力的和，包括日月星辰的引力以及各种惯性力。其中，惯性力包括：线性加速惯性力（方向与加速度的方向相反）、惯性离心力以及科里奥利惯性力。在惯性离心力中又包括地球离心力的非恒定部分。若地球的旋转角速度恒定，那么，由离心力而引起的向外隆起的赤道也是固定的。当地球旋转角速度变化时，向外隆起的赤道也会变化。这就是由离心力的非恒定部分引起的潮汐效应。但这种效应比较小（此因旋转角速度的变化比较小），在一般的分析研究中可以忽略。在一般情况下，科里奥利惯性力引起的潮汐效应也是微小量，可忽略不计。但需注意，若要研究地球的长期变化（以年或百年为尺度衡量），或研究海洋环流等现象，则需要考虑上述两种潮汐效应。旋转角速度的变化有可能使海水产生堆积效应。尽管科里奥利惯性力对于迁移的物质（如地幔对流、地壳升降、海水流动等）有作用，但仅对流动的海水的作用比较显著。为了不使问题过于复杂，我们以后不再考虑上述两种潮汐效应，除非有特殊需要时再加以考虑，而是把注意力集中在由日月引力引起的潮汐效应上。至于其他行星引起的潮汐效应，除了潮汐效应较弱以及周期不同之外，其原理与日月潮汐完全相同，在必要时加进改正项即可，为此，我们只限于讨论日月潮汐。日潮和月潮也是遵循完全相同的力学作用原理，两种潮汐的振幅具有同一个数量级（若精确一点说，日潮大约是月潮的一半），只不过具有不同的周期而已。为简明计，下面我们只以月球为例，陈述由月球引力引起的潮汐效应的数学表述。

就引潮力本身而言，其表述是简单的。考察两个单位质点A和B（即它们具有相同的单位质量），它们相对于月心的向径（即矢径）分别用$\boldsymbol{r}_A$和$\boldsymbol{r}_B$表示。令上述两个质点在同一时刻向月球中心作自由下落运动。这时，它们分别所受的外力由牛顿(Newton)万有引力定律给出：

$$\boldsymbol{F}_A = GM_S\boldsymbol{r}_A/r_A^3, \boldsymbol{F}_B = GM_S\boldsymbol{r}_B/r_B^3 \tag{2.20}$$

在上述力的作用下，根据牛顿第二定律，它们分别获得如下的加速度：

$$\boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{F}_A, \boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{F}_B \tag{2.21}$$

于是，它们之间的相对加速度（即 A 相对于 B 的加速度）可表示成

$$\Delta \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_A-\boldsymbol{a}_B \tag{2.22}$$

这实际上也是它们之间的相对作用力（即二者所受作用力之差），可称之为它们之间的相对引潮力，简称引潮力。若取它们所受力的平均力（两个力的简单平均），并以此为参考，简称参考力，记为 $\boldsymbol{a}$，那么，$\boldsymbol{a}_A-\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}_B-\boldsymbol{a}$ 就分别是单位质点 A 和 B 的引潮力。

若 A 与 B 不重合，则必可观测到 A 与 B 之间的相对运动：

（1）当初若 A 与 B 位于通过月心的同一条直线上（可事先假定 A 离开太阳更近一些），则 A 与 B 之间的距离会变得越来越远，此因 A 总是超前于 B 而获得更大的加速度；

（2）当初若 A 与 B 位于以月心为中心的同一个大圆上（这时它们离开月球的距离相等，但方位不同），则 A 与 B 之间的距离会变得越来越近，此因它们以完全相同的速率向月球中心运动。

在其他情形，则是上述两种特殊情形的综合效应。这种效应就是潮汐效应。由 Forward 等人发明的用于测量重力梯度的重力梯度仪正是基于潮汐效应而制造的(Forward, 1974)。

让我们假想 A 与 B 刚性连接。这时，尽管 A 和 B 存在引潮力，但由于刚性约束，它们不存在潮汐效应。而在前面的讨论中，我们假定了 A 和 B 完全做自由落体运动，A 与 B 之间没有约束，潮汐效应最大。就实际的地球而言，其中的任意两点之间都存在弹塑性约束，在引潮力的作用之下，它们在地球本体中的运动规律将通过地球的形变理论（以弹性力学和流体力学为基础）来描述。由于地球内部结构复杂，关于密度分布的知识还非常有限，因而不可能精确描述地球内部质点在引潮力的作用之下的（相对于地球本体的）运动规律。另一方面也可以看出，给定了引潮力之后，潮汐效应的大小完全取决于地球本身的物理性质（诸如物质组成，物质状态，密度等）以及几何性质（诸如分层结构，各种形状等）。

对于实际的地球来说，它并非向着月球的中心运动，而是绕地月质心运行。在地心惯性系中考察，若不考虑电磁影响，地球上任意一点都受到四种力作用，即地球自身引力、地球自转离心力、月球的引力以及由地球绕地月质心而引起的惯性离心力。地球自身引力和地球自转离心力我们可以单独考虑（即通常意义下的重力场），因而可将这两项抛开。剩下着重要考虑的是月球引力以及由地球绕地月质心而引起的惯性离心力。这时，可将地球设想成相对于惯性空间没有自转的绕地月质心公转的星球。因此，地球处于平动状态，地球上任意一点 A 所受到的惯性离心力都是相同的，但它所受月球的引力作用不同，可由下式表示

$$\boldsymbol{F}_A=GM_m\boldsymbol{e}_l/l^2$$

其中：G 是引力常数，M_m 是月球的质量，l 是 A 至月心的距离，$\boldsymbol{e}_l$ 是 A 至月心方向的单位矢量。如果将月球对地心的引力

$$\boldsymbol{F}_0=GM_m\boldsymbol{e}_m/r_m^2$$

选为一个对比标准，其中 r_m 是地心 O 至月心的距离，$\boldsymbol{e}_m$ 是 O 至月心方向的单位矢量，那么，A 点的引潮力就可以用下式来表示

$$\boldsymbol{F}_t=\frac{GM_m\boldsymbol{e}_l}{l^2}-\frac{GM_m\boldsymbol{e}_m}{r_m^2} \tag{2.23}$$

前面已经指出，正是由于引潮力的作用，导致了潮汐效应。但潮汐效应的大小，则与地球本身的物质结构及物质分布密切相关。

2.3.2.2 引潮位

方程（2.23）是一个矢量方程，处理起来比较复杂。为了寻求简单表示，我们引进如下的位函数

$$U_t(P) = GM_m\left(\frac{1}{l} - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_m}{r_m^3}\right) \tag{2.24}$$

称之为引潮位，其中 $\boldsymbol{r}$ 是地心（也是坐标系原点）至质点 A 的向径。引潮力可以通过引潮位求出

$$F_t = -\nabla U_t \tag{2.25}$$

其中：∇是梯度算符。这就是说，只要求出了引潮位 U_t，即可根据式（2.25）求出引潮力。根据引潮位可定义潮汐大地水准面，这将在后面讨论。

2.3.2.3 潮汐分析

为了应用方便起见，可将地心处的引潮位设为零。这样，方程（2.24）即可改写成

$$U(P) = GM_m\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{r_m} - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}_m}{r_m^3}\right) = GM_m\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{r_m} - \frac{r\cos z}{r_m^2}\right) \tag{2.26}$$

其中：z 是 A 点的月球天顶距。$1/l$ 可用 Legendre 函数展开

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{r_m^{\,n+1}}P_n(\cos z) \tag{2.27}$$

其中：$P_n(\cos z)$ 是 Legendre 多项式。将上式代入引潮位的表达式（2.26）之中，注意到 $P_0(\cos z)=1$，$P_1(\cos z)=\cos z$，即可得展开表达式

$$U_t = GM_m\sum_{n=2}^{\infty}\frac{r^n}{r_m^{n+1}}P_n(\cos z) \equiv \sum_{n=2}^{\infty}U_m \tag{2.28}$$

其中：

$$U_m = GM_m\frac{r^n}{r_m^{n+1}}P_n(\cos z),\ n \geqslant 2 \tag{2.29}$$

通常只需取至二阶项，有时也会用到三阶项。若引进（月球）Doodson 常数 D_m（胡明城和鲁福，1994）

$$D_m = \frac{3}{4}GM_m\frac{R^2}{c_m^3} \tag{2.30}$$

则有

$$U_{t2} = \frac{2}{3}D_m\left(\frac{c_m}{r_m}\right)^3\left(\frac{r}{R}\right)^2(3\cos^2 z - 1)$$

$$U_{t3} = \frac{2}{3}D_m\left(\frac{c_m}{r_m}\right)^4\left(\frac{r}{R}\right)^3\left(\frac{R}{c_m}\right)(5\cos^3 z - 3\cos z) \tag{2.31}$$

其中：R 是地球的平均半径；c_m是地球中心至月球中心的平均距离。

由式(2.30) 可以计算出月球的 Doodson 常数为（管泽霖和宁津生，1981）

$$D_m = 26277\text{cm}^2/\text{s}^2$$

而太阳的 Doodson 常数为

$$D_s = 0.45990D_m = 12085\text{cm}^2/\text{s}^2$$

2.3.2.4 平衡潮影响

所谓平衡潮，是指不考虑地球形变时的潮汐影响，也可称为理论潮汐影响，因为这时可以给出理论计算值。一旦涉及地球的形变，情况将非常复杂，难以给出理论计算值。一个重要的原因是我们对地球内部的了解还十分有限，即便知道了潮汐力，也无法精确计算出整个地球的形变（对潮汐力的响应）。通常，地球的形变只能通过实际观测来了解，而且也只限于地球表面或地面附近的形变，而地球内部的形变过程只能通过形变理论（弹性力学，流体力学等）来推测。为了不使问题一开始就复杂化，我们先假定在潮汐力的作用下地球不发生形变，在此情形下考察潮汐作用会带来什么新的效应。这就是理论潮汐（即平衡潮）的由来。

首先我们讨论带有潮汐影响的大地水准面，而假定地球并不发生变形，此即刚性地球假设。本来，如果没有潮汐影响，大地水准面可以用重力等位面方程

$$W(P)=C \tag{2.32}$$

来表示。其中 $W(P)$ 是地球的重力位，C 是大地水准面位常数。今由于潮汐位的影响，实际的含潮汐位的大地水准面（以后简称平衡潮大地水准面或潮汐大地水准面）需用如下的等位面方程

$$W+U_t=C' \tag{2.33}$$

来表示，其中 C' 是平衡潮大地水准面的位常数。普通大地水准面与平衡潮大地水准面之间的差异正好是潮汐位 U_t。按著名的 Bruns 公式，平衡潮大地水准面与普通大地水准面之间的距离可以表示成

$$\zeta_t=U_t/g \tag{2.34}$$

其中：g 取地球的平均重力。我们将 ζ_t 称为平衡潮高，它是假想地球在引潮位作用下并未发生变形时平衡潮大地水准面与普通大地水准面之间的差异。但实际的地球在引潮位作用下会发生变形，这种变形会导致一种附加位 U'，而附加位的大小与地球变形的程度有关。假如我们知道了地球如何变形，理论上即可求出附加位。于是，带有潮汐的大地水准面可以表示成（申文斌等，2003）

$$W+U_t+U'=C_t \tag{2.35}$$

其中：C_t 是相应的位常数。同时，由上式所决定的最接近于平均海水面的等位面被称为潮汐大地水准面。

我们仍然回到假想的刚性地球。在地心惯性系中，任意一个空间固定质点，若不考虑地球引力，它都会受到两个力的作用：月球引力和地球绕地月质心的惯性离心力。由于惯性离心力的大小正好是 $-GM_m e_m/r_m^2$（地球质心单位质量受到的月球引力），因而上述质点所受的合力仍然由引潮力表达式（2.23）给出。这种引潮力叠加到无潮汐力时的地球重力场上，改变了地球重力场。这种假定无潮汐形变影响的刚性地球的引潮力称为地球重力场理论潮汐。显然，理论引潮位又可用式（2.26）来表示。对于实际的地球来说，在引潮力作用下，地球发生形变，导致附加的潮汐力，这一部分附加的潮汐力连同引潮力一起，可称为地球重力场潮汐，它与地球重力场理论潮汐的区别就在于二者相差一个由于地球形变产生的潮汐力。

理论潮汐可沿（球面坐标系的）径向和横向分解，也可沿地球重力位等位面的法向（地球重力方向，即垂线方向）以及与等位面相切的水平方向分解，分别称之为重力方向理论潮汐和水平方向理论潮汐。水平方向理论潮汐又可分解为子午方向理论潮汐和卯酉方向理论潮

汐。上述潮汐或其分量之所以称为理论潮汐，即平衡潮，是指刚体地球假设下的潮汐效应，没有考虑形变附加潮汐。垂线方向理论潮汐又称为（理论）重力固体潮，而水平方向理论潮汐又称为（理论）地倾斜固体潮。前者是指在垂线方向上的引潮力分量，后者是指重力与引潮力的合力方向对原重力垂线方向的偏离，即水平面倾斜。在不考虑地球形变的前提下，无论是重力固体潮还是地倾斜固体潮，均可给出计算值。由于理论计算值没有考虑附加位以及附加潮汐，因而计算值与实际观测值必有差异。反过来，通过实际观测的反馈信息，利用计算值与观测值之间的差异可以反演地球形变机制。

由于潮汐效应本身不大，所有潮汐效应合起来最大幅度约为 300 微伽（$1\mu\text{Gal} = 10^{-8}\text{m/s}^2$）（管泽霖和宁津生，1981；胡明城和鲁福，1994），重力固体潮可取引潮力的径向分量

$$g_t = -\frac{\partial U_t}{\partial r} \tag{2.36}$$

而地倾斜固体潮的两个分量可分别表示成（管泽霖和宁津生，1981）

$$g_{tx} = -\frac{\partial U_t}{r\partial\phi}, g_{ty} = -\frac{\partial U_t}{r\cos\phi\partial\lambda} \tag{2.37}$$

其中：ϕ 和 λ 分别是天文纬度和天文经度；x 和 y 分别表示子午圈和卯酉圈方向。

于是，由理论潮汐而引起的垂线偏差的变化为

$$\xi_t = \frac{g_{tx}}{g}, \eta_t = \frac{g_{ty}}{g} \tag{2.38}$$

其中：ξ_t 和 η_t 分别是由理论潮汐引起的垂线偏差的变化在子午方向和卯酉方向的分量，可分别称之为（理论）潮汐子午垂线偏差和潮汐卯酉垂线偏差。在实际应用中，为了能对式（2.37）进行具体运算，需要将月球的天顶距 z 表示成测站纬度 ϕ、月球的时角 t_m 以及赤纬 δ_m 的函数。根据球面三角函数关系，可以写出（张国民等，2001）

$$\cos z = \sin\phi\sin\delta_m + \cos\phi\cos\delta_m\cos t_m \tag{2.39}$$

根据 Legendre 多项式的加法定理（Heiskanen and Moritz，1967）

$$P_n(\cos z) = P_n(\sin\phi)P_n(\sin\delta_m) + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(n-k)!}{(n+k)!}[P_n^k(\sin\phi)P_n^k(\sin\delta_m)\cos kt] \tag{2.40}$$

其中：$P_n^k(\sin\phi)$ 是 Legendre 缔合函数。由式(2.28)、(2.29)、(2.37) 以及式(2.40) 得

$$\begin{aligned} g_t &= -\frac{\partial U_t}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[GM_m\sum_{n=2}^{\infty}\frac{r^n}{r_m^{n+1}}P_n(\cos z)\right] \\ &= -\frac{GM_m}{r_m^2}\sum_{n=2}^{\infty}n\left(\frac{r}{r_m}\right)^{n-1}\left[P_n(\sin\phi)P_n(\sin\delta_m)\right. \\ &\quad \left.+ 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^k(\sin\phi)P_n^k(\sin\delta_m)\cos kt\right], \\ g_t &= -\frac{\partial U_t}{r\partial\phi} = -\frac{\partial}{r\partial\phi}\left[GM_m\sum_{n=2}^{\infty}\frac{r^n}{r_m^{n+1}}P_n(\cos z)\right] \\ &= -\frac{GM_m}{rr_m}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r_m}\right)^n\left[\frac{\partial P_n(\sin\phi)}{\partial\phi}P_n(\sin\delta_m)\right. \\ &\quad \left.+ 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\frac{\partial P_n^k(\sin\phi)}{\partial\phi}P_n^k(\sin\delta_m)\cos kt\right] \end{aligned}$$

$$g_t = -\frac{\partial U_t}{r\cos\phi\partial\lambda} = -\frac{\partial}{r\cos\phi\partial\lambda}\left[GM_m\sum_{n=2}^{\infty}\frac{r^n}{r_m^{n+1}}P_n(\cos z)\right]$$

$$= \frac{2GM_m}{rr_m\cos\phi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r_m}\right)^n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^k(\sin\phi)P_n^k(\sin\delta_m)\frac{\partial\cos kt_m}{\partial\lambda} \tag{2.41}$$

其中:时角 t_m 可以表示成测站经度 λ 的函数。

以上以月球为例讨论了各种潮汐效应。由太阳以及其他行星引起的潮汐效应与月球的完全类似。

2.3.2.5 Love-Shida 数

为了建立引潮力与真实地球的响应关系，Love(1909) 和 Shida(1912) 分别提出了 Love 数 h、k 和 Shida 数 l，可统称为 Love-Shida 数 (h,k,l)，或简称 Love 数。

Love 数 h 被定义为地面上一点的真实潮汐高 ζ_r 与该点的理论固体潮高 ζ_t 之比:

$$\zeta_r = h\zeta_t = h\frac{U_t}{g} \tag{2.42}$$

也可将 Love 数 h 定义为一个级数序列

$$h = \sum_{n=2}^{\infty}h_n$$

其中第 n 阶 Love 数被定义为对应于潮汐的级数展开式中的第 n 阶的实际潮汐高与相应的理论固体潮高之比:

$$\zeta_{rn} = h_n\zeta_{tn} = h_n\frac{U_{tn}}{g},$$

于是

$$\zeta_r = \sum_{n=2}^{\infty}h_n\frac{U_{tn}}{g} \tag{2.43}$$

Love 数 K 被定义为由地球的形变而产生的附加位 U' 与潮汐位 U_t 之比:

$$U' = kU_t \tag{2.44}$$

同理，将 Love 数 k 看做一个级数序列，又可表示成

$$U' = \sum_{n=2}^{\infty}k_nU_{tn} \tag{2.45}$$

Shida 数 l 被定义为实际潮汐的水平分量 u_r 与理论潮汐的水平分量 u_t 之比，同样可用级数序列表示

$$u_r = lu_t = \sum_{n=2}^{\infty}l_nu_{tn} \tag{2.46}$$

其子午圈方向和卯酉圈方向的分量为

$$u_{rx} = lu_{tx} = l\frac{\partial U_t}{g_t\partial\varphi}, u_{ry} = lu_{ty} = l\frac{\partial U_t}{g_t\cos\varphi\partial\lambda} \tag{2.47}$$

Love 数 k 不能通过直接观测确定，Love 数 h 和 Shida 数 l 则可利用伸缩仪（或其他应变仪）分别测定或测定二者的组合，其原理是利用位移与应变之间的关系(方俊，1984)。

如果给定了 Love 数，则可根据引潮力及引潮位求出地球的响应（变形）以及真实的潮汐效应。如果 Love 数为零，则表示完全刚性地球，这时，尽管存在引潮力，但地球固体部分没有引潮效应。如果 Love 数为 1，则表示在引潮力作用之下，地球的形变就如同理想流体地

球。对于实际地球而言，它并非完全刚体，也非理想流体，因而 Love 数总是介于 0 和 1 之间。由方程（2.42）至方程(2.47）可以看出，Love 数从二阶以上开始才起作用（即零阶和 1 阶 Love 数没有什么意义）。Kelven 曾经证明，如果地球是不可压缩的均质弹性体，则有如下关系式（张国民等，2001）

$$h_2 = \frac{5}{2q}, \quad k_2 = \frac{3}{5}h_2, \quad l_2 = \frac{3}{10}h_2 \tag{2.48}$$

其中 q 是无量纲参数，由下式给出

$$q = 1 + \frac{19\mu}{2\rho g R} \tag{2.49}$$

其中 R,ρ,g 分别是地球的平均半径、平均密度以及地面上的平均重力。另外，拉梅系数 μ 和 λ(弹性力学惯用符号，注意与经度符号的区别）与纵波波速 V_P 和横波波速 V_S 之间满足如下关系（钱伟长和叶开沅，1980）

$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \qquad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{2.50}$$

V_P 和 V_S 可根据地震波资料确定。如果知道了地球密度分布模型，则可根据上式确定拉梅系数，再由式(4.49）以及式(4.48）求出二阶 Love 数。另一方面，利用固体潮观测以及形变观测并根据固体潮分析，也可以求出 Love 数。根据大量的实际资料分析，所确定的二阶平均 Love 数的数值如下（张国民等，2001）

$$h_2 = 0.638, \quad k_2 = 0.30, \quad l_2 = 0.08 \tag{2.51}$$

2.3.2.6 Love-Shida 数的组合

如果我们有办法求出 Love-Shida 数(k,h,l)，即可根据引潮力的大小求出地球的响应。为了较精确地确定这些参数，就需要大量的观测数据进行最佳拟合。Shida 数 l 和 Love 数 h 可直接观测，Love 数 k 无法直接观测，通常可观测它们的多种线性组合，再联合求解 h,l 和 k。

首先考虑通过地面一点 A 的水准面(重力等位面)的变化。在引潮位 U_t 和附加位 U' 的影响之下，该点大地水准面上升的高度为

$$\zeta = \frac{U_t + U'}{g} = \frac{(1+k)U_t}{g} \tag{2.52}$$

上式可直接由 Bruns 公式得到。但由于在引潮力的作用之下地球发生形变，A 点本身将会变化一个高度

$$\zeta_1 = \frac{hU_t}{g}$$

设 A 点是海岸边一个验潮站，则实际上能观测到的潮高为 $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_1$。于是

$$\Delta\zeta = \frac{(1+k-h)U_t}{g} \tag{2.53}$$

是可观测量。若令 $\gamma = 1 + k - h$，则有

$$\Delta\zeta = \frac{\gamma U_t}{g} \tag{2.54}$$

方程(2.54)的左边是验潮站的观测值，右边是理论计算值，由此可求出参数 γ，通常称为海潮潮汐因子，这实际上也就意味着求出了 $k-h$。由于 $\Delta\zeta$ 表示一点水准面的高程变化，

$g\Delta\zeta$ 即表示相应的位差，也表示了在引潮力作用下实际地球表面的重力位变化

$$\Delta W = \gamma U_t \tag{2.55}$$

但 ΔW 在陆地难以观测，因此上式不能用于确定 γ。

如果考虑垂线偏差的变化，则可得到如下结果（胡明城和鲁福，1994）：

$$\xi = \gamma \frac{\partial U_t}{gR\partial\phi}, \quad \eta = \gamma \frac{\partial U_t}{gR\cos\phi\partial\lambda} \tag{2.56}$$

其中 ξ 和 η 分别为地倾斜固体潮的子午分量和卯酉分量。因此式中的 $\gamma = 1 + k - h$ 又称为地倾斜固体潮特征参数。ξ 和 η 可用水平摆倾斜仪精确测定，因此由式(2.56)也可确定 γ。

以上通过实际潮高与理论潮高之比而引进的地倾斜固体潮特征参数 γ，同时表征了实际地球的地倾斜固体潮与相应的理论（地倾斜固体潮）值之比。γ 一般在 0.6～0.7 之间，因而通常又称之为缩小特征数。无论是采用方程(2.54)还是方程(2.56)均可测定 γ。至此，我们只能求出 γ，尚不能求出 k 和 h。为此，需要考虑重力的变化。

由于引潮力的作用，重力的（垂直方向的）变化 δg 由三部分组成：理论引潮力垂直分量 δg_1，由地球形变产生的附加位引起的重力变化的垂直分量 δg_2，以及由地球表面的升降而引起的重力变化 δg_3，同样忽略径向与垂线方向的差别，则有

$$\delta g = \delta g_1 + \delta g_2 + \delta g_3 = -\frac{\partial U_t}{\partial r} - \frac{\partial U'}{\partial r} + \zeta_1 \frac{\partial g}{\partial r} \tag{2.57}$$

若只精确到二阶项，同时假定（胡明城和鲁福，1994）

$$U' = \frac{R^5}{r^5} k U_t$$

则可得到如下表达式

$$\delta g = -\alpha \frac{2U_t}{R} = \alpha \delta g_1 \tag{2.58}$$

其中：

$$\alpha = 1 + h - \frac{3}{2}k \tag{2.59}$$

反映了实际地面重力变化与理论引潮力（即平衡潮理论值）之比，称为重力固体潮特征数，或称重力固体潮的潮汐因子，或扩大特征数，因 α 通常在 1.15 与 1.20 之间。用高精度重力仪(精度高于 10^{-15}T) 可以测定 δg，即 α 可通过重力观测确定。

由方程 (2.58)可求出 α，因而也就求出了 $h - \frac{3}{2}k$，再联立由 γ 确定的 $k - h$，即可解得 k 和 h。至于 Shida 数 l，可由应变仪测定，或直接按定义式 (2.46) 求出，或者写成如下显式

$$X_1 = l \frac{\partial U_t}{g\partial\phi}, \quad X_2 = l \frac{\partial U_t}{g\cos\phi\partial\lambda} \tag{2.60}$$

这里，X_1 和 X_2 分别为在引潮力作用之下实际地球表面水平位移的子午分量和卯酉分量，其测定精度的要求优于毫米级，目前 GPS 还难以达到这一精度水平，但有良好的发展前景和应用潜力。

§2.4 地球自转及相关问题

在宇宙之中，太阳系是极微小的一个成员。地球绕太阳公转，其公转轨迹即为黄道，包

含了黄道的平面称为黄道面，与黄道面垂直而又通过太阳中心的轴称为黄极轴；地球还有自转，与自转方向一致而又通过地心的轴线称为地球自转轴，与自转轴垂直而又通过地心的平面称为赤道面，它与假想的圆形地球的表面的交线即为赤道。

2.4.1 岁差、Chandler 摆动、章动和地极运动

为了描述方便，我们假想在宇宙中存在一个绝对静止的参考系 k_0。如果地球是刚性均质圆球，那么它的自转轴方向在 k_0 中是固定的。然而，地球既非刚性也非均质，更非圆球。于是，地球自转轴的方向就会发生变化，其变化规律极为复杂。但无论多么复杂，均可通过三个 Euler(欧拉) 角来描述。

选定一个准惯性参考系 k，其原点 O 与地心（即地球质心）重合，但 k 与 k_0 之间没有相对旋转运动。在 k 中建立笛卡儿直角坐标系 $O-\xi\eta\zeta$，它的三个坐标轴分别指向遥远的恒星，其中，取 $O\zeta$ 轴的方向与假想的地球自转的平均方向一致；这时，另外两个轴将位于假想的平均赤道面内。这里之所以采用“假想”，是因为从理论上并不能真正求出平均自转方向。以前的任意一段历史时间内的平均自转方向都不可能是未来的平均自转方向，此因自转角速度随时间演化，而且是非线性的。于是，我们规定（协议）一个自转平均方向，它是假想的、在未来无限长时间内的地球自转的平均方向。按上述方式定义的笛卡儿直角坐标系 $O-\xi\eta\zeta$ 称为地心准惯性协议坐标系。说 $O-\xi\eta\zeta$ 是准惯性的，是指它并非真正的惯性系，这是因为它在绝对静止参考系 k_0 中并非做匀速直线运动。

选取与地球固结在一起的地心地固参考系 k'，其原点与地心重合。在 k'中建立笛卡儿直角坐标系 $O-xyz$，其中的第三个轴 Oz 与地球的第三个转动惯量主轴重合，Ox 和 Oy 轴则与 Oz 轴保持相互垂直，构成右手笛卡儿直角坐标系。将 Oz 方向规定为地球的本体自转方向，与 Oz 垂直而又通过地心的平面称为地球的本体赤道面，本体赤道面与假想的圆形地球表面的交线即为本体赤道。

地心地固坐标系 $O-xyz$ 相对地心准惯性坐标系 $O-\xi\eta\zeta$ 有旋转运动。本体赤道面 $O-xy$ 与平均赤道面 $O-\xi\eta$ 有一个交线，从原点 O 沿上述交线的一方引出一条射线，称之为节线 ON，节线 ON 与 $O\xi$ 之间的夹角称为进动角，用 ϕ 表示；瞬时轴 Ox 与 ON 之间的夹角称为自转角，用 ψ 表示；$O\zeta$ 与 Oz 之间的夹角称为章动角，用 θ 表示，参见图 2.1。自转角 ψ、进动角 ϕ 和章动角 θ 通称为 Euler 角，是由 Euler 引进的。三个 Euler 角可以完全描述任意一个刚体的旋转运动。一个刚体的旋转运动完全由 Euler 运动学方程和 Euler 动力学方程确定。

如果把地球看做关于 Oz 轴对称的刚体（这时 Oz 轴与刚体的一个主惯性轴重合，而 Ox 和 Oy 轴则分别与另外两个主惯性轴重合），同时不考虑日月星辰对地球的引潮力作用，则地球的旋转运动比较简单，很容易找到 Euler 方程的解。这时，章动角保持不变（参见 2.4.2 节），自转角和进动角则均匀变化。章动角的变化率称为章动角速度。在这里的特殊情形，章动角速度为零，因而不存在章动。自转角 ψ 的变化率即为自转角速度，大约每 24h 完成一个周期，这就构成了我们通常所说的“天”。进动角 ϕ 的变化率称为进动角速度，大约每 305d 完成一个周期。将自转角速度和进动角速度看做矢量，其矢量的合成（矢量之和）即为地球的瞬时旋转角速度 Ω，它的方向与自转角速度的方向（即 Oz 轴方向）并不一致，此因进动角速度的叠加影响。于是，瞬时旋转角速度 Ω 便绕着 Oz 轴作圆周运动，其周期即为上述进动周期 305d。这一效应，即 Euler 进动，或称为 Chandler 摆动。有的文献把上述 Chandler 摆动称为 Euler 自由章动（Lambeck，1980），实属一种误解。其实，章动角速度为零，不存在

自由章动（在刚性地球为旋转对称的前提之下）。另外，Chandler 摆动这一名称也并非名副其实，实际上理应称为 Chandler 进动，因为这一运动是完全规则的圆周运动，属于刚体地球的进动效应。但由于历史的原因，我们仍然沿用 Chandler 摆动这一名称。不过，同时应该清楚 Chandler 自由摆动即 Chandler 自由进动，或 Euler 自由进动，正如 Euler 本人所称谓。

然而，实际上的 Chandler 摆动（进动）周期大约为 430d，此因真实的地球并非刚体、并非关于 Oz 轴对称，而且存在日月及其他行星的引潮力之故。

假定我们将 Oz 轴正向与地球表面的交点规定为本体北极（反向交点即为本体南极，通称本体地极，简称地极），并且假定 Oz 轴与地球自转角速度的方向一致，而自转角速度的方向又是其中的一个惯性主轴，那么，在刚性地球的假定之下，（本体）北极在地球表面的位置就保持不变。由于刚性地球的总的角动量 J 在惯性空间中是恒定矢量，若将 $O\zeta$ 轴选为角动量 J 方向，则在准惯性系 $O-\xi\eta\zeta$ 中考察，地极就在准惯性系 $O-\xi\eta\zeta$ 中作圆周运动（周期约 305d），可称之为地极的进动。于是，本体赤道也随地极绕 $O\zeta$ 轴进动。

实际上，由于地球形状的可变性以及地球自身物质的可迁移性（诸如板块运动、地幔对流、海水变迁、河水改道、降雨降雪各地不等、冰山迁移及融化，等等），地极即使相对地球本体来说也不会固定不变（实际上在地球表面找不到任何一点是固定不变的），而是处于运动状态（尽管这种运动非常缓慢），这种效应可称为地极相对于本体地球的变迁，简称地极的变迁。将地极的进动和地极的迁移合而为一，通称地极的运动，简称极移。

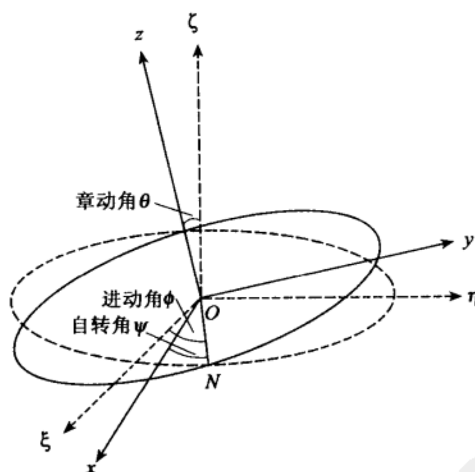


图 2.1　三个 Euler 角示意图

对于实际的地球来说，它是一个弹塑性体（其内尚有液态外核）。在由自转运动而引起的离心力的作用之下，本体赤道向外隆起。本体赤道面的平均位置即为平赤道面，而平赤道面正好垂直于 $O\zeta$ 轴。实际上 $O\zeta$ 轴就是地球的平均旋转轴。平赤道面与黄道相交于两点，称之为春分点和秋分点。由于 $O\zeta$ 与黄极轴的夹角（即黄赤交角）为 23.5°，太阳和月球就对地球施加了一个外力矩（此因本体赤道向外隆起之故）。由于上述外力矩的作用，平赤道面将产生一进动，其量值较小，大约每 25800a 完成一个周期，这也是春分点或秋分点的运动周期。于是，春分点每年的移动量为 $2\pi/25800$（弧度单位），相当于每年移动约 50.2″，这就是

通常所说的岁差。国际天文联合会在1976年决定采用以2000a为标准历元的岁差常数P_r(胡明城和鲁福，1994)：

$$P_r = 5029.0966''/\text{cy}$$

另一方面，由于上述外力矩作用，章动角θ也会发生变化，变化周期大约为18.6a。也就是说，在Chandler摆动的基础上，还叠加有一个微小的波浪式运动。

现在可以对岁差、章动、Chandler摆动（实际上是Euler进动)、极移等概念简单总结如下：设想地球是刚性旋转对称椭球体，地球旋转角速度的平均方向环绕黄极轴的运动称为岁差(约50.29″/yr，这实际上是进动)；地球瞬时旋转角速度（矢量）环绕平均角速度（矢量）方向的运动称为Chandler摆动（实际上是Euler进动，周期为305d，但对于实际地球，周期大约430d)；地球瞬时旋转角速度（矢量）来回偏离平均角速度（矢量）方向的波浪式运动称为章动（周期约18.6a)；地球极点（主惯量轴与地球表面的交点）相对于瞬时极点（地球瞬时旋转轴与地面的交点）的运动称为极移。

2.4.2 地球自转理论概述

2.4.2.1 刚性地球的旋转运动

在这一小节我们只考察刚性地球的旋转运动。一个绕定点（原点）作旋转运动的刚体可以完全由Euler运动学方程和Euler动力学方程来描述。Euler运动学方程可以表示成（周衍柏，1984；强元棨，2003)

$$\begin{aligned}
\omega_X^1 &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\
\omega_X^2 &= \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\
\omega_X^3 &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

其中ψ,φ,θ是三个Euler角(自转角、进动角和章动角)，ω_X^i表示绕地心地固参考系Ox^i轴的旋转角速度($x^1=x,x^2=y,x^3=z$)，$\omega_X^i\equiv\omega_{Xi}$。在准惯性坐标系$O\xi^i$中，Euler运动学方程可表示成

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi \\
\omega^2 &= -\dot{\psi}\sin\theta\cos\phi + \dot{\theta}\sin\phi \\
\omega^3 &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

ω^i表示绕$O\xi^i$轴的旋转角速度($\xi^1=\xi,\xi^2=\eta,\xi^3=\zeta$)，$\omega^i\equiv\omega_i$。式(2.62)是经常用到的方程。

Euler动力学方程则可表示成(Munk and MacDonald 1960；Lambeck，1980；申文斌，2005)

$$I^{ij}\dot{\omega}_j + \varepsilon_k^{ij}\omega_j I^{kl}\omega_l = L^i \qquad (i,j,k=1,2,3) \tag{2.63}$$

其中$\varepsilon_k^{ij}\equiv\varepsilon^{ijk}$是Levi-Civita符号，当$ijk$是123的偶置换时为1，奇置换时为-1，其他情形为零。按照爱因斯坦求和约定，一对上下相同的指标表示从1到3求和，其他情形均不求和。I^{ij}是二阶（逆变）惯量张量，其定义如下

$$\begin{aligned}
I^{ii} &= \int_\Omega [(x^j)^2 + (x^k)^2]\rho\,\mathrm{d}\tau, \\
I^{ij} &= -\int_\Omega x^i x^j \rho\,\mathrm{d}\tau \qquad (i,j,k\ \text{互不相同})
\end{aligned} \tag{2.64}$$

其中I^{ii}是绕Ox^i轴的转动惯量($x^1=x,x^2=y,x^3=z$)，而$-I^{ij}(i\neq j)$是惯量积，ρ是地球的物质密度，x^i是积分元$\mathrm{d}\tau$的坐标。式（2.64）可更简明地写成：

$$I^{ij} = \int_{\Omega}(x^k x_k \delta^{ij} - x^i x^j)\rho \mathrm{d}\tau \tag{2.65}$$

其中 δ^{ij} 是 Kronecker 符号。通常，选取三个坐标轴的方向与主转动惯量轴的方向一致，这时，Euler 动力学方程（2.63）可以简化为（此时 $I^{ij}=0, i\neq j$）如下形式：

$$I^{ii}\dot{\omega}_i - (I^{jj} - I^{kk})\omega_j\omega_k = L^i \qquad (i,j,k=1,2,3,i、j、k\text{ 互不相同,不求和}) \tag{2.66}$$

若令 $I^{11}=A, I^{22}=B, I^{33}=C$，则方程(2.66)可以表示成如下形式：

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B-C)\omega_2\omega_3 &= L_1 \\ B\dot{\omega}_2 - (C-A)\omega_3\omega_1 &= L_2 \\ C\dot{\omega}_3 - (A-B)\omega_1\omega_2 &= L_3 \end{aligned} \tag{2.67}$$

其中：$L^i \equiv L_i$。

如果假定地球关于第三个轴 Oz 旋转对称，则有 $A=B$，方程(2.67)可以简化为

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (A-C)\omega_2\omega_3 &= L_1 \\ A\dot{\omega}_2 - (C-A)\omega_3\omega_1 &= L_2 \\ C\dot{\omega}_3 &= L_3 \end{aligned} \tag{2.68}$$

我们首先讨论不存在外力矩的情形，亦即先不考虑日月行星对地球的作用。这时，方程（2.68）具有如下的简明形式（自由 Euler 动力学方程）：

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 &= (A-C)\omega_2\omega_3 \\ A\dot{\omega}_2 &= (C-A)\omega_3\omega_1 \\ C\dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.69}$$

这属于 Euler-Poinsot 情形，其解由 Poinsot(1851)给出（参见周衍柏，1984，或强元棨，2003）。式（2.69）中的第三个方程有一个明显解：

$$\omega_3 = \Omega = \text{常数} \tag{2.70}$$

若令

$$\sigma = (C-A)\Omega/A \tag{2.71}$$

则不难求出方程组(2.69) 中的前面两个方程的解：

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0\cos(\sigma t+\varepsilon) \\ \omega_2 &= \omega_0\sin(\sigma t+\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.72}$$

其中 ω_0 和 ε 均为常数。由式(2.69)、(2.70)、(2.72)可知，地球旋转的总的角速度 ω 的模为常数，但方向有变化；地球旋转角速度（此即地球瞬时旋转角速度）绕 Oz 轴作圆周运动，其周期为

$$\tau = 2\pi/\sigma \tag{2.73}$$

由于 $\sigma=\Omega(C-A)/A$ 大约是 $2\pi/(305\mathrm{d})$，故而求出 $\tau=305\mathrm{d}$，此即 Euler 自由进动，或称 Chandler 自由进动（通称 Chandler 自由摆动）。进动幅度（振幅）由 ω_0 表征，基于方程（2.72），有

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}$$

尽管地球的旋转角速度有变化，但地球的角动量 J 在惯性空间中是一个恒定矢量。我们取 $O\zeta$ 的方向与 J 方向一致，则可列出如下方程：

$$\begin{aligned} J\sin\theta\sin\phi &= A\omega^1 \\ J\sin\theta\cos\phi &= A\omega^2 \\ J\cos\theta &= C\Omega \end{aligned} \tag{2.74}$$

由上述方程中的第三式知 θ 是不变量，也就是说，章动角速度为零，不存在章动。令 $\theta=\theta_0$，将式(2.72)代入式(2.74)即得如下结果(注意到 $\omega_0=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}$)

$$
\begin{aligned}
&J\sin\theta_0=A\omega_0\\
&\phi=\pi/2-(\sigma t+\varepsilon)\\
&J\cos\theta_0=C\Omega
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

由上式并联合 Euler 运动学方程(2.62)，即可求得如下结果

$$
\begin{aligned}
&\cos\theta_0=C\omega_0/J\\
&\phi=\pi/2-(\sigma t+\varepsilon)\\
&\psi=\sec\theta_0(\Omega+\sigma)t+\psi_0
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

由上式知，进动角速率和自转角速率分别为 $-\sigma$ 和 $\sec\theta_0(\Omega+\sigma)$。由此可以看出，地球瞬时轴的进动是逆向进行的，进动周期由式(2.71)给出，即大约305d。这是理论估算值，因为真正说来，我们对 A 和 C 的了解并不完全，这当然是由于对地球物质密度的了解还远远不够。另一方面，即使知道 A 和 C 的精确值，其结论也不能代表真实情况，因为地球并非刚体。由于 θ_0 很小(因为进动振幅大约只有 $1/R$ 弧度，R 是地球半径，以 m 为单位)，σ 又远远小于 Ω，因而自转周期大约为 $2\pi/\Omega$。

若考虑日月引力，刚性地球将受到外力矩的作用，此因黄赤交角约23.5°，白赤交角约5°，赤道隆起部分受到不对称的力的作用。这时，需要求解方程(2.68)，这属于 Lagrange-Poisson 情形。由于首先必须计算出外力矩，然后再解 Euler 动力学方程(2.68)和 Euler 运动学方程(2.62)，整个求解过程比较繁杂，可参阅 Woolaad (1953) 或 Murray (1978)。

本来，若没有外力矩的作用，刚性旋转地球的瞬时轴没有章动，只有自由进动，而瞬时轴的平均位置是恒定的；但由于外力矩的作用，便导致了瞬时轴的章动，其周期大约18.6a。同时，瞬时轴除了绕 Oz 轴的进动即 Chandler 摆动(它的周期已不同于 Chandler 自由进动的周期)之外，还有一个附加的由外力矩作用而引起的更大范围的进动效应，这实际上也即平均自转轴绕黄极轴的进动效应，其周期大约为25800a，这也是春分点或秋分点运动的周期。于是，春分点每年的移动量为 $2\pi/25800$ 弧度(相当于50.2角秒)，此即岁差。

2.4.2.2 真实地球的旋转运动

由于地球并非刚体，前一小节关于刚体地球旋转的描述只能作为一种近似描述。真实地球的旋转与刚体地球的旋转存在如下差异(Lambeck, 1980)：

(1)惯量张量 I^{ij} 与时间有关。

(2)不存在相对于地球完全固定的坐标系。

这时，总的角动量可表述为

$$
J^i=I^{ij}(t)\omega_j(t)+\lambda^i(t) \tag{2.77}
$$

其中：

$$
\lambda^i(t)=\int_\tau\rho(t)\varepsilon^{ijk}x_ju_k\mathrm{d}\tau \tag{2.78}
$$

是非刚性地球物质相对于地固坐标系变化的小量，ρ 是物质的密度，u_i 是质量元 $\rho\mathrm{d}\tau$ 在坐标系 x^i 中的速度。对于任意一个逆变矢量 A，可用地固坐标系的基底 e_i 表示出来(注意 e_i 是基矢)

$$
A=A^ie_i \tag{2.79}
$$

在准惯性系 $O-\xi\eta\zeta$ 中，e_i 随时间变化。在上式两边对时间求导数，即得如下结果（周衍柏，1984；申文斌，2005）

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}A^i}{\mathrm{d}t}e_i+\varepsilon^i_{jk}\omega^j A^k e_i \tag{2.80}$$

其中：$\varepsilon^i_{jk}\equiv\varepsilon_{ijk}$。将上式中的 A 替换为角动量 J，同时应用角动量定理 $\mathrm{d}J/\mathrm{d}t=L$，顾及到 J 的分量表示形式（2.77），则有

$$\mathrm{d}[I^{ij}(t)\omega_j(t)+\lambda^i(t)]/\mathrm{d}t+\varepsilon^i_{jk}[I^{jl}(t)\omega_l(t)+\lambda^j(t)]\omega^k=L^i \tag{2.81}$$

此即著名的 Liouville(1858) 方程，它是 Euler 方程（2.63）的推广，适用于研究非刚性地球的旋转运动。不过，要想得到方程（2.81）的解析解是不可能的，只能采用近似方法或数值计算方法处理。通常的处理方法是将惯量张量分解为不随时间变化的主项 I_0^{ij} 和随时间变化的扰动项 $\mu^{ij}(t)$（Lambeck，1980）：

$$I^{ij}(t)=I_0^{ij}+\mu^{ij}(t),\quad i\neq j \tag{2.82}$$

其中：$I^{11}=I^{22}=A,I^{33}=C,I^{ij}=0(i\neq j)$。另外，若设 Ω 为地球旋转的平均角速率（平均周期约为 1d），用 $\delta_{3i}+l_i$ 表示瞬时旋转角速度 ω 相对于 x^3 轴的方向余弦，则有

$$\omega_i=\Omega(\delta_{3i}+l_i) \tag{2.83}$$

其中：$\omega_i\equiv\omega^i$；$\omega_1=\Omega l_1$ 和 $\omega_2=\Omega l_3$ 是地极的移动分量；$\omega_3=\Omega l_3$ 表示周日自转加速度（Lambeck，1980）。对于许多研究，比如研究进动或章动周期，只需要保留到一阶小量，因为观测精度只能达到相应的水平（1d 左右）。但对于更精细的研究，比如要研究摆动的椭率，则需要考虑更高阶的小量。将式(2.82)、(2.83)代入式(2.81)，保留到一阶小量，则 Liouville 方程化为如下形式（Lambeck，1980）

$$\begin{aligned}\dot{l}_1/\sigma+l_2&=\psi_2\\ \dot{l}_2/\sigma-l_1&=-\psi_1\\ \dot{l}_3&=\dot{\psi}_3\end{aligned} \tag{2.84}$$

其中：

$$\begin{aligned}\psi_1&=\frac{\Omega^2\mu^{13}+\Omega\,\dot{\mu}^{23}+\Omega\,\lambda_1+\dot{\lambda}_2-L_2}{\Omega^2(C-A)}\\ \psi_2&=\frac{\Omega^2\mu^{23}-\Omega\,\dot{\mu}^{13}+\Omega\,\lambda_2-\dot{\lambda}_1+L_1}{\Omega^2(C-A)}\\ \psi_3&=\frac{1}{\Omega^2C}\Big(-\Omega^2\mu^{23}-\Omega\lambda_3+\Omega\int_0^t L_3\mathrm{d}t\Big);\end{aligned} \tag{2.85}$$

而 σ 由式（2.71）给出，即

$$\sigma=\frac{(C-A)\Omega}{A} \tag{2.86}$$

引进复数运算往往是方便的。为此，令

$$\begin{aligned}l=l_1+\mathrm{j}l_2;\psi&=\psi_1+\mathrm{j}\psi_2,\mu=\mu^{13}+\mathrm{j}\mu^{23}\\ \lambda&=\lambda_1+\mathrm{j}\lambda_2,L=L_1+\mathrm{j}L_2\end{aligned} \tag{2.87}$$

其中 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$，则

$$\mathrm{j}\,\frac{\dot{l}}{\sigma}+l=\psi,\ \dot{l}_3=\psi_3 \tag{2.88}$$

$$\psi = \frac{\Omega^2\mu - \mathrm{j}\Omega\dot{\mu} + \Omega\lambda - \mathrm{j}\dot{\lambda} + \mathrm{j}L}{\Omega^2(C-A)}, \tag{2.89}$$

当 $\psi=0$ 时，可直接给出方程组(2.88) 中第一个方程的齐次解

$$l = l_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\sigma t} \tag{2.90}$$

至于方程组(2.88) 中的第二个方程，可以通过直接积分得到。在一般情况下，方程组(2.88) 中的第一个方程的解是齐次解与非齐次解的叠加（Lambeck，1980）

$$l = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\sigma_0 t}\left[l_0 - \mathrm{j}\sigma_0 \int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sigma\tau}\mathrm{d}\tau \right] \tag{2.91}$$

其中：$\sigma_0 \equiv \sigma(t_0)$。

由式(2.85)表述的 ψ_i 称为激发函数，反映了外力矩对地球旋转的影响以及弹塑性地球本身的形变(即物质迁移）对地球旋转的影响。物质迁移包括多种效应：核幔电磁耦合作用，地幔对流，板块运动，离心力及潮汐（固体潮和海潮）作用，风、水的运动（诸如风、雨、雪等)，河水涨落及河道变迁，等等，相当于地球物质的重新分布。由式(2.86) 给出的 σ 则表示 Chandler 自由进动的频率。自由进动的周期为 $\tau = 2\pi/\sigma$。

Liouville 方程（2.82）的简化形式（2.84）和（2.85）或（2.88）和（2.89）是目前研究地球旋转运动的基础方程，它只保留了扰动项的一阶量，属于近似方程。如若研究更为精细的旋转运动，则需考虑二阶扰动项甚至三阶扰动项。但就基本原理以及处理方法而言，并没有本质性的区别。下面我们着重讨论由式(2.85) 表示的激发函数，因为它是引起地球不规则旋转运动的起因。

如果激发函数 ψ_i 为零，则回到了自由 Euler 动力学方程（2.69），也即 Euler-Poinsot 情形，很容易给出解析解，表征了旋转对称刚性地球的旋转运动规律。这时，只有自转和进动，没有章动。自转周期大约 1d，进动周期大约 305d，此即 Chandler 自由摆动。

如果地球没有物质迁移，则表示刚性地球。这时，惯量张量 I^{ij} 与时间无关。在旋转对称的假定之下，通过适当选取地固坐标轴，可使激发函数 ψ_i 正好与由日月引力引起的外力矩 L_i 相等($L_i \equiv L^i$)。于是，方程(2.85) 就回到了刚性旋转对称地球的 Euler 动力学方程（2.68），这属于 Lagrange-Poisson 情形。在此情形下，地球瞬时旋转轴同时具有自转、进动和章动。其中，进动包括 Chandler 摆动和长期进动(岁差)。这里需注意，在此情形下的 Chandler 摆动虽然从概念上与 Chandler 自由摆动相同，但二者的周期并非一致，这当然是由于外力矩的作用所致。同时，外力矩的作用引起了一种附加运动，即周期为 18.6a 的章动（参见 2.4.2 节)。另一方面，需注意外力矩是随时间变化的，此因赤道隆起部分相对于太阳和月球的位置及方位随时间而变。

地球的旋转产生离心力，离心力导致赤道隆起，再加上潮汐力、海洋环流等作用，地球处于不停的形变之中。形变有快速变化（高频）与缓慢变化（低频）之分。高频形变如潮汐形变，变化幅度较大。低频形变如大陆漂移，变化缓慢。由于整个地球处于随时间变化的形变状态，要想选取一个完全与地球固结在一起的参考系（即地固参考系）是不可能的。这是研究地球旋转运动的一个难点。通常的做法只能是选取相对稳定的点（它们分布在变化缓慢的大陆表面)，以它们的平均位置为基准建立地固参考系 x^i，其具体实现是通过相应的参考框架来完成的（参见第 3 章）。因此，地固参考系存在一种缓慢的长期漂移。这种缓慢的长期漂移有可能导致如下结论(Lambeck，1980)：经过很长的一段历史（几十万年甚至上亿年)，地理极有可能遍游整个地球表面。当然，这一结论只是一种推测。要最终证实这一点，还需

要深入细致的研究工作。

目前，从理论上研究地球的旋转，总是假定地球关于 Oz 轴旋转对称，即有 $A=B$，这使得问题的研究相对简化。但实际的地球并非如此。在 $A\neq B$ 时问题将极为复杂。为了考察 $A\neq B$ 时会产生什么效应，我们假定一种刚性地球模型，并令 $A=(1+\alpha)B$，其中 α 是一个远远小于1的实常数。至于 C 与 A 的关系，则仍然采用 $(C-A)/C=1/305$。在假定不存在外力矩的情况下，根据方程(2.67)，地球旋转的Euler自由动力学方程可以写成

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1-(B-C)\omega_2\omega_3&=0\\ A\dot{\omega}_2-(C-A)\omega_3\omega_1&=0\\ C\dot{\omega}_3-(A-B)\omega_1\omega_2&=0 \end{aligned} \tag{2.92}$$

考虑到 A 与 B 非常接近，α 相比于1/305是小量，上述方程可以简化成如下的近似方程

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1+q_0\omega_2\omega_3&=0\\ \dot{\omega}_2-q_0\omega_3\omega_1&=0\\ \dot{\omega}_3-q_3\omega_1\omega_2&=0 \end{aligned} \tag{2.93}$$

其中：

$$\begin{aligned} q_0\equiv q_1=q_2&=(C-A)/A\\ q_3=(A-B)/C&=\alpha B/C\approx\alpha A/C \end{aligned} \tag{2.94}$$

方程(2.94)属于一阶非线性齐次方程组，很难找到分析解。直观地看，如果上述方程组存在非零解，则 ω_1、ω_2 以及 ω_3 均应随时间演化。根据前面的讨论，我们可以采用Liouville方程(2.81)的简化形式(2.84)和(2.85)或(2.88)和(2.89)进行数值计算(申文斌和梁毅强，2004)。更严格的处理需要考虑由日月引力引起的外力矩作用。

实际观测表明，目前的黄赤交角23.5°并非固定，而是每年减小大约0.5″。若一直按此速率单方向变化，地球的旋转轴将在130万年左右倒转一次。如此，北极将在百万年的尺度上经历一个“翻天覆地”的周期性变化，冰盖消融，复而冻结。不过，地球自转轴更为可能的倒转周期是亿年尺度(申文斌和梁毅强，2004)。

另外，我们可以设想，由于地球物质的迁移作用，地球平均赤道相对于地球本体本身也在缓慢变动。由此可得到一个重要的推论：北极和南极曾经位于历史的平均赤道上。若果真如此，由于离心力的作用，就不难理解各种造山运动：地球上的几乎每一点都在经历升降轮回。喜马拉雅山上的海生化石为我们提供了此山脉曾经处于海洋之中的证据。目前的监测表明，喜马拉雅山正在增长，增长速率大约0.4cm/a(胡明城和鲁福，1994)。如果喜马拉雅山在历史时期一直具有这样的增长速率，那么，在大约200万年以前喜马拉雅山是海洋，当时应该位于赤道附近。再往前推200万年，又是山脉。这就是说，不仅地球的瞬时旋转轴在空间的方位一直在变，而且地球的平均轴相对于地球本体也在变，其结果是，对于地球上的几乎每一点来说，都导致了非常复杂的运动效应。

2.4.3 激发函数

在一般情况下，激发函数(2.85)由三部分组成(Lambeck，1980)：物质的重新分布，物质的相对运动以及力矩作用。这种划分可以从表达式(2.85)本身明显看出。形式上，可以表示成(令 $\psi^i\equiv\psi_i$)

$$\psi^i=\psi^i_{物质}+\psi^i_{运动}+\psi^i_{力矩} \tag{2.95}$$

将式(2.95)与式(2.85)进行比照，即可写出如下结果

$$\begin{cases}\psi^1_{物质}=\mu^{13}/(C-A)\\ \psi^2_{物质}=\mu^{23}/(C-A)\\ \psi^3_{物质}=-\mu^{33}/C\end{cases} \tag{2.96}$$

$$\begin{cases}\psi^1_{运动}=[\dot{\mu}^{23}+\lambda_1+\dot{\lambda}_2/\Omega]/\Omega(C-A)\\ \psi^2_{运动}=[-\dot{\mu}^{13}+\lambda_2-\dot{\lambda}_1/\Omega]/\Omega(C-A)\\ \psi^3_{运动}=-\lambda_3/\Omega C\end{cases} \tag{2.97}$$

$$\begin{cases}\psi^1_{力矩}=-L_2/\Omega^2(C-A)\\ \psi^2_{力矩}=L_1/\Omega^2(C-A)\\ \psi^3_{力矩}=\int_0^t L_3\mathrm{d}t/\Omega C\end{cases} \tag{2.98}$$

2.4.4 表面负荷与激发

就研究地球自转而言，地球物理学家感兴趣的是地表物质分布发生变化之后，地球的旋转运动会受到怎样的影响。物质的重新分布导致惯量张量的变化，从而影响地球的旋转。仅地表物质分布变化而论，就具有多种形式：冰川与海洋之间的物质交换，海洋、大气、地下水之间的物质交换，大气层本身的重新分布，降雨、降雪等。在所有这些情况下，可将质量分布的变化表示成一个表面负荷函数 $q(r,\phi,\lambda,t)$。若展开成球谐函数，并令 $r=R$，则有

$$q(\phi,\lambda,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[a_{nm}(t)\cos m\lambda+b_{nm}(t)\sin m\lambda]P_{nm}(\sin\phi) \tag{2.99}$$

其中 $P_{nm}(\sin\phi)$ 是缔合勒让德函数。考虑到 $\rho\mathrm{d}\tau=q\mathrm{d}\sigma$，激发函数可以表示成

$$\begin{aligned}\psi_{物质}&=-\frac{R^2}{C-A}\int_{\partial K}q\cos\phi\sin\phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda}\mathrm{d}\sigma\\ \psi^3_{物质}&=-\frac{R^2}{C}\int_{\partial K}q\cos^2\phi\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned} \tag{2.100}$$

其中：∂K 是半径为 R 的球面；$\psi_{物质}=\psi^1+\mathrm{j}\psi^2$。

将式(2.99)代入式(2.100)，注意到

$$\cos\phi\sin\phi=\frac{1}{3}P_{21}(\sin\phi)$$

$$\cos^2\phi=\frac{2}{3}(P_{00}-P_{20})$$

同时考虑到球谐函数的正交性，得

$$\begin{aligned}\psi_{物质}&=-\frac{4}{5}\ \frac{\pi R^4}{C-A}(a_{21}+\mathrm{j}b_{21})\\ \psi^3_{物质}&=-\frac{8}{3}\ \frac{\pi R^4}{C}\left(a_{00}-\frac{1}{5}a_{20}\right)\end{aligned} \tag{2.101}$$

由此可以看出，在表面负荷函数中，只有零阶和二阶球谐项参与激发。在表面负荷激发之下，地球发生形变，导致物质的二次重新发布，从而改变了原来的激发函数。利用负荷形变系数 k'_n，注意到只取相关的零阶和二阶数 k'_0 和 k'_2，则有(Lambeck,1980)

$$\psi = \psi_0 + \psi_L = -\frac{4}{5}\ \frac{\pi R^4}{C-A}(1+k'_2)(a_{21}+\mathrm{j}b_{21})$$
$$\psi^3 = \psi_0^3 + \psi_L^3 = -\frac{8}{3}\ \frac{\pi R^4}{C}\left[(1+k'_0)a_{00} - \frac{1}{5}(1+k'_2)a_{20}\right] \tag{2.102}$$

其中：ψ_0 和 ψ_L 分别表示原初的激发函数和再次激发。根据 Lambeck(1980)，再次激发又会导致附加的自转形变 ψ_D。这时有

$$\psi = \psi_0 + \psi_L + \psi_D = (1+k'_2)\psi_0 + \frac{k_2}{k_0}l \tag{2.103}$$

2.4.5 Chandler 摆动

Chandler(1891)发现，实际的 Euler 进动大约为 434 个恒星日(相当于 435d)。这一效应，称之为 Chandler 摆动（即实际地球的 Euler 进动）。Newcom(1892) 最先提出了一种解释，Euler 进动从刚性假设下的 305d 变为实际观测值的 435d 是由于弹塑性地球受离心力所致。不少学者为了解释 Chandler 摆动作了大量的研究工作(Jeffreys and Vicente，1957，Molodensky，1961，Munk and MacDonald，1960)。然而，至今尚没有从理论上定量解释上述问题（尽管已存在很多定量的解释，但尚不能令人满意）。目前比较公认的解释也只能是定性的：

（1）地球并非刚体，有变形，这与地球刚性假设不符，从而会引起偏差。

（2）地球赤道隆起部分受日月作用而施加给地球一个外力矩，因而地球的旋转并非自由旋转，这也会带来偏差。

Jeffreys 早在 1949 年就提出了一种观点，认为，如果地壳不是刚体，就有可能产生实际的 Chandler 进动。对此，Jeffreys and Vicente（1957a，1957b）进行了研究，给出的理论结果约为 393d。后来，Molodensky(1961) 进行了类似的研究，给出的结果为 401d(即 400 日)，比 Jeffreys and Vicente 的结果更进了一步。观测结果与理论计算结果之间的差异（约 35d）则归因于全球海洋的作用。Larmor（1896）和 Darwen（1907）曾经指出（参见 Lambeck，1980），由离心力产生的海潮有可能使 Chandler 自由进动的周期增加大约 40d。但 Haubrich and Munk（1959）更进一步的分析研究则表明，海潮使自由进动周期增加大约 33d。这样，从理论上得到的结果就是 427d(Jeffreys and Vicente)或 434d(Molodensky)，后者与实际观测值吻合（在观测误差范围之内）。然而，无论是 Jeffreys and Vicente，还是 Molodensky，他们都对外核流体附加了限制性条件，而这种限制性条件对地球的旋转究竟会产生什么样的影响，目前还不太清楚。通常的观点是，流体外核的作用使得自由进动周期增加 10% 左右(Lambeck，1980)。再有 20% 左右来自外力矩的作用以及地球的形变。最后，还有 10% 左右来自由离心力引起的海潮。

地球旋转角速度的不均匀性会导致一种附加的海潮现象，称为极潮(Munk and MacDonald，1960)。极潮比较微弱，通常可以忽略。但极潮的累加效应也会对 Chandler 进动产生影响，使其发生变化，尽管这种变化比较小。另外，从理论上讲，由于潮汐摩擦作用，Chandler 进动速率应该越来越慢，但这一推想与实际的长期观测结果并不相符。于是，在地球内部或外部必定存在时常激发 Chandler 进动的机制。从理论上研究揭示 Chandler 进动规律是目前研究地球自转的一个重要方向之一。下面我们来探讨一下地球形变对 Euler 进动周期的影响。

经适当的坐标轴选取，可使 $\lambda_i = 0$(Lambeck，1980)。同时，不考虑外力矩影响，方程

（2.84）和（2.85）可写成（注意到 $\sigma = (C - A)\Omega/A)$）：

$$
\begin{aligned}
&\dot{l}_1 + l_2\sigma = -\frac{1}{A}(\dot{\mu}^{13} - \Omega\mu^{23}) = \sigma\psi_2 \\
&\dot{l}_2 - l_1\sigma = \psi_1 = -\frac{1}{A}(\dot{\mu}^{23} + \Omega\mu^{13}) = -\sigma\psi_1 \\
&\dot{l}_3 = -\frac{\dot{\mu}^{33}}{C} = \dot{\psi}_3
\end{aligned}
\tag{2.104}
$$

其中：二阶惯量张量仍然由式（2.65）给出：

$$
I^{ij} = -\int_{\Omega}(x^k x_k \delta^{ij} - x^i x^j)\rho \mathrm{d}\tau
$$

对上式作微分运算，不难写出由于物质迁移而引起的惯量张量的变化 μ^{ij}：

$$
\mu^{ij} = -\int_{\Omega}(2x_k \mathrm{d}x^k \delta^{ij} - x^i \mathrm{d}x^j - x^j \mathrm{d}x^i)\rho \mathrm{d}\tau \tag{2.105}
$$

其中：$\mathrm{d}x^i \equiv \mathrm{d}^i(x,t)$ 表示形变前 x^i 处的质点在形变后所产生的位移。如果弹性体受一周期性的扰动力 $f^i = f_0^i \cos\sigma_f t$，那么，根据 Gilbert 的研究结果，在上述扰动力作用之下的位移可以表示成（Lambeck，1980）

$$
d^i(x,t) = \sum_n s_n^i P \frac{\cos\sigma_f}{\sigma_n^2 - \sigma_f^2} \tag{2.106}
$$

其中：s_n^i 是地球的简正振型的特征函数

$$
P_n = -\int_{\Omega}\rho s_n^{*i} f_{0i} \cos\sigma_f t \mathrm{d}\tau \tag{2.107}
$$

其中：s_n^{*i} 是复数函数 s_n^i 的共轭。

假定形变起因于旋转（这里不考虑其他因素的影响），则可将位移表示成旋转参量 l^i 的函数。由于 l^i 是小量，在一阶近似之下，可以将位移表示成 l^i 的线性函数（作泰勒展开，准确到一阶），即有

$$
d^i = a_j^i(x,t) l^j \tag{2.108}
$$

由式(2.105)、(2.108)得

$$
\mu^{ij} = -\int_{\Omega}(2x_k a_m^k l^m \delta^{ij} - x^i a_m^j l^m - x^j a_m^i l^m)\rho \mathrm{d}\tau
$$

或者写成

$$
\mu^{ij}(t) = D_m^{ij}(t) l^m(t) \tag{2.109}
$$

其中：

$$
D_m^{ij} = -\int_{\Omega}(2x_k a_m^k \delta^{ij} - x^i a_m^j - x^j a_m^i)\rho \mathrm{d}\tau \tag{2.110}
$$

是地球的三阶混合自转形变张量。由方程（2.104）和（2.109）即可求解 $l^m(t)$。

按照如下方式考虑可以得到一种简化模式解：地球发生形变之后便凝结（不再发生形变），这时，地球形变三阶张量 D_m^{ij} 与时间无关。于是

$$
\mu^{ij}(t) = D_m^{ij} l^m(t) \tag{2.111}
$$

这里需注意：一般说来，自转参数 l^m 总是时间的函数。由表达式（2.104），激发函数可以表示成

$$\sigma\psi_1 = \frac{1}{A}(\Omega D_k^{13} l^k + D_k^{23}\dot{l}^k)$$

$$\sigma\psi_2 = \frac{1}{A}(\Omega D_k^{23} l^k - D_k^{13}\dot{l}^k) \tag{2.112}$$

$$\dot{\psi}_3 = -\frac{1}{C}D_k^{33}\dot{l}^k$$

将式(2.112)代入式(2.104)，得

$$\dot{l}_1 + \frac{1}{A}D_k^{13}\dot{l}^k + \frac{(C-A)\Omega}{A}l_2 - \frac{\Omega}{A}D_k^{23}l^k = 0$$

$$\dot{l}_2 + \frac{1}{A}D_k^{23}\dot{l}^k + \frac{\Omega}{A}D_k^{13}l^k - l_1\frac{(C-A)\Omega}{A} = 0 \tag{2.113}$$

$$\dot{l}_3 + \frac{1}{C}D_k^{33}\dot{l}^k = 0$$

由上述方程消去 $\dot{l}_3$，经整理得

$$\left(1+\frac{D_1^{13}}{A}\right)\dot{l}^1 + \frac{D_2^{13}}{A}\dot{l}^2 - \frac{D_1^{23}}{A}\Omega l^1 + \frac{\Omega}{A}(C-A-D_2^{23})l^2 = 0$$

$$\frac{D_1^{23}}{A}\dot{l}^1 + \left(1+\frac{D_2^{23}}{A}\right)\dot{l}^2 - \frac{\Omega}{A}(C-A-D_1^{13})l^1 + \frac{D_2^{13}}{A}\Omega l^2 = 0 \tag{2.114}$$

上式是一阶二元（常系数）常微分方程组，很容易求解。由于 D_k^{ij} 是小量，可以采用更简明的近似法：若 $D_k^{ij}=0$，则有通常的 Euler 解：

$$l^1 = l_0\cos\sigma t$$

$$l^2 = l_0\sin\sigma t \tag{2.115}$$

其中：$\sigma=\Omega(C-A)/A$ 是 Euler 自由进动周期（即 305d）。今假定在有自转形变的情况下，进动周期变为 σ_D，其解具有如下形式：

$$l^1 = l_0\cos\sigma_D t$$

$$l^2 = l_0\sin\sigma_D t \tag{2.116}$$

将式(2.116)代入式(2.112)，保留到一阶项，得

$$\sigma_D = \frac{\Omega(C-A)}{A} - \frac{D_1^{13}+D_2^{23}}{2A} \tag{2.117}$$

对于刚体地球，则

$$D_k^{ij} = 0 \tag{2.118}$$

回到了 Euler 自由进动。更严密的讨论是直接求解方程（2.104）和（2.111），由此得到 Chandler 进动周期 403d(Smith，1977；Lambeck，1980)。如果再考虑全球海潮作用，可使周期增长 30d 左右(Haubrich and Munk，1959)，这样，与实际观测的 Chandler 周期 434d(观测误差 1d 左右）基本吻合。

2.4.6 地极的变化

地极的变化也叫极移，实际上就是瞬时极相对于平均极的变化（极移）。如果地球是刚性旋转对称体，同时，不考虑日月引力的影响，那么，极移就正好是 Euler 自由进动项，也即 305d 的 Chandler 自由进动，这在前面已经讨论过。

实际的地球是弹滞体，实际上观测到的 Chandler 进动周期为 435d(通称 14 个月)，振幅

为0.1″~0.2″。Molodensky 曾经给出了一种理论上的解释，与上述观测值符合得很好。不过，实际上的极移轨迹非常复杂，总的极移量大约为0.3″。通过对近百年的观测资料的统计分析发现，在上述 Chandler 进动周期的基础上，还叠加有振幅为0.1″的年周期项、振幅为0.01″的半年周期项、振幅为0.01″至0.02″的两个星期周期项以及数月周期项。除此之外，还存在长期漂移，漂移方向为西经70°（胡明城和鲁福，1994），漂移速率为0.003″/a。这种长期的系统性漂移，称为极游。近百年来，极游量大约0.2″。

现在我们设想一下，如果长期漂移量（极游量）一直保持恒定，那么，再经过大约3亿年，地球的瞬时旋转极就会从北极附近游历到南极附近。不过，这样长的历史时期显然没有多大意义了，因为地球物质本身的迁移速率可能要比上述极游快得多。这是由于：

（1）物质迁移，惯性主轴并非固定。

（2）旋转角速度一直在变，平均极也并非固定。今天的南极或北极位置，在几百万年、或几千万年、或几亿年之后，可能早就游遍了高山大海。

目前对极移的理论描述还比较初步，只是对 Chandler 进动的描述比较成熟（但还不能最终证实理论的正确性）。如何从理论上对极移给出全面而精确的描述从而能对极移的未来作出准确预测，是将来的研究课题之一。

2.4.7 地球自转耦合

地球自转耦合实际上是指地球的核幔耦合。由于在地球内部存在液态外核，地核的旋转角速度就有可能与地幔的旋转角速度不一致，也即存在较差旋转：地核旋转得较快，地幔旋转得较慢，它们之间的旋转差异可以达到0.2°/a到3°/a（Song et al.，1996；Su et al.，1996；宋晓东和许晓霞，2001；滕吉文，2003；Glatzmaier and Roberts，1996）。这种角速度之间的差异就会产生相互作用，或者说耦合作用。通常，耦合作用有4种形式（Lambeck，1980；胡明城和鲁福，1994；滕吉文，2003）：惯性耦合、摩擦耦合、地形耦合以及电磁耦合。

Rochester（1970，1974）曾论述了各种耦合作用。我们用 ∂S 表示核幔边界。根据应力分析（参见2.6节），作用在核幔边界上的应力可以表示成

$$F^i = \tau^i_j n^j \tag{2.119}$$

其中：τ^i_j 是二阶混合应力张量；n^j 是核幔边界上的外法线的方向余弦。于是，作用在地幔上的净外力矩可以表示成（根据 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$）：

$$L^i = \int_{\partial S} \varepsilon^i_{jk} x^j \tau^k_m n^m \mathrm{d}\sigma \tag{2.120}$$

其中：x^j 是面积分元 $\mathrm{d}\sigma$ 处的坐标。上述力矩可以是惯性力矩 L_I（因而表示惯性耦合）、粘性力矩或摩擦力矩 L_V（摩擦耦合）、地形力矩 L_T（地形耦合）、电磁力矩 L_e（电磁耦合），或者是上述所有力矩的合效应。在考虑耦合作用时，可以先不考虑物质的迁移。这时，惯量张量的变化量 μ^{ij} 以及相对角动量 λ_i 均可视为零。于是，根据方程（2.84）和（2.85），在上述力矩作用之下，地幔的回旋响应由下列方程决定：

$$\begin{aligned} \dot{l}_1/\sigma + l_2 &= \frac{L_1}{\Omega^2(C_m - A_m)} \\ \dot{l}_2/\sigma - l_1 &= \frac{L_2}{\Omega^2(C_m - A_m)} \\ \dot{l}_3 &= \frac{1}{\Omega C} L_3 \end{aligned} \tag{2.121}$$

其中:A_m 和 C_m 是地幔的主惯性矩。如果将上式中的地幔惯性矩换成地核的惯性矩，则可得到地核的回旋响应。

2.4.7.1 惯性耦合

当地幔旋转轴与地核旋转轴不一致时，在核幔边界上会产生不均匀的附加压力，这对地球的形变从而对重力场、固体潮、岁差、章动特别是极移均会产生影响。影响的大小取决于上述两轴的偏离程度。如果偏离程度不大，上述影响就很微弱，特别是对旋转的影响而言(Lambeck, 1980)。目前业已探明，地幔旋转轴与地核旋转轴的偏差在10°左右(Su et al., 1995; Glatzmaier and Roberts, 1995a, b; Song et al., 1996; Su et al., 1996)，这属于二轴偏离不大的情形。不过，惯性耦合效应究竟有多大，目前尚无定论。因此，精细地考察惯性耦合效应是一个值得深入研讨的问题。

2.4.7.2 摩擦耦合

摩擦耦合也即粘滞性耦合，主要发生在核幔边界。当地幔旋转角速度与地核旋转角速度不一致时，在核幔边界上会产生一种摩擦作用，它属于一种切应力。如果假定外核是一种粘性流体，摩擦作用将使得上述两种角速度之间的差异变小。如果假定外核是理想流体，则上述摩擦不起作用。目前的观点是，虽然存在摩擦作用（因为不存在理想流体），但这种作用不显著，通常可以忽略(Lambeck, 1980)。

由流体流动而引起的作用在核幔边界上的一个壳层的切应力的数量级为 $10^{21}\upsilon^{\frac{1}{2}}\mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^{-2}$,其中 υ 是牛顿粘滞性系数(厘米克秒单位制,Lambeck, 1980)。作用在壳层上的力矩可以表示成

$$L^1 = -L_0\dot{l}^2,\quad L^2 = L_0\dot{l}^1,\quad L^3 = 0 \tag{2.122}$$

其中:

$$L_0 = \frac{4}{3}\pi R_K^4\rho(\Omega\,\upsilon)^{\frac{1}{2}} \tag{2.123}$$

其中:R_K 是内核半径。激发函数和运动方程可分别表示成

$$\psi^1 = -\frac{L_0}{\Omega^2(C-A)}\dot{l}^1,\quad \psi^2 = -\frac{L_0}{\Omega^2(C-A)}\dot{l}^2 \tag{2.124}$$

$$\mathrm{j}\dot{l}\left(\frac{1}{\sigma_0}-\mathrm{j}\tau_0\right)+l=0 \tag{2.125}$$

其中:

$$\tau_0 = \frac{L_0}{\Omega^2(C-A)}\approx 0.24\upsilon^{\frac{1}{2}} \tag{2.126}$$

而 j 是虚数,$l = l^1 + \mathrm{j}l^2$。在方程 (2.125) 中,σ_0 是无外力矩作用（但有形变）时的周期。现在由于外力矩的作用，通常它会增大。解方程 (2.125)，得

$$l = l_0\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sigma' t} \tag{2.127}$$

其中:

$$\alpha = \frac{\tau_0\sigma_0^2}{1+\tau_0\sigma_0^2},\quad \sigma' = \frac{\sigma_0}{1-\tau_0\sigma_0^2} \tag{2.128}$$

由此可见，摩擦耦合使振幅衰减，摆动周期增长。这就是说，摩擦耦合的作用使得地核

与地幔的旋转趋于一致。

2.4.7.3 地形耦合

这里所说的地形耦合，是指核幔边界处的地形耦合，它是由 Hide(1969) 首先提出的。地形耦合实属另外一种惯性耦合，只不过除了压力的不均匀分布之外，同时考虑了核幔边界的不规则性所带来的影响，这种影响主要来源于通过边界的液体流量的改变。不过，我们对核幔边界的地形知之甚少，因而很难说地形耦合对地球的旋转会产生什么重要影响。

如果核幔边界非常粗糙，沿交界面方向的流体所施加的压力就相当可观，耦合效应可能比较明显。一个典型的例子是分析一个长 L_0、高 H_0 的位于核幔交界面上的矩形隆起所产生的耦合效应(Hide, 1977; Moffatt, 1978; Lambeck, 1980)。根据 Lambeck (1980)，剪切力可以表示成

$$\tau_T = 2\rho\Omega u H_0 D_T \sin\phi \tag{2.129}$$

其中：D_T 是阻尼系数，u 是流体相对于界面的流动速度，ϕ 是余纬。根据 Hide(1977) 的研究，可取 $D_T = 1$。注意到力矩 L^i 只存在第三分量，根据力矩表达式 (2.120) 得(Lambeck, 1980)

$$L^3 \approx \frac{2}{\pi} R_K^3 \rho\Omega \{E(u^2)E(H_0^2)\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.130}$$

其中：$E(\cdot)$表示取平均值。于是，自转速度的变化可以表示成

$$\dot{l}^3 = \frac{\omega^3}{\Omega} = \frac{L^3}{C_m\Omega} \approx 4\times10^{-19}\{E(u^2)E(H_0^2)\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.131}$$

若取$\{E(u^2)\}^{\frac{1}{2}} \approx 0.04\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，则

$$\dot{l}^3 \approx 1.5\times10^{-20}\{E(H_0^2)\}^{\frac{1}{2}}$$

若将核幔之间的差异旋转每年 1°归为地形耦合作用，则需要 H_0 达到 7.5km 左右。实际上，核幔起伏最多只有 150m 左右 (Buffet, 2000)。照此推测，由地形耦合引起的超速旋转不足每年 2′。

2.4.7.4 电磁耦合

磁流体力学理论的一个著名结论是，如果地核的导电率足够高，则外核中的流体就会牵引磁场一起运动(Elsasser, 1950; Roberts, 1971; Lambeck, 1980)。如果核幔之间没有相对旋转(即二者完全耦合在一起)，就不会有磁场漂移；反之，如果核幔之间根本没有耦合，由于地幔受潮汐摩擦作用而逐渐减速，应表现出磁场的东向漂移。目前的观测事实是，磁场存在缓慢西漂，这被 Bullard 等人 (1950) 认为是核幔之间必有某种耦合作用的有力证据。电磁核幔耦合模型比较复杂，已由众多科学家进行了定量讨论(Bullard et al., 1950; Takeuchi and Elsasser, 1954; Elsasser and Takeuchi, 1955; Rochester, 1960, 1968; Roden, 1963; Roberts, 1972; Yukutake, 1972)，下面我们首先给出一个直观的说明。

如果地幔比地核旋转得快一些，在地面就会观测到磁场西漂。假定随地核一起旋转的磁场是一个偶极磁场，磁偶极子的方向与地核旋转方向一致。地幔切割磁力线，其结果使地幔中的正电子 (沿径向) 向地幔的底部运动，负电荷向顶部 (即地幔与地壳交界处) 运动。在上述正负电子的运动过程中，会受到 Lorentz 力的作用：正负电子均受到与地幔的旋转方向相反的力 (根据右手螺旋法则很容易证实)。这就是说，地幔受到了一个反向力矩的作用使地幔趋于转慢，直到与地核的旋转速率相同。如果先假定地幔比地核旋转得慢一些，按照完全类

似的推理，又可以推论出，地幔将受到一个正向力矩使地幔趋于转快，直到与地核的旋转速率相同。由此可见，虽然目前的观测结果是西漂，但经过一段时间（也许很长一段时间）之后有可能变为东漂。如果详细考察古地磁资料，有可能证实这一结论。不过，根据科里奥利力的作用分析（盖宝民，1991），地核总是比地幔旋转得快一些：较重的物质下沉时获得向东的加速度，较轻的物质上浮时具有西向减速效应。实际上，早在 1950 年由 Bullard 提出的模型更为复杂。他将地球分为三层：内核、外核以及地幔，它们分别具有各自的旋转角速度 ω_{ci}、ω_{ce}、ω_m。Bullard(1950) 认为内核旋转得较快，外核旋转得较慢，而地幔的旋转角速度介于其间。这与直观的想象并不符合。如果实际情况的确如此（目前尚无定论），那就表明，电磁耦合具有相当强的作用。当然，我们也可以假定事先并不知道 ω_{ci}、ω_{ce}、ω_m的变化规律，待解出方程之后再根据观测值确定。根据近年的研究成果，内核与地幔之间存在差异旋转，其量级在 0.2°/a 到 3°/a 之间(Song and Richards，1996；Su et al.，1996；Buffet，2000)。

根据方程（2.121），欲研究电磁耦合效应，首先需要求出电磁力矩。若存在核幔之间的较差旋转，那么，在假定存在初始偶极磁场的前提下，必然导致沿径向的感应电流 j^i。感应电流 j^i 与磁场 B^i 进一步作用，产生 Lorentz 力

$$f^i = \varepsilon^i_{kl} j^k B^l \tag{2.132}$$

它作用于地幔使其加速或减速。电磁力矩可以表示成

$$L^i = \int_{\Omega m} \varepsilon^i_{kl} r^k f^l \mathrm{d}\tau \tag{2.133}$$

其中积分域遍及可导电的地幔部分。上述力矩实际上只存在第三分量：

$$L^3 = \int_{\Omega m} \varepsilon^3_{kl} r^k f^l \mathrm{d}\tau \tag{2.134}$$

将上式代入式(2.121) 即可求解角速度。另外，根据角动量守恒律，有

$$C_{ci}\dot{\omega}_{ci} + C_{ce}\dot{\omega}_{ce} + C_m\dot{\omega}_m = 0 \tag{2.135}$$

其中：C_{ci}、C_{ce}、C_m 是相应的惯量矩。Lambeck(1980)求得的外核与地幔的角速度变化率之间的关系为

$$\dot{\omega}_{ce} \backsimeq -\frac{C_m}{C_{ci} + C_{ce}}\dot{\omega}_m \tag{2.136}$$

或表示成

$$\dot{\omega}_m \backsimeq \frac{C_{ci} + C_{ce}}{C}(\dot{\omega}_m - \dot{\omega}_{ce}) \tag{2.137}$$

由此可以看出，若地幔角速度增加，则外核角速度减小；反之，若地幔角速度减小，则外核角速度增大。将式(2.136)或式(2.137)代入式(2.135) 之中，则可写出内核和地幔的角速度变化率之间的关系：

$$\dot{\omega}_{ci} = -\frac{C_m}{C_{ci}}\left(1 - \frac{C_{ce}}{C_{ci} + C_{ce}}\right)\dot{\omega}_m \tag{2.138}$$

大量地震数据所得到的结果表明(Song et al.，1996；Su et al.，1996；Buffet，2000；宋晓东和许晓霞，2001)，核幔较差旋转在 0.2°/a 到 3°/a 之间，而且内核比地幔旋转得快。这表明，地幔作减速旋转(Glatzmaier and Roberts，1995，1996)。于是，由方程（2.136）和（2.138），内外核均作加速运动。反过来，如果在某个时期地幔作加速运动，则可推出内外核均作减速运动。

2.4.8 内核超速旋转

在 Gudenberg(1914) 发现了离开地面的深度为 2 900km 的核幔界面之后，科学家即推断地核是液态的(Jeffreys 1976；Buffet, 2000)。1936 年，Lehmann 通过地震波分析发现了半径为 1 220km 的固态内核，有力地推进了地球内部物理的研究。由于固态内核与地幔之间存在粘度较低的液态外核，内核超速旋转就成为可能(Gubbins 1981)。Lambeck (1980)根据地球内部物质的沉浮机制推测可能存在内核超速旋转；盖宝民 (1991) 则基于科里奥利力进一步断言有可能存在超速旋转。为了解释地磁场的产生机制,Glatzmaier and Robert(1995) 基于电磁耦合作用预测内核超速旋转的量级为 3°/a。基于对约 30 年地震资料的分析，Song and Richards(1996) 以及 Su 等人 (1996) 先后断言，内核的超速旋转量级分别为 1°/a 和 3°/a。随后，一系列的相关研究表明，超速旋转的量级似乎没有当初所宣称的那么大(Buffet, 2000)。目前，科学家们比较一致的看法是，尽管存在超速旋转，但其量级只有大约 0.2°/a。

内核超速旋转的研究对解释地磁场的起源以及深入了解地球内部的物理特性具有重要意义。通常，人们利用地震波资料反演内核的物质结构（如各向异性）以及运动状态（如超速旋转）。Shen and Ning(2005) 指出，超速旋转将导致重力场的变化（正演问题），反之，通过对重力场变化的监测有可能探测出超速旋转参数（反演问题），从而对超速旋转施加限制。

内核具有两个重要的特征：轴对称各向异性和超速旋转。根据地震波观测发现，P 波沿南北向穿过内核的到时比沿赤道方向穿过内核的到时大约快 3%，这一观测结果可以通过假定内核具有轴对称各向异性加以解释（Su et al., 1996；Buffet, 2000；宋晓东和许晓霞, 2002)。因此，粗略地说（一阶近似），内核是分层均值的具有轴对称的各向异性圆球（实际上是椭球，见后）。如果考虑得更加精细，那么，内核各向异性将随横向和深度的变化而变化（宋晓东和许晓霞, 2002）。就本文的目的而言，我们只考虑到一阶近似，即将内核看做轴对称各向异性体。

Su and Dziewonski(1995) 分析研究了国际地震中心(ISC) 数据库提供的近 30 年的资料，发现内核各向异性对称轴指向 79.5°N, 160°E，即与地球自转轴之间存在 10.5°的夹角（Su et al., 1996）。于是，在内核自转轴与地球自转轴相重合的假设之下（这时，内核各向异性对称轴与内核自转轴不重合）,Song and Richards (1996) 以及 Su et al. (1996) 先后断言，内核超速旋转速率分别为 1°/a 和 3°/a。

内核的各向异性对称轴与其自转轴不重合这一假定难以令人信服。实际上，如果假定内核自转轴就是内核各向异性对称轴，由于可能存在进动效应，也可以解释 Song and Richards (1996) 以及 Su et al. (1996) 的研究结果（刘斌等,1999）。

2.4.8.1 关于内核的三个基本结论

下面我们通过推理分析建立如下的三个基本假设(申文斌等,2006)：

(1) 内核具有椭球形状。

(2) 内核的各向异性对称轴与内核自转轴重合。

(3) 内核存在进动效应，因而内核自转轴与地球自转轴不重合（一般情况）。

内核并非绝对刚体，在惯性空间中的自转运动导致了对内核介质的离心力作用，从而使得在两极方向向内收缩，赤道方向向外膨胀，形成椭球形状，正如地球的旋转运动使得地球

成为椭球形状（一阶近似）一样，因而假设（1）是可接受的。研究表明，在内外核界面处，内核椭球的扁率为 1/415.8(Smylie et al., 1984)。

最初，整个地核是液态的(Buffet, 2000; Karato, 2003)，后来，由于固化作用逐渐形成了固态内核。在内核的同一个纬圈上，没有任何一个方向可以成为优势方向。也就是说，在同一个纬圈上，所有方向都是等价的，因而不可能提供一个特殊的方向使其成为各向异性轴对称方向。就内核而言，只有自转方向具有特殊性，在此方向上不存在离心力，因此，如果内核是轴对称各向异性的，各向异性对称轴必定与内核自转轴重合，因而假设（2）是易于接受的。

由于外核是粘度较低的液态(Jeffreys, 1926; Buffet, 2000)，内核的转动是充分自由的(Su et al., 1996)。若不考虑液态外核对内核的拖曳作用，将 Euler 动力学方程应用于内核的旋转运动就会发现，内核的自转轴在惯性空间中存在进动，正如地球的自转轴在惯性空间中存在进动一样，但二者的进动量值在通常情形下并不相同。因此，很难设想内核的自转轴正好与地球的自转轴重合，除非是某种巧合，因而假设（3）是可以接受的。根据多年地震波资料的分析发现，内核各向异性对称轴与地球自转轴的夹角大约是 10°(Su et al., 1995, 1996)。另外，可以认为根据地震波分析得出的内核超速旋转(Song and Richards, 1996; Su et al., 1996) 实际上是内核的进动效应（刘斌等，1999）。

图 2.2 基本反映了上述三个基本假设以及根据地震波所得到的两个重要结论：各向异性对称轴与地球自转轴的夹角为 10°(Su and Dziewonski, 1995)；内核存在自西向东的进动效应，其量级从 0.2°/a 到 3°/a 不等(Buffet, 2000; 宋晓东和许晓霞，2002)。

基于上述三个假设，我们将研究由内核超速旋转引起的地球重力场的变化。如果内核具有球形而不是椭球形分层均值分布，或内核自转轴与地球自转轴重合抑或内核不存在进动，那么，地球重力场将不会因超速旋转而发生变化（不考虑相对论效应）。

由于离心力位与坐标系有关，在地固坐标系中的地球表面或地球外部点的离心力位并不因为内核超速旋转而发生改变，因此，我们将着重考察由内核超速旋转引起的地核物质密度的空间分布随时间发生变化从而导致的地球重力场的变化。

基于前面的假设，在地固坐标系或固结于地幔的坐标系（其中的 z 轴与地球自转轴重合）中考察，内核自转轴绕地球自转轴自西向东进动，从而导致了地核物质相对于地球自转轴的非对称性迁移，这种迁移对地球重力场的影响体现在两个方面：

（1）内核椭球质量体在地固坐标系中发生了相当于地球自转轴的非对称性变化，其外部引力场会相应地发生变化，从而引起地球重力场的变化。

（2）液态外核物质密度的空间分布也会因为内核的旋转发生变化(图 2.2)，因为挖掉了内核的液态外核具有一个与椭球内核形状相同的空穴，空穴将伴随着内核的进动。假想整个地核的密度相同，那么，内核的进动将不会引起重力场的变化。但由于内外核界面处存在密度跳跃，加之内核的密度随深度而增加，因此，内核的进动将导致地球重力场的变化。这一变化等于进动的内核所产生的引力场，减去以同一速率进动的以内外核界面处外核密度 ρ_{ICB}^{*} 为均值分布的空穴形椭球所产生的引力场。因此，由内核进动导致的地球重力场的变化可以等价地表述为由进动的等效椭球所引起：等效椭球是假想的具有内核形状的密度分布为 $\rho_{IC}(r)-\rho_{ICB}^{*}$ 的椭球体，其中 $\rho_{IC}(r)$ 是内核的密度分布，这里忽略了纬向变化。

考虑到内核的密度(Dziewonski and Anderson, 1981; Smylie et al., 1984)随深度的变化较小（从内外核界面到地心的密度变化只有 0.4g/cm^3），为了简化模型，我们将等效椭球的密

度分布取为恒定值 $\rho_{ICB}^{i}-\rho_{ICB}^{e}$，其中 ρ_{ICB}^{i}是内外核界面处内核的密度。简化模型会导致误差，但不会影响基本量级。根据 PREM 模型(Dziewonski and Anderson，1981)，在内外核界面处，固态内核与液态外核存在明显的密度跳跃,其量级为 0.597 3g/cm^3。因此，由内核进动引起的地球重力场的变化将等效为由密度为 0.597 3g/cm^3 的等效椭球的进动所引起的引力场的变化。

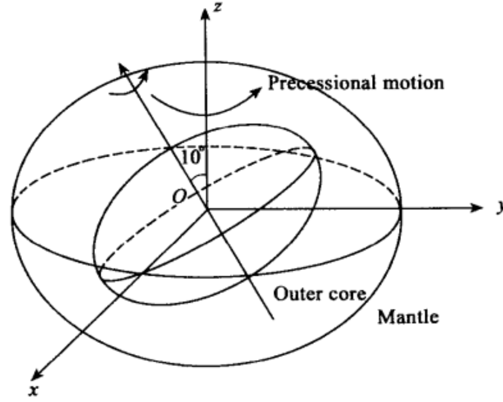


图 2.2　内核超速旋转

2.4.8.2　超速旋转对重力场的影响

在固结于内核的直角坐标系 $O-x_iy_iz_i$ 中，均值旋转对称椭球体对外部点的引力位的表达式为(赵进义，1983)：

$$V=2\pi G\rho\frac{1+e'^2}{e'^3}\times\left[b^2e'^2\arctan\frac{be'}{\sqrt{b^2+u}}-\frac{x_i^2+y_i^2}{2}\left(\arctan\frac{be'}{\sqrt{b^2+u}}-be'\frac{\sqrt{b^2+u}}{a^2+u}\right)-z_i^2\left(\frac{be'}{\sqrt{b^2+u}}-\arctan\frac{be'}{\sqrt{b^2+u}}\right)\right]\tag{2.139}$$

其中：$e'=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$为旋转对称椭球体的第二偏心率；$u$ 是方程$\frac{x_i^2+y_i^2}{a^2+u}+\frac{z_i^2}{b^2+u}=1$ 的唯一正根，是 x_i，y_i，z_i 的函数。若令

$$Q=\frac{be'}{\sqrt{b^2+u}}\tag{2.140}$$

则 Q 是方程$\frac{x_i^2+y_i^2}{1+Q^2}+z_i^2=\frac{a^2-b^2}{Q^2}$的正根,在球面坐标系下,$Q$ 的合理根为(刘琳，2005)：

$$Q(r_i,\theta_i)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{a^2-b^2-r_i^2+\sqrt{(a^2-b^2-r_i^2)^2+4(a^2-b^2)r_i^2\cos^2\theta_i}}{2r_i^2\cos^2\theta_i}}, & \theta_i\neq\dfrac{\pi}{2}\\ \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{r_i^2-a^2+b^2}}, & \theta_i=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\tag{2.141}$$

其中：θ_i 为外部点的归化纬度；r_i 为外部点至原点的距离。

将式(2.140)代入式(2.139)中，得到球面坐标系下旋转对称椭球体对外部一点引力位的表达式：

$$V = 2\pi G\rho \frac{1+e'^2}{e'^3}\left[b^2 e'^2 \arctan Q - \frac{r_i^2 \sin^2\theta_i}{2}\left(\arctan Q - \frac{Q}{Q^2+1} \right) - r_i^2 \cos^2\theta_i (Q - \arctan Q) \right] \tag{2.142}$$

引力矢量 $\boldsymbol{F} = \nabla V$，其在 $\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\lambda}_i$ 三个相互垂直的方向上的分量分别为（刘琳，2005）

$$\begin{cases} F_{r_i} = 2\pi G\rho \dfrac{1+e'^2}{e'^3}\left[\dfrac{b^2 e'^2 (Q^2+1) - r_i^2 Q^2 (1 + Q^2\cos^2\theta_i)}{(Q^2+1)^2} \dfrac{\partial Q}{\partial r_i} \right. \\ \qquad \left. - r_i (1 - 3\cos^2\theta_i) \arctan Q - r_i Q \left(2\cos^2\theta_i - \dfrac{\sin^2\theta_i}{Q^2+1} \right) \right] \\ F_{\theta_i} = \dfrac{2\pi G\rho}{r_i} \dfrac{1+e'^2}{e'^3}\left[\dfrac{b^2 e'^2 (Q^2+1) + r_i^2 Q^2 (1 + Q^2\cos^2\theta_i)}{(Q^2+1)^2} \dfrac{\partial Q}{\partial \theta_i} \right. \\ \qquad \left. + r_i^2 \sin\theta_i \cos\theta_i \left(2Q + \dfrac{Q}{Q^2+1} - 3\arctan Q \right) \right] \\ F_{\lambda_i} = \dfrac{1}{r_i \sin\theta_i} \dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\lambda}_i} = 0 \end{cases} \tag{2.143}$$

因为旋转对称的关系，V 中不含有 λ_i，所以 F_{λ_i}分量为零。

若令

$$\begin{cases} A = a^2 - b^2 - r_i^2 \\ B = (a^2 - b^2 - r_i^2)^2 + 4(a^2 - b^2) r_i^2 \cos^2\theta_i = A^2 + 4(a^2 - b^2) r_i^2 \cos^2\theta_i \\ C = \dfrac{A + \sqrt{B}}{2 r_i^2 \cos^2\theta_i} \end{cases} \tag{2.144}$$

则式(2.141)变为

$$Q(r_i, \theta_i) = \begin{cases} \sqrt{C}, & \theta_i \neq \dfrac{\pi}{2} \\ \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{-A}}, & \theta_i = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{2.145}$$

将式(2.145)分别对 r_i, θ_i 求偏导，得

$$\frac{\partial Q}{\partial r_i} = \begin{cases} \dfrac{r_i^2 \left[\dfrac{2(a^2 - b^2)\cos^2\theta_i - A}{\sqrt{B}} - 1 \right] - (A + \sqrt{B})}{2 Q r_i^3 \cos^2\theta_i}, & \theta_i \neq \dfrac{\pi}{2} \\ -r_i \sqrt{a^2 - b^2} (-A)^{-\frac{3}{2}}, & \theta_i = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{2.146}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_i} = \begin{cases} \dfrac{(A + \sqrt{B}) \tan\theta_i - \dfrac{r_i^2 (a^2 - b^2) \sin 2\theta_i}{\sqrt{B}}}{2 Q r_i^2 \cos^2\theta_i}, & \theta_i \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \theta_i = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{2.147}$$

将式(2.145)、(2.146)、(2.147)代入式(2.143)中即可求出$F_{r_i}, F_{\theta_i}, F_{\lambda_i}$。

由于实际重力场观测都是在地固坐标系中进行的，所以必须将有关的物理量归算到地固坐标系内。在地固坐标系内引力分量的表达式为

$$F_r = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r_i} = F_{r_i}$$

$$F_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta_i}\frac{\partial \theta_i}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \lambda_i}\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta_i}\frac{\partial \theta_i}{\partial \theta} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \theta}F_{\theta_i}$$

$$F_\lambda = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta_i}\frac{\partial \theta_i}{\partial \lambda} + \frac{\partial V}{\partial \lambda_i}\frac{\partial \lambda_i}{\partial \lambda}\right) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta_i}\frac{\partial \theta_i}{\partial \lambda} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \theta_i}{\partial \lambda}F_{\theta_i}$$

合写为

$$\begin{cases} F_r = F_{r_i} \\ F_\theta = \dfrac{\partial \theta_i}{\partial \theta}F_{\theta_i} \\ F_\lambda = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial \theta_i}{\partial \lambda}F_{\theta_i} \end{cases} \tag{2.148}$$

其中：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta_i}{\partial \theta} = \dfrac{\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta\sin(\lambda - \psi)}{\sqrt{1 - [\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta\sin(\lambda - \psi)]^2}} \\ \dfrac{\partial \theta_i}{\partial \lambda} = \dfrac{\sin\alpha\sin\theta\cos(\lambda - \psi)}{\sqrt{1 - [\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta\sin(\lambda - \psi)]^2}} \end{cases} \tag{2.149}$$

而引力合力的大小为

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_\theta^2 + F_\lambda^2} \tag{2.150}$$

将$F_{r_i}, F_{\theta_i}, F_{\lambda_i}$以及式(2.149)代入式(2.148)即可求出引力在三个方向的分量，再代入式(2.150)即可求出引力合力的大小。

假设在零时刻，固结于内核的坐标系x_i轴与固结于地幔的坐标系X轴相重合(即$\psi_0 = 0°$)。内核超速旋转后，进动角$\psi_t = \omega_d t$，其中ω_d为内核超速旋转的平均角速率。

对于内核外部的任意一点(r, θ, λ)，可求出该点所受的等效椭球的引力$\boldsymbol{F}_0(F_{r0}, F_{\theta0}, F_{\lambda0})$和$\boldsymbol{F}_t(F_{rt}, F_{\theta t}, F_{\lambda t})$，将两者作差即求得地面点重力的变化值$\Delta g(r, \theta, \lambda, t)$。

分别计算地球表面同一点在内核超速旋转1°前后所受到的等效椭球体的引力，再求两者的差值，该值即为内核超速旋转1°造成的地球重力场的变化值。由方程(2.143)知，欲求均质旋转对称椭球体对外部点的引力，必须知道其形状(即该椭球体的长、短半轴)和密度。等效椭球体的形状与地球内核的形状相同，密度为内外核边界处的密度差异。计算该等效椭球体对外部点的引力时，采用了表2.1中的数值。

表2.1　计算中采用的地球物理参数的数值及相应计算

参　　数	数　　值
地球的平均半径	$R = 6\ 371$km
内外核边界处内核的扁率	$f = 1/415.78$(Smylie et al. 1984)

续表

参　数	数　值
内核长半轴	$a = 1\ 229.5$km(Smylie et al. 1984)
内核短半轴	$b = a \times (1 - f) = 1\ 226.54$km
内外核边界处内核的密度	$\rho_{ICB}^{i} = 12.763\ 6$g/cm^3(Dziewonski and Anderson 1981)
内外核边界处外核的密度	$\rho_{ICB}^{e} = 12.166\ 3$g/cm^3(Dziewonski and Anderson 1981)
内外核边界处的密度跳跃	$\Delta\rho = \rho_{ICB}^{i} - \rho_{ICB}^{e} = 0.597\ 3$g/cm^3

2.4.8.3　内核超速旋转1°对地球重力场的影响

根据表2.1给出的地球物理参数以及第2.3节给出的数学模型,经数值计算得到内核超速旋转1°后,在半径为6 371km的球面上每一点的重力变化值,其中包括沿径向、纬向和经向的三个分量以及重力合力,分别如图2.3和图2.4所示,图中的平面坐标分别为球面点的余纬和经度,以度为单位,竖坐标为重力(依次为径向分量、纬向分量、经向分量、重力合力),以微伽(1μGal$=10^{-8}$m/s^2)为单位。相应的数据分析列于表2.2。

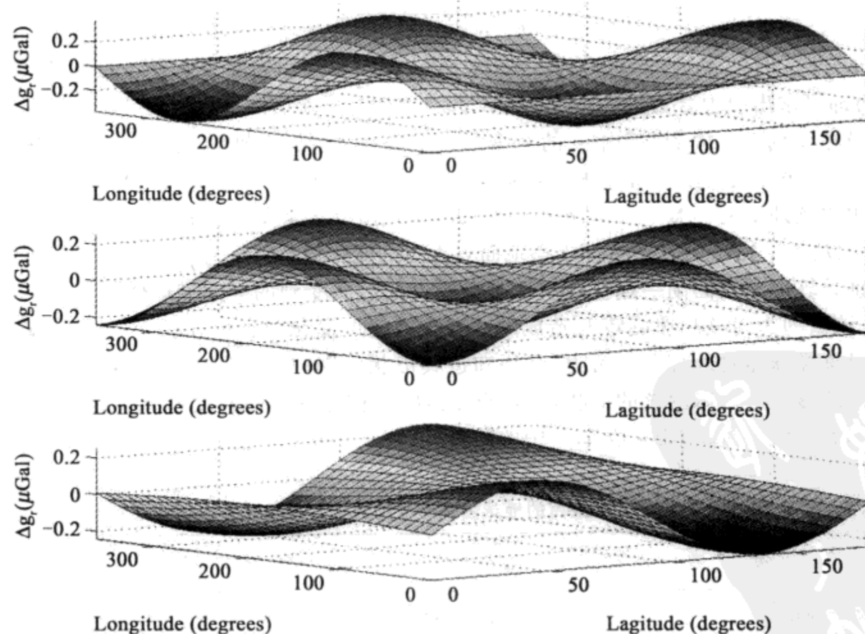


图2.3　重力分量在地表的变化

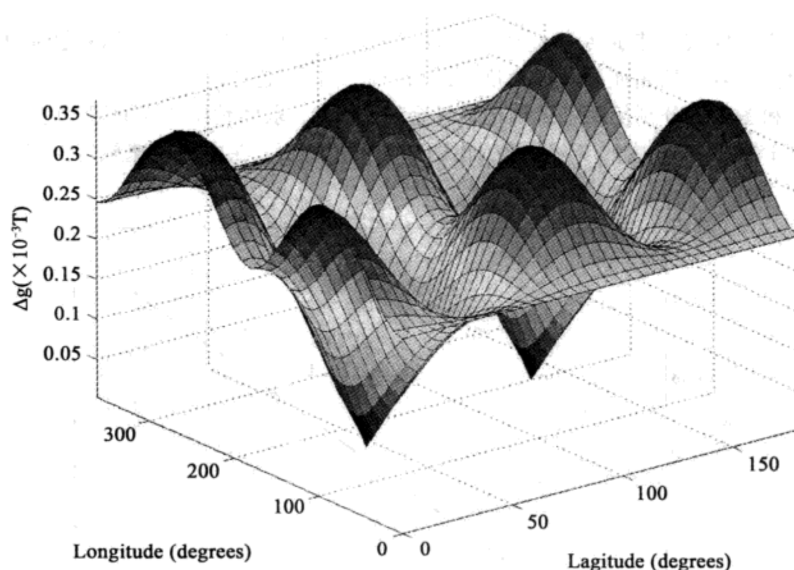


图 2.4　重力在地表的变化

表 2.2　　内核超速旋转 1°造成全球重力场变化值分析表(＊)

	变化最大值	最大值点的余纬	最大值点的经度	全球平均值
g_r	-0.372　Gal	45°	190°	1.48×10^{-5}　Gal
g	-0.244　Gal	90°	180°	-1.78×10^{-4}　Gal
g	-0.248　Gal	10°	270°	7.21×10^{-4}　Gal
g	0.372　Gal	45°	190°	0.246　Gal

($1\gamma=10^{-9}$T)

由图 2.3、图 2.4 以及表 2.2 可以看出：

(1) 内核超速旋转 1°所引起的地球重力场变化的最大值为 0.372μGal，全球平均值为 0.246μGal。显然，利用卫星重力测量技术尚难以感应出此效应。超导重力仪的精度已达到 0.1μGal，可以感应出由超速旋转 1°引起的重力场变化。不过，在同样的时间尺度上，尚存在其他影响地球重力场变化的因素，如固体潮、大气、海洋物质迁移等。因此，能否利用重力场变化反演内核超速旋转，取决于未来的分离技术。

(2) 一般而言，径向重力分量的变化比其他两个方向上的分量变化要显著，合力的变化值及其特性主要取决于径向分量。但对于局部点，径向重力分量的变化可能反而不显著。例如，在赤道方向($\theta=90°$)，径向重力分量变化值比在纬向上的分量变化值要小(见图 2.3 的前两个图)。

(3) 全球范围内，因内核超速旋转造成的重力值变化大小及方向与球面点的位置有关，它们之间的关系较为复杂。由表 2.2 可以看出，重力值变化最大的点在北纬 45°处，而不在赤道处。

2.4.8.4 超速旋转对地球表面固定点重力场的影响

前面讨论了内核超速旋转1°造成整个地球表面点的重力变化。下面将考察地表某一固定点的重力值随着内核超速旋转的角度不断增大而变化的趋势。

图2.5和图2.6分别反映了武汉地区（余纬约59°，东经约114°）的重力变化值在内核超速旋转了1°内和360°内的变化趋势。由图2.5可以看出，在内核超速旋转1°范围之内，该

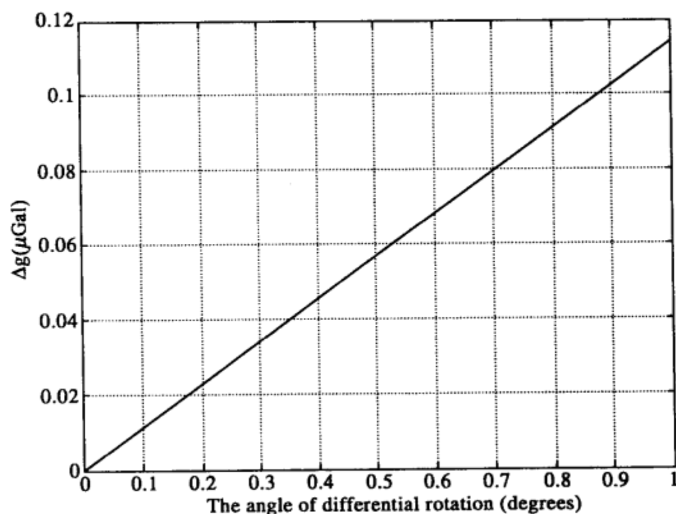


图2.5 对应于超速旋转0-1度的重力变化

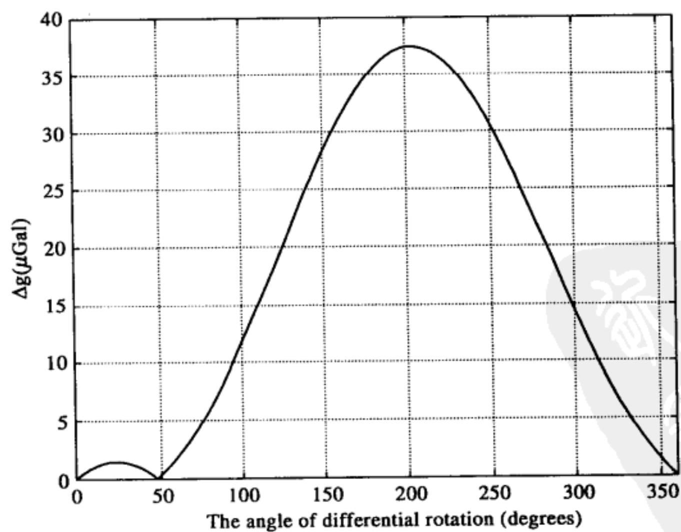


图2.6 对应于超速旋转0-360度的重力变化

地区的重力变化值近似线性增加。由于近些年的地震学研究得到的内核超速旋转速率均小于1°/a（Buffet，2000），根据图2.5可以估计不同速率的内核超速旋转对地球重力场的影响量级。图2.6则表明，在内核超速旋转204°时，重力值变化达到最大值37.467μGal。其中，从50°到204°，重力变化呈上升趋势。如果内核超速旋转速率为1°/a的话，那么，通过固定台站的长期观测有可能检测到重力变化。

Greiner-Mai等人（2000）在内核自转轴与地磁场的偶极轴相重合的假设下，估算了地球重力场二阶球谐系数随时间的变化值，其相对量级为$10^{-12}\sim10^{-11}$/a。考虑到地磁场长期西向漂移的速率为0.05°/a，即偶极轴的进动速率比本文假设模型的进动速率的量级要小20倍，以及其忽略二阶以上球谐项的影响等因素，可以认为本文得到的内核超速旋转1°造成的地球表面重力值变化约微伽量级的结论与Greiner-Mai等人（2000）的结果比较符合。这里需要指出，无论是东向进动还是西向进动，本文给出的数值结果均是适用的。

内核超速旋转（实际上是内核的进动效应）使地球重力场产生变化。如果内核超速旋转的速率为1°/a，则一年后地球表面点的重力值平均变化0.246μGal，最大变化0.372μGal，并且在径向、纬向和经向的重力分量均会发生变化。由于重力场变化的量级在一年或几年之内处于微伽量级，而影响地球重力场变化的因素较多，若不能将其他因素的影响加以有效的分离，就难以检测出因内核超速旋转而引起的地球重力场的变化。

鉴于由内核超速旋转所引起的重力场变化具有某种特殊的规律（如线性累加效应），加之目前超导重力仪的观测精度已超过0.1微伽，若能对其他随时间变化的重力异常（扰动）加以有效的滤波或剔除，就有可能使地球重力场监测技术成为研究地球内核超速旋转的有效手段。

§2.5　全球重力场及其随时间的变化

在地固参考系中考察，如果地球是刚体，则地球重力场的变化是简单的：若不考虑刚性地球旋转角速度的变化，则重力场是恒定的；若考虑旋转角速度的变化，则重力场随时间而变，其中变化的部分不仅包含离心力的变化部分，还包括非惯性系影响。若在刚性地球的假定之下加上日月引潮力作用，则重力场的变化更为显著：除了离心力的变化以及非惯性系影响之外（这时的离心力变化已与前面的不同，因为旋转角速度的变化有异，见第五章），主要有以日和半日为周期的变化（这种以日和半日为周期的变化同时包括太阳和月亮的影响），以月和半月为周期的变化（这只是月亮的影响），还有一些其他的周期项，诸如年周期（由太阳至地球的距离的变化而引起），以及长期变化项（其中包括由黄赤交角以及白赤交角的变化而引起的重力变化项），由月球逐渐远离地球（大约每年的退行速率为5厘米）而引起的潮汐变化，等等。若再考虑其他行星的影响，则还有基于其他行星运动规律的各种周期的变化。更进一步，对于实际的弹滞性地球体来说，在各种引潮力的作用之下，地球会发生形变，从而产生附加重力场，这种附加重力场随时间变化的主周期与相应的引潮力的周期一致（从严格的意义上讲有滞后效应），但又会增加更多的附加项：地球作为弹滞体，在受到外力（引潮力）作用之后，它会产生微震荡，其振幅可以达到厘米级（相当于重力场变化的微伽级）；大气潮的影响，其主要周期与固体潮的周期相同，可达到微伽级；由地球旋转轴的不规则运动而引起的潮汐；由各种物质的迁移以及地球的旋转运动而引起的科里奥利力，等等。不过，值得注意的是，在地固参考系中考察，地球外部的重力场本身并不含有科里奥利力，它只是

包含在置于台站的重力仪的观测值之中，此因重力仪的点位随时间而发生变化之故。因此，在重力观测值中要将科里奥利力剔除，除非此效应非常小，以致可以忽略不计。

一般说来，对确定重力场的精度要求越高，所需考虑的重力场随时间变化的规律就越复杂，而且，很多影响是交织在一起相互作用的。比如，引潮力导致重力场变化以及形变，形变又引起重力场变化，而变化的重力场又导致进一步的形变，等等。再如，岁差、章动、极移会引起重力场变化，引潮力导致地球形变，形变又导致岁差、章动、极移的变化，后者又引起重力场的变化，等等。当然，二级效应比较小，在一般情况下无须考虑。

不过，就目前的观念而言，若论及随时间变化的重力场，则是指扣除了有规律的随时间变化的部分之后的场。由日月潮汐引起的瞬时场的变化（包括附加效应）具有确定的规律，因而不在考虑之列。因而，后面论及的地球重力场的变化，均不包括瞬时潮汐影响。瞬时潮汐影响是指，在引潮力的作用之下，地球随之发生形变，形变导致附加场，附加场导致进一步的形变，后者又导致二阶附加场，等等。然而，有的形变尽管也由引潮力诱发，但属于永久性形变，不能通过潮汐理论描述，由此而导致的变化则属于重力场的变化。另外，由于重力场包含离心力部分，而地球旋转速度的改变可以改变离心力。因此，重力场随时间的变化（不包含瞬时潮汐效应）起因于两种因素：

（1）物质的迁移以及密度变化。

（2）旋转角速度的变化。

由于地球的旋转角速度的变化比较小，因而对变化场的贡献比较小。密度变化包含多种含义。比如，即使没有发生物质迁移，也有可能发生密度变化。比如，温度变化之后会影响物质的密度。至于物质的迁移，则有多种形式，诸如不规则形变（包括核幔边界的形变），地幔对流，海底扩张，板块运动，火山喷发，山脉增长，冰盖融化，冰山漂移，沙漠推进，水源变迁（包括河水流动，河流改道，冰雪消融），地下水位变化，降雨、雪等。从本质上讲，地球的质量迁移就是物质的重新分布，从而改变原来的重力场。显然，由质量迁移而引起的重力变化是非常复杂的，一般情况下只能估计大概的量级。

监测重力场变化具有重要意义。除了反演物质迁移（包括冰川融化，地下水变迁等）之外，还有可能判明内核的超速旋转。

2.5.1 重力场变化的一般表述

重力的一般表达式可以写成

$$\boldsymbol{g} = \nabla(V+Q) \equiv \nabla W \tag{2.151}$$

其中：$W=V+Q$ 是地球的重力位，V 和 Q 分别是地球的引力位和离心力位：

$$V = G\int_{\Omega}\frac{\rho(x,t)}{l}\mathrm{d}\tau, \quad Q = \frac{1}{2}\omega^2(t)(x_1^2+x_2^2) \tag{2.152}$$

其中：Ω 是地球域，在一般情况下它与时间有关；$\rho(x,t)$ 和 $\omega(t)$ 分别是地球的物质密度和旋转角速率，均随时间而变。由于场点以及梯度算符与时间无关，因而，重力的变化可以写成

$$\dot{\boldsymbol{g}} = \nabla(\dot{V}+\dot{Q}) = \nabla\dot{W} \tag{2.153}$$

这就是说，只需要研究重力位随时间的变化规律即可。根据式(2.152)，有

$$\dot{W} = G\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega}\frac{\rho(x,t)}{l}\mathrm{d}\tau\right) + \omega(t)\dot{\omega}(t)(x_1^2+x_2^2) \tag{2.154}$$

通常，旋转速率的变化非常小，可以忽略，因此

$$\dot{W} = G\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega}\frac{\rho(x,t)}{l}\mathrm{d}\tau\right) \tag{2.155}$$

在上式中，由于地球域随时间变化，因而不能将时间导数直接搬运到积分号内部。为了解决上述求导问题，可根据导数的定义（注意到 $\Omega = \Omega(t)$）完成上述积分：

$$\begin{aligned}\dot{W} &= G\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{\Omega(t+\Delta t)}\frac{\rho(x,t+\Delta t)}{l}\mathrm{d}\tau - \int_{\Omega(t)}\frac{\rho(x,t)}{l}\mathrm{d}\tau}{\Delta t}\\ &= G\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{\Omega(t)+\frac{\partial\Omega}{\partial t}\Delta t}\frac{\rho(x,t)+\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta t}{l}\mathrm{d}\tau - \int_{\Omega(t)}\frac{\rho(x,t)}{l}\mathrm{d}\tau}{\Delta t}\\ &= G\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{\frac{\partial\Omega}{\partial t}\Delta t}\frac{\rho(x,t)}{l}\mathrm{d}\tau + \int_{\Omega(t)}\frac{\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta t}{l}\mathrm{d}\tau}{\Delta t} = G\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{\frac{\partial\Omega}{\partial t}\Delta t}\frac{\rho(x,t)}{l}\mathrm{d}\tau}{\Delta t} + G\int_{\Omega(t)}\frac{\dot{\rho}}{l}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{2.156}$$

在上边的推演中，只保留到了一阶小量。$\frac{\partial\Omega}{\partial t}\Delta t$ 表示地球域的增量 $\Delta\Omega$，它又可以表示成$\frac{\partial\Omega}{\partial r}\Delta r$，其中 r 表示地心至地面的距离。但当$\frac{\partial\Omega}{\partial r}\Delta r$ 很小时，下面的关系是成立的：

$$\int_{\frac{\partial\Omega}{\partial r}\Delta r}\frac{\rho(x,t)}{l}\mathrm{d}\tau = \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_{\Omega}\frac{\rho(x,t)}{l}\mathrm{d}\tau\right)\Delta r$$

将上式代入式(2.156) 即得

$$\dot{W} = G\frac{\partial}{\partial r}\left(\int_{\Omega}\frac{\rho(x,t)}{l}\mathrm{d}\tau\right)\dot{r} + G\int_{\Omega(t)}\frac{\dot{\rho}}{l}\mathrm{d}\tau \tag{2.157}$$

或者写成

$$\dot{W} = G\,\dot{r}\,\frac{\partial V}{\partial r} + G\int_{\Omega(t)}\frac{\dot{\rho}}{l}\mathrm{d}\tau \tag{2.158}$$

其中：$\dot{r}$ 表示地球表面的变化率，实际上也是地表沿径向的形变率，或者可近似地看做是高程的变化率，其量值很小，可通过空间监测技术（如 GPS 监测）获得。将式(2.158)代入式(2.153）可以得到重力变化表达式

$$\dot{\boldsymbol{g}} = \nabla\dot{W} = G\dot{r}\frac{\partial}{\partial r}(\nabla V) + G\nabla\left(\int_{\Omega}\frac{\dot{\rho}}{l}\mathrm{d}\tau\right) = G\dot{r}\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial r} + G\int_{\Omega}\dot{\rho}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{l^3}\mathrm{d}\tau \tag{2.159}$$

若只考虑径向重力变化，则有如下方程

$$\dot{g}_r = \partial_r\dot{W} = G\dot{r}\frac{\partial}{\partial r}(\partial_r V) + G\partial_r\left(\int_{\Omega}\frac{\dot{\rho}}{l}\mathrm{d}\tau\right) = G\dot{r}\frac{\partial g_r}{\partial r} + G\int_{\Omega}\dot{\rho}\frac{1}{l^2}\mathrm{d}\tau \tag{2.160}$$

其中：g_r 表示径向重力，近似等于重力模。

在有的情况下，若能判明密度没有变化或变化非常小以致可以忽略（但在什么情况下可以忽略要依具体情况而定），则重力变化具有非常简单的形式：

$$\dot{\boldsymbol{g}} = G\,\dot{r}\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial r},\quad \dot{g}_r = G\,\dot{r}\frac{\partial g_r}{\partial r} \tag{2.161}$$

2.5.2 重力场变化的张量展开表示

我们将引力位写成

$$V(P) = -G\int_{\Omega} \frac{\rho}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\tau \tag{2.162}$$

令

$$f(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{2.163}$$

则有如下的泰勒展开式

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') &= f(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial f}{\partial x'^{i}}\bigg|_{(r'=0)} x'^{i} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x'^{i}\partial x'^{j}}\bigg|_{(r'=0)} x'^{i}x'^{j} \\ &\quad + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x'^{i}\partial x'^{j}\partial x'^{k}}\bigg|_{(r'=0)} x'^{i}x'^{j}x'^{k} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x'^{i_1}\partial x'^{i_2}\cdots\partial x'^{i_n}}\bigg|_{(r'=0)} x'^{i_1}x'^{i_2}\cdots x'^{i_n} \end{aligned} \tag{2.164}$$

其中:指标 i_n 取 1, 2, 3, 同时采用了爱因斯坦求和约定。上式中的偏导数（直到 6 阶）由下式给出（Shen, 2005）:

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'^{i}} = \frac{x_i - x'_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\bigg|_{(r'=0)} = \frac{x_i}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x'^{j}\partial x'^{i}} = \left|3\frac{(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\right|_{(r'=0)} = \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x'^{k}\partial x'^{j}\partial x'^{i}} &= \left|\frac{15(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)(x_k - x'_k)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^7} - \frac{3(x_i - x'_i)\delta_{jk}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^5} - \frac{3(x_j - x'_j)\delta_{ki}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^5}\right. \\ &\quad \left. - \frac{3(x_k - x'_k)\delta_{ij}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^5}\right|_{(r'=0)} = \frac{15x_i x_j x_k}{r^7} - \frac{3x_i\delta_{jk}}{r^5} - \frac{3x_j\delta_{ki}}{r^5} - \frac{3x_k\delta_{ij}}{r^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f}{\partial x'^{i_4}\cdots\partial x'^{i_1}} &= \frac{105x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}}{r^9} - \frac{15\delta_{i_1i_4}x_{i_2}x_{i_3}}{r^7} - \frac{15x_{i_1}\delta_{i_2i_4}x_{i_3}}{r^7} - \frac{15x_{i_1}x_{i_2}\delta_{i_3i_4}}{r^7} \\ &\quad - \frac{15x_{i_1}x_{i_4}\delta_{i_2i_3}}{r^7} - \frac{15x_{i_2}x_{i_4}\delta_{i_1i_3}}{r^7} - \frac{15x_{i_3}x_{i_4}\delta_{i_1i_2}}{r^7} \\ &\quad + \frac{3\delta_{i_1i_4}\delta_{i_2i_3}}{r^5} + \frac{3\delta_{i_2i_4}\delta_{i_1i_3}}{r^5} + \frac{3\delta_{i_3i_4}\delta_{i_1i_2}}{r^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 f}{\partial x'^{i5}\cdots\partial x'^{i1}} &= \frac{945x_{i_1}\cdots x_{i_5}}{r^{11}} - \frac{105\delta_{i_1i_5}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}}{r^9} - \frac{105\delta_{i_2i_5}x_{i_1}x_{i_3}x_{i_4}}{r^9} \\ &\quad - \frac{105\delta_{i_3i_5}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_4}}{r^9} - \frac{105\delta_{i_4i_5}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}}{r^9} \\ &\quad - \frac{105\delta_{i_1i_4}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_5}}{r^9} - \frac{105\delta_{i_2i_4}x_{i_1}x_{i_3}x_{i_5}}{r^9} - \frac{105\delta_{i_3i_4}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_5}}{r^9} \\ &\quad + \frac{15\delta_{i_1i_4}\delta_{i_2i_5}x_{i_3}}{r^7} + \frac{15\delta_{i_1i_4}\delta_{i_3i_5}x_{i_2}}{r^7} + \frac{15\delta_{i_2i_4}\delta_{i_1i_5}x_{i_3}}{r^7} \\ &\quad + \frac{15\delta_{i_2i_4}\delta_{i_3i_5}x_{i_1}}{r^7} + \frac{15\delta_{i_3i_4}\delta_{i_1i_5}x_{i_2}}{r^7} + \frac{15\delta_{i_3i_4}\delta_{i_2i_5}x_{i_1}}{r^7} \end{aligned}$$

$$
-\frac{105\delta_{i_1i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}}{r^9}-\frac{105\delta_{i_2i_3}x_{i_1}x_{i_4}x_{i_5}}{r^9}-\frac{105\delta_{i_3i_1}x_{i_2}x_{i_4}x_{i_5}}{r^9}
$$

$$
+\frac{15\delta_{i_1i_2}\delta_{i_3i_5}x_{i_4}}{r^7}+\frac{15\delta_{i_1i_2}\delta_{i_4i_5}x_{i_3}}{r^7}+\frac{15\delta_{i_1i_3}\delta_{i_2i_5}x_{i_4}}{r^7}
$$

$$
+\frac{15\delta_{i_1i_3}\delta_{i_4i_5}x_{i_2}}{r^7}+\frac{15\delta_{i_2i_3}\delta_{i_1i_5}x_{i_4}}{r^7}+\frac{15\delta_{i_2i_3}\delta_{i_4i_5}x_{i_1}}{r^7}
$$

$$
+\frac{15\delta_{i_1i_4}\delta_{i_2i_3}x_{i_5}}{r^7}+\frac{15\delta_{i_2i_4}\delta_{i_1i_3}x_{i_5}}{r^7}+\frac{15\delta_{i_3i_4}\delta_{i_1i_2}x_{i_5}}{r^7}
$$

$$
\frac{\partial^6 f}{\partial x'^{i_6}\cdots\partial x'^{i_1}}=\frac{10395x_{i_1}\cdots x_{i_6}}{r^{13}}-\frac{105\delta_{i_1i_6}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}}{r^{11}}-\frac{945\delta_{i_2i_6}x_{i_1}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}}{r^{11}}
$$

$$
-\frac{945\delta_{i_3i_6}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_4}x_{i_5}}{r^{11}}-\frac{945\delta_{i_4i_6}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_5}}{r^{11}}-\frac{945\delta_{i_5i_6}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}}{r^{11}}
$$

$$
-\frac{945\delta_{i_1i_5}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_6}}{r^{11}}-\frac{945\delta_{i_2i_5}x_{i_1}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_6}}{r^{11}}
$$

$$
-\frac{945\delta_{i_3i_5}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_4}x_{i_6}}{r^{11}}-\frac{945\delta_{i_4i_5}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_6}}{r^{11}}
$$

$$
-\frac{945\delta_{i_1i_4}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_5}x_{i_6}}{r^{11}}-\frac{945\delta_{i_2i_3}x_{i_1}x_{i_4}x_{i_5}x_{i_6}}{r^{11}}
$$

$$
-\frac{945\delta_{i_3i_4}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_5}x_{i_6}}{r^{11}}
$$

$$
+\frac{105\delta_{i_1i_5}\delta_{i_2i_6}x_{i_3}x_{i_4}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_1i_5}\delta_{i_3i_6}x_{i_2}x_{i_4}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_1i_5}\delta_{i_4i_6}x_{i_2}x_{i_3}}{r^9}
$$

$$
+\frac{105\delta_{i_2i_5}\delta_{i_1i_6}x_{i_3}x_{i_4}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_2i_5}\delta_{i_3i_6}x_{i_1}x_{i_4}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_2i_5}\delta_{i_4i_6}x_{i_2}x_{i_3}}{r^9}
$$

$$
+\frac{105\delta_{i_3i_5}\delta_{i_1i_6}x_{i_2}x_{i_4}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_3i_5}\delta_{i_2i_6}x_{i_1}x_{i_4}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_3i_5}\delta_{i_4i_6}x_{i_2}x_{i_3}}{r^9}
$$

$$
+\frac{105\delta_{i_4i_5}\delta_{i_1i_6}x_{i_2}x_{i_3}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_4i_5}\delta_{i_2i_6}x_{i_1}x_{i_3}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_4i_5}\delta_{i_3i_6}x_{i_1}x_{i_2}}{r^9}
$$

$$
+\frac{105\delta_{i_1i_4}\delta_{i_2i_6}x_{i_3}x_{i_5}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_1i_4}\delta_{i_3i_6}x_{i_1}x_{i_5}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_1i_4}\delta_{i_5i_6}x_{i_2}x_{i_3}}{r^9}
$$

$$
+\frac{105\delta_{i_2i_4}\delta_{i_1i_6}x_{i_3}x_{i_5}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_2i_4}\delta_{i_3i_6}x_{i_1}x_{i_5}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_2i_4}\delta_{i_5i_6}x_{i_1}x_{i_3}}{r^9}
$$

$$
+\frac{105\delta_{i_3i_4}\delta_{i_1i_6}x_{i_2}x_{i_5}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_3i_4}\delta_{i_2i_6}x_{i_1}x_{i_5}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_3i_4}\delta_{i_5i_6}x_{i_1}x_{i_2}}{r^9}
$$

$$
+\frac{105\delta_{i_1i_4}\delta_{i_2i_5}x_{i_3}x_{i_6}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_1i_4}\delta_{i_3i_5}x_{i_2}x_{i_6}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_2i_4}\delta_{i_1i_5}x_{i_3}x_{i_6}}{r^9}
$$

$$
+\frac{105\delta_{i_2i_4}\delta_{i_3i_5}x_{i_1}x_{i_6}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_3i_4}\delta_{i_1i_5}x_{i_2}x_{i_6}}{r^9}+\frac{105\delta_{i_3i_4}\delta_{i_2i_5}x_{i_1}x_{i_6}}{r^9}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{15\delta_{i_1i_4}\delta_{i_2i_5}\delta_{i_3i_6}}{r^7}+\frac{15\delta_{i_1i_4}\delta_{i_3i_5}\delta_{i_2i_6}}{r^7}+\frac{15\delta_{i_2i_4}\delta_{i_1i_5}\delta_{i_3i_6}}{r^7} \\
&+\frac{15\delta_{i_2i_4}\delta_{i_3i_5}\delta_{i_1i_6}}{r^7}+\frac{15\delta_{i_3i_4}\delta_{i_1i_5}\delta_{i_2i_6}}{r^7}+\frac{15\delta_{i_3i_4}\delta_{i_2i_5}\delta_{i_1i_6}}{r^7} \\
&-\frac{945\delta_{i_1i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}x_{i_6}}{r^{11}}-\frac{945\delta_{i_2i_3}x_{i_1}x_{i_4}x_{i_5}x_{i_6}}{r^{11}}-\frac{945\delta_{i_3i_1}x_{i_2}x_{i_4}x_{i_5}x_{i_6}}{r^{11}} \\
&-\frac{105\delta_{i_1i_2}\delta_{i_3i_6}x_{i_4}x_{i_5}}{r^{11}}-\frac{105\delta_{i_1i_2}\delta_{i_4i_6}x_{i_3}x_{i_5}}{r^{11}}-\frac{105\delta_{i_1i_2}\delta_{i_5i_6}x_{i_3}x_{i_4}}{r^{11}} \\
&-\frac{105\delta_{i_2i_3}\delta_{i_1i_6}x_{i_4}x_{i_5}}{r^{11}}-\frac{105\delta_{i_2i_3}\delta_{i_4i_6}x_{i_1}x_{i_5}}{r^{11}}-\frac{105\delta_{i_2i_3}\delta_{i_5i_6}x_{i_1}x_{i_4}}{r^{11}} \\
&-\frac{105\delta_{i_3i_1}\delta_{i_2i_6}x_{i_4}x_{i_5}}{r^{11}}-\frac{105\delta_{i_3i_1}\delta_{i_4i_6}x_{i_2}x_{i_5}}{r^{11}}-\frac{105\delta_{i_3i_1}\delta_{i_5i_6}x_{i_2}x_{i_4}}{r^{11}} \\
&+\frac{105\delta_{i_1i_2}\delta_{i_3i_5}x_{i_4}x_{i_6}}{r^7}+\frac{105\delta_{i_1i_2}\delta_{i_4i_5}x_{i_3}x_{i_6}}{r^7}+\frac{105\delta_{i_1i_3}\delta_{i_2i_5}x_{i_4}x_{i_6}}{r^7} \\
&+\frac{105\delta_{i_1i_3}\delta_{i_4i_5}x_{i_2}x_{i_6}}{r^7}+\frac{105\delta_{i_2i_3}\delta_{i_1i_5}x_{i_4}x_{i_6}}{r^7}+\frac{105\delta_{i_2i_3}\delta_{i_4i_5}x_{i_1}x_{i_6}}{r^7} \\
&+\frac{105\delta_{i_1i_4}\delta_{i_2i_3}x_{i_5}x_{i_6}}{r^7}+\frac{105\delta_{i_2i_4}\delta_{i_1i_3}x_{i_5}x_{i_6}}{r^7}+\frac{105\delta_{i_3i_4}\delta_{i_1i_2}x_{i_5}x_{i_6}}{r^7} \\
&-\frac{15\delta_{i_1i_2}\delta_{i_3i_5}\delta_{i_4i_6}}{r^7}-\frac{15\delta_{i_1i_2}\delta_{i_4i_5}\delta_{i_3i_6}}{r^7}-\frac{15\delta_{i_1i_3}\delta_{i_2i_5}\delta_{i_4i_6}}{r^7} \\
&-\frac{15\delta_{i_1i_3}\delta_{i_4i_5}\delta_{i_2i_6}}{r^7}-\frac{15\delta_{i_2i_3}\delta_{i_1i_5}\delta_{i_4i_6}}{r^7}-\frac{15\delta_{i_2i_3}\delta_{i_4i_5}\delta_{i_1i_6}}{r^7} \\
&-\frac{15\delta_{i_1i_4}\delta_{i_2i_3}\delta_{i_5i_6}}{r^7}-\frac{15\delta_{i_2i_4}\delta_{i_1i_3}\delta_{i_5i_6}}{r^7}-\frac{15\delta_{i_3i_4}\delta_{i_1i_2}\delta_{i_5i_6}}{r^7} \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{2.165}
$$

根据上述展开式，如果观测了大量的卫星数据，特别是通过能量法（Visser et al.，2003；Gerlach and Foeldvary et al.，2003；Gerlach and Sneeuw et al.，2003）测得引力位数据，利用最小二乘原理即可确定各阶张量。如果对应于每个时段（比如一个月或更短），均求解出各阶张量，则可考察张量的变化，这种变化反映了地球系统内部物质的迁移。

2.5.3 重力场变化的球谐展开表示

地球引力位在地球外部是调和函数，可以采用球谐展开：

$$
V(r,\theta,\lambda;t) = \frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[a_{nm}(t)\cos m\lambda + b_{nm}(t)\sin m\lambda\right]P_{nm}(\cos\theta) \tag{2.166}
$$

其中：GM 是引力常数与地球质量的乘积；$P_{nm}(\cos\theta)$ 是 Legendre 缔合多项式；$a_{nm}(t)$ 和 $b_{nm}(t)$ 是球谐系数，与时间有关。

对方程（2.166）作梯度运算即可得到引力。假定在某个时间段（如一天或一个月，取决于实际需要以及能够确定球谐系数的能力）认为 $a_{nm}(t)$ 和 $b_{nm}(t)$ 是常数，则可根据卫星观测值并应用最小二乘方法求解球谐系数。比较不同时间段所确定的球谐系数即可看出球谐系数

随时间的演化，因而也就确定了引力位（包括引力）随时间的演化。为了能够采用最小二乘法求解球谐系数，必须采用截断的球谐展开表达式，即

$$V(r,\theta,\lambda;t) = \frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}[a_{nm}(t)\cos m\lambda + b_{nm}(t)\sin m\lambda]P_{nm}(\cos\theta) \tag{2.167}$$

其中：N 是正整数。按一般的观点，N 越大，模型越精确，但相应地会增加工作量。然而，如果级数（2.166）在地面附近不收敛，则会遇到困难。球谐展开的收敛性问题是一个难题，引起了不少大地测量学者的关注（Moritz，1961，1978，1980；Petroskaya，1974；Sjöberg，1980，1984；Rummel et al.，1993；Shen et al.，1993；Wang，1997；Shen，2005b）。

2.5.4 地下水位的升降对重力场的影响

下面，我们将通过一个简例说明地下水位变化对重力场的影响。地下水位升降的变化对重力场有明显影响（力武常次，1978；张国民等，2001）。水位发生变化之后，影响到岩石的湿度，从而改变了物质的密度。若采用无限平面模型，那么，由于水位变化而导致的重力变化可以表示成如下形式（张国民等，2001）：

$$\Delta g = 2\pi G\Delta\rho H \tag{2.168}$$

其中：$\Delta\rho$ 是水位升降后物质的密度的变化；H 表示水位变化的高度。

欲推导上式，可将厚度为 H、密度为 $\Delta\rho$ 的无限大平面以计算点 P 为中心按同心圆划分，第 i 个圆面的半径记为 r_i。这样，半径为 r_i 的物质圆形层实际上相当于高度（厚度）为 H 的圆柱体，它产生于 P 点的引力为（管泽霖和宁津生，1981）

$$\begin{aligned} g &= \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{G\int_0^{2\pi}\int_0^{H}\int_0^{r}\frac{\Delta\rho}{[r^2+(H-z)^2]^{1/2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z\right\} \\ &= G\Delta\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{H}\int_0^{r}\frac{H-z}{(r^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z = 2\pi G\Delta\rho(r+H-\sqrt{r^2+H^2}) \end{aligned} \tag{2.169}$$

这里采用了柱坐标，其中 G 是引力常数，P 点的坐标为 $(0,0,H)$。

令 $r\to\infty$，便得到无限大物质层所产生的引力，亦即式（2.168）所表示的重力变化。若 H 以米为单位，则 Δg 的单位为毫伽（mGal）。在实际应用中，水的升降区域往往有限，采用方程（2.168）必然会产生误差。这时，需要采用（2.169）。在什么条件下可以采用（2.168）呢？这只要取式（2.168）与式（2.169）之差即可判明：

$$\delta g = 2\pi G\Delta\rho(r-\sqrt{r^2+H^2}) \tag{2.170}$$

正好给出误差的大小。当 H 固定时，误差随着 r 的增大而减小。力武常次（1978）曾经对我国华北地区的水位变化进行了分析，那里的水位变化小于 3m，空隙度（即 $\Delta\rho$）小于 0.25 $\mathrm{g/cm^3}$。这时，只要 r 大于 160m，即可保证由式（2.168）求出的重力变化的精度高于 1 微伽（μGal）。

在测定水位时，也许高程会发生变化（张国民等，2001）。这时，所测定的水位变化幅度 H 之中含有虚假信号 δH。如果我们写出

$$H = H_0 + \delta H \tag{2.171}$$

其中 H_0 是真实水位变化，那么，真正由水位变化而引起的重力变化为

$$\Delta g = 2\pi G\Delta\rho(H-\delta H) \tag{2.172}$$

2.5.5 重力异常变化

地球重力场是地球内部物质密度分布的一种表现形式。重力场的变化则与地球的形变、

物质的迁移、密度场以及应力场的变化密切相关。重力场变化的异常部分（简称重力异常变化）则是地震学家非常感兴趣的研究对象，它很有可能对应于地震的孕育过程。

1965年日本松代地震震群的重力变化显示（张国民等，2001），在震前以及地震活动期，震区附近的重力值一直呈下降趋势，总幅度达90微伽，但高程却持续上升，幅度达25cm，震群停止之后，重力又逐渐恢复到了以前的值；1975年海城地震前后的重力测量显示，震前重力值大幅度下降，下降幅度达到353微伽，震后又大幅度上升，其量级达到382微伽；唐山地震（1976）区的重力测量值表明，震前的重力值持续上升，幅度达150微伽左右，震后的重力值又逐渐恢复；龙陵地震（1976）前后的测量显示，震后的重力值下降了300微伽左右。这些实例表明，重力异常变化与地震的孕育及发生有非常密切的关系。地震发生前，重力异常逐渐增大或逐渐减小，但地震之后总是逐渐恢复到接近以前的水平。为了能预测地震，需要研究重力异常变化与地震机制之间的联系，这种联系可能非常复杂，而且它们之间的联系也并非必然。原因很简单，导致重力异常变化的因素很多，未必都与地震有关。但作为一种相关因素，如果能尽可能多地排除其他干扰因素（比如很容易排除潮汐的主要影响，因为它具有非常明显的周期特性），则重力异常变化与地震孕育之间的关系就会更为密切一些，因而对地震的预测也就更有把握一些。

重力异常变化可能由高程变化引起，也有可能由地壳密度变化或物质迁移引起，更有可能是多种因素的综合。这里我们来讨论一下由高程变化以及地壳密度变化引起的重力变化。

若仅由高程变化引起重力变化，那么，其量值就是著名的自由空气改正公式（Heiskanen and Moritz，1967）：

$$\Delta g = -0.3086H(\mathrm{mGal}) \tag{2.173}$$

其中：H 是高程变化，升高为正，降低为负，以 m 为单位。上式取负号，是因为地面点若升高则重力值便减小之故。然而，现在会出现这样一个问题：测点的高程升高之后，测点之下的物质密度（或者说测站附近的地壳密度）是否有变化呢？或者，即便测站没有升降，或许也会有密度变化。于是，就有了如下的三种情形（假定测站升高）：

（1）密度不变，这是因为周围的物质挤压或填充使测站升高。

（2）密度减小，这可能是由于温度升高或是其他原因导致体积膨胀所致。

（3）同时有外围物质迁移到岩层空隙（比如地下水升降），但这部分物质并不影响高程变化。

情形1　假定密度不变。测站升高 H 而又保持测站下的地壳密度不变，必然有物质填充进来，其填充的量相当于厚度为 H 的地面物质层（因而密度为 $2.67\mathrm{g/cm^3}$）。这一层物质会增加测点的重力值，其量值就是层间改正 $0.1118H$（管泽霖和宁津生，1981）。因此，在此情形下，重力异常变化就是著名的布格改正（但反号）：

$$\Delta g^{(1)} = (-0.3086+0.1118)H = -0.1968H(\mathrm{mGal}) \tag{2.174}$$

情形2　假定密度减小。根据扩容假说（张国民等，2001），地震孕育到一定阶段，孕震体会由于应力作用而发生体积膨胀，从而使物质的密度减小。为了推导模型，需要假定孕震体的形状及大小。如果假定膨胀前孕震体是一高为 h、底面半径为 a 的圆柱体，膨胀之后，只是高度增加了 H，那么，不难推出上述孕震体的质量亏损为（根据质量守恒方程 $\rho\pi a^2 h = \rho'\pi a^2(h+H)$，准确到 H/h 的一阶项）：

$$\Delta\rho = \rho\left(\frac{h}{h+H}-1\right) \simeq -\frac{H}{h}\rho \tag{2.175}$$

其中:ρ 是通常的地面岩层平均密度 $2.67 g/cm^3$。由上式表示的质量亏损相当于产生了一个附加的引力作用，对测站的影响可以用圆柱体计算公式表示（管泽霖和宁津生，1981；张国民等，2001）:

$$\delta g(a,h,H) = -2\pi G\rho\left(1-\sqrt{1+\frac{a^2}{h^2}}+\frac{a}{h}\right)H \tag{2.176}$$

这一项是负值，因为质量亏损使测站点的重力值变小。假如没有这一质量亏损，我们就回到了情形 1，即方程（2.174）。因此，对于情形 2，重力异常的变化为

$$\Delta g^{(2)} = -\left[0.1968+0.1118\left(1+\frac{a}{h}-\sqrt{1+\frac{a^2}{h^2}}\right)\right]H(\mathrm{mGal}) \tag{2.177}$$

或者将上式写成

$$\Delta g^{(2)} = -0.3086H+0.1118\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{h^2}}-\frac{a}{h}\right)H(\mathrm{mGal}) \tag{2.178}$$

由此可以看出，情形 2 下的重力异常变化介于自由空气改正（反号）和布格改正（反向）之间。

情形 3　同时有外围物质迁移填充，但这部分物质并不影响高程变化。这时，若假定孕震体仍然是一高为 h、底面半径为 a 的圆柱体，物质迁移填充的密度为 $\delta\rho$，那么，由此而引起的重力异常变化为（仍然采用圆柱体计算公式）:

$$\delta g(a,h) = 2\pi G\delta\rho\left(h-\sqrt{h^2+a^2}\right) \tag{2.179}$$

这里取正号是因为这部分物质使测站的重力值增加。于是，这时的重力异常变化可以表示成

$$\Delta g^{(3)} = -0.3086H+0.1118\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{h^2}}-\frac{a}{h}\right)H+2\pi G\delta\rho\left(h-\sqrt{h^2+a^2}\right)(\mathrm{mGal}) \tag{2.180}$$

这也是在非常一般的情形下，重力异常变化的模型。

2.5.6　解释与预测

通常，预测比解释要困难得多。对于描述某种现象（如地震）的理论，判别其好坏的标准首先是看它能否解释已有（或已发生）的现象，更重要的是看它能否预测未来发生的同类事件。就地震预测而言，这当然是一个尚未解决的难题。

对于前面提到的海城、唐山、龙陵等地震，发震前，重力异常变化分别达到 350、130、300 微伽，而相应的高程变化均在几个厘米量级。如果仅用高程变化来解释重力异常变化，只能解释 10% 左右（张国民等，2001）。如果采用方程（2.180），则能基本上解释上述震例。这就是说，在地震孕育过程中，除了高程有变化之外，还伴随有物质的迁移，导致地壳密度的重新分布。就上边给出的三个震例而言，重力异常变化达到一百多甚至数百微伽，高程的变化只能解释几十微伽，因而相比于物质的重新分布，高程变化居于次要地位。

今假定在某个地震活动区布设了重力网以及水准网并作定期的重复观测。如果重力异常变化达到上百微伽的数量级，则需倍加注意。如果高程变化剧烈，则有可能将上述重力异常变化归于高程变化。但如果高程变化较小（只有几个厘米），则可将上述重力异常变化的大部分归于地下物质的迁移。一般情况下，无论是高程变化还是物质的迁移，都反映了地壳内部应力场的变化。通过对应力场的研究，可以提供预报地震的有用指标。

§2.6 应力与应变张量简述

本节只对应力、应变、应力张量以及应变张量作偏重于理论方面的概述，偏重于应用方面的论述及其在解决实际问题中的应用（如研究地壳的形变问题）将在第8章展开。

2.6.1 应变与应变张量

一个物体在受到力的作用以后会发生变形，这种变形称为应变。最简单的情形是单向应变，它是单位长度杆件在受力前后的变化，称为伸长度，可表示为

$$e=(L-L_0)/L_0 \tag{2.181}$$

其中：L_0 和 L 分别为杆件在受力前和受力后的长度。若用 e_S 表示杆件横截面上的某个与轴线相交的直线方向的伸长度，那么，实验指出

$$e_S=ve \tag{2.182}$$

其中 v 是泊松比（取正值）。由不同材料构成的杆件，泊松比不同。一般情况下，泊松比在1/4与1/3之间。

假定一个物体 Ω 受到了外力的作用，那么，物体中的任意一点都有可能发生变化。这种变化就是位移，也即位置的改变。如果物体中的任意两点之间的距离都没有发生变化（尽管每一个点都有可能产生了位移），那么，该物体就没有发生变形，这也是通常意义下的物体的整体运动（包括整体平动和整体旋转），也即理想刚体的情形。如果物体中至少可以找到两点，它们之间的距离发生了变化，则说该物体（除了产生整体平动以及旋转之外）产生了变形。通常我们假定弹性体在变形前后（包括变形过程）都是连续的。因此，如果物体中至少可以找到两点，它们之间的距离发生了变化，那么，在该物体中必定可以找到无数个点对（一个点对是指不相同的两点），就每一个点对而言，它们之间的距离也产生了变化。我们说一个物体有位移，那是指在该物体中至少可以找到产生了位移的一点。当然，只要在物体中存在一点有位移，那么，必定在该物体中可以找到无数个点有位移。一个物体有位移未必就有形变，反过来，一个物体有形变必定有位移。

假定物体 Ω 受外力作用后变为 Ω'，当撤除外力之后，物体又逐渐恢复原状 Ω（这是弹性体的假设之一）。于是，对于 Ω 中的任意一点 $P(x^i)$，它在受力之后变为 Ω' 中的 $P'(x'^i)$，而 $P(x^i)$ 与 $P'(x'^i)$ 之间是一一对应的（它们之间存在双射关系）。为此我们可以假定 x'^i 是 x^i 的单值连续函数：

$$x'^i=x'^i(x) \tag{2.183}$$

于是，质点由 P 到达 P' 就意味着产生了一个位移

$$u^i=x'^i-x^i \tag{2.184}$$

若对任意 x^i，均有 $u^i=C$ 为常数，则表明物体只有平移，没有转动和变形。

为了研究应变，考察受力前的任意相邻两点 $A(x^i)$ 和 $B(x^i+\mathrm{d}x^i)$ 在受力后的变化情况。上述两点在受力后可表示为 $A'(x^i+u^i)$ 和 $B'(x^i+\mathrm{d}x^i+u'^i)$，其中 u^i 是 A 至 A' 的位移分量，或者简称点 A 的位移分量，$u'^i=u^i+\dfrac{\partial u^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j$ 是点 B 的位移分量。基于式(2.184)，可以写出

$$u'^i-u^i=\Gamma_j^i\mathrm{d}x^j+\Omega_j^i\mathrm{d}x^j \tag{2.185}$$

其中：Γ_j^i 和 Ω_j^i 分别是二阶混合对称张量和反对称张量，分别由下面的方程定义（申文斌，

2005)：

$$\Gamma^i_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.186a}$$

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.186b}$$

$\Gamma^{ii} = \frac{\partial u^i}{\partial x_i}$是线应变，$\Gamma^i_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)(i \neq j)$是角应变，$\Omega^i_j$ 是旋转变化。这就是说，弹性体受力后的位移由三部分组成：平移（刚体频移项）、变形以及转动（刚体转动项）。通常我们最感兴趣的是弹性体的变形。只要给定了 u^i 关于 x 的函数关系，即可求出弹性体的形变及转动。如果这种函数关系是线性的，则称为均匀形变。就均匀形变而言，u^i 可以表示成如下形式：

$$u^i = u^i_0 + c^i_j x^j \tag{2.187}$$

其中：u^i_0 和 c^i_j 均为常数。

沿任意一个方向的伸长度，可按如下方式求出：假定给定了任意一点 P 的应变状态，欲求方向 OP 上的 P 点处的伸长度（其中 O 是原点）。所谓给定了一点的应变状态，是指给定了该点的应变张量 Γ^i_j（它是二阶混合对称应变张量）。至于刚体平移项和刚体旋转项则不属于应变状态中的量，因为它们与变形无关。假定 OP 的方向余弦是 $l^i \equiv l_i$，则可写出沿任意方向 OP 的伸长度为

$$e = l_i \Gamma^i_j l^j \tag{2.188}$$

它是标量（即零阶张量），与参考系的选取无关。

给定了一点的应变状态 Γ^i_j，即可求出沿任意方向的线应变。沿哪个方向具有最大的线应变呢？这实际上就是对方程（2.188）求附有如下条件

$$l_i l^i = 1 \tag{2.189}$$

的拉格朗日极值问题。假如 λ 是所寻求的极值，那么，根据附有条件的拉格朗日极值原理，λ 应满足如下方程（菲赫金哥尔茨，1956）：

$$\frac{\partial e}{\partial l_i} - 2\lambda l^i = 0$$

即

$$\Gamma^i_j l^j - \lambda l^i = 0 \tag{2.190}$$

要使上述方程组有非零解，其充要条件是变元 l^i 前的系数所构成的行列式为零：

$$|\Gamma^i_j - \lambda \delta^i_j| = 0 \tag{2.191}$$

其中：δ^i_j 是 Kronecher 符号。对于上述一元三次方程(2.191)来说，由于 Γ^i_j 的对称性，它必定存在三个实数根，其中最大的一个便是最大线应变，与此所对应的方向余弦就是最大线应变的方向；其中最小的一个便是最小线应变，与此所对应的方向余弦就是最小线应变的方向；介于其间的极值则没有什么特殊性。我们将上述三个极值称为主应变。对应于上述三个主应变的方向称为应变的主轴方向，简称应变主轴。

对于给定的应变状态 Γ^i_j，共有 9 个分量，但独立分量只有 6 个。根据应变的表达式(2.186）可以证明，应变分量 Γ^i_j 之间满足如下的谐和条件

$$\frac{\partial^2 \Gamma^{ij}}{\partial x_i \partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(-\frac{\partial \Gamma^{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma^j_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma^j_i}{\partial x^k}\right) \tag{2.192}$$

谐和条件的作用在于，对于事先给定的或按某种方式求出的应变状态，可以通过检核是否满足谐和条件而判定所给定（或求出）的应变状态是否合理。

2.6.2 应力与应力张量

当外力作用于一个弹性体之后，力可以传递到弹性体的内部。在空间中任意一点的力是一矢量，属于该点的力矢量空间（三维），也叫力向量空间。任意一个体力均可根据它所属的矢量空间中的基底来表示。如果选定了坐标系 x^i，则可将体力 f 表示成

$$f=f^i e_i \tag{2.193}$$

其中：e_i 是三个相互正交的单位矢量，通常与所选的坐标轴 x^i 的方向一致（如此选定的基底也叫自然基底）；f^i 是上述体力在所选基底之下的分量（正如通常所做的，选取自然基底之后，f^i 就是向量 f 沿坐标轴 x^i 方向的分量）。体力既然是矢量，它当然是一阶（逆变）张量，因为它与坐标系的选取无关（但体力的分量与坐标系有关）。在三维欧几里得空间之中，我们可以选取统一的坐标系 x^i，因而可以选取统一的自然基底 e_i。这样，任意一个体力都可用方程（2.193）来表示。我们的讨论就限定在三维欧几里得空间之中（一个矢量空间被赋予我们目前所习用的距离概念之后就变成了欧几里得空间）。

如果我们在每一个体力矢量空间（注意：在弹性体中的任意一点都存在一个体力矢量空间）之中按某种法则选定了惟一的一个体力（密度），那么，体力将构成一个场，称之为体力场。

在体力作用之下，弹性体微元所受的力矩可以表示成

$$\mathrm{d}M^i=\varepsilon^i_{jk}x^j f^k\mathrm{d}\tau$$

其中：$\mathrm{d}\tau$ 是微元体积；$\varepsilon^i_{jk}\equiv\varepsilon_{ijk}\equiv\varepsilon_j^{\ i\ k}\equiv\varepsilon^{ijk}$ 是 Levi-Civita 符号，当 $i\ j\ k$ 是 1 2 3 的偶置换时为 1，奇置换时为 -1，其他情形为零。

于是，作用于整个弹性体的力矩 M^i 可以表示成

$$M^i = \varepsilon^i_{jk}\int_\Omega x^j f^k\mathrm{d}\tau \tag{2.194}$$

其中：Ω 是弹性体所占的空间域，简称弹性体域。

作用于单位面积上的合力称为面力密度，简称面力。面力也是一阶（逆变）张量。给定了面力 F^i 之后，可求出作用于弹性体边界 $\partial\Omega$ 上的合力：

$$\sum{}^i = \int_{\partial\Omega}F^i_S\mathrm{d}\sigma \tag{2.195}$$

因而作用于整个弹性体的力为

$$F^i = \int_\Omega f^i\mathrm{d}\tau + \int_{\partial\Omega}F^i_S\mathrm{d}\sigma \tag{2.196}$$

在弹性体中任意取一个单位截面 $\mathrm{d}\sigma$，其上都存在一个带有方向的面力矢量 X^i。截面 $\mathrm{d}\sigma$ 的方向亦即垂直于该截面的法线方向。然而，法线方向有两个，我们可以选定其中的一个作为截面的正向，用 n 来表示（这里涉及截面的定向问题，我们总是假定弹性体中的任意一个截面是可以定向的，Schutz，1980；申文斌，2005）。为了表明面力是作用于哪个面，我们用 X^i_n 来表示作用于微元面 $n\mathrm{d}\sigma$ 上的面力。这里需注意，X^i_n 只是表明作用于微元面 $n\mathrm{d}\sigma$ 上，并不一定与法线 n 重合。按这种方式界定的面力，称为应力矢量，简称应力。这里需注意应力概念与体力概念的区别。对于取定的一个面，应力矢量是一阶逆变张量。

从弹性体中任意选取一个微元正方体，共有 6 个面，每一个面的正法线方向规定为指向

微元体的外部，因而共有 6 个应力矢量（18 个分量）。然而，如果我们假定弹性体处于平衡态，那么，任意一个微元体积（体积足够小，以致可以看做一个宏观点）所受的合力应该为零。由此可以推出（应用牛顿第三定律，参见钱伟长和叶开沅，1980），分别作用于前后两个面（左右两个面和上下两个面也一样）的应力矢量大小相等方向相反。因此，要描述任意一点的应力状态只需 3 个应力矢量共 9 个分量。这 3 个应力矢量分别作用在前边的面（或称正向 x^1 面）、右边的面（即正向 x^2 面）以及上边的面（正向 x^3 面）。用 τ^i 表示作用于 x^i 正向面的应力矢量。在选定的坐标系 x^i 之下，每一个应力矢量 τ^i 可以通过自然坐标基表示出来

$$\tau^i = \tau^i_j e^j \tag{2.197}$$

其中：e^i 是（矢量）对偶空间中的基矢量；而 τ^i_j 则表示作用于 x^i 正向面的应力矢量的 τ^i（在上述自然坐标基下的）第 j 个分量($j = 1,2,3$)。

应力矢量是一阶（逆变）张量，可将该张量看做是一个行向量。由 3 个行向量构成一个矩阵 τ^i_j，该矩阵是一个二阶混合张量，因为矩阵中的每一行是应力矢量，它们在坐标系变换之下保持不变，因而就矩阵 τ^i_j 而言，它在坐标系变换之下也保持不变，这正是张量所应满足的条件（Weinberg，1972；申文斌，2005）。

我们将弹性体中任意一点 $P(x^i)$ 处的 τ^i_j 称为该点的应力张量，它描述了该点的应力状态，因而也将 τ^i_j 称为应力状态张量，简称应力状态。如果说给定了一点的应力状态，也就表明给定了该点的 9 个应力分量（实际上只有 6 个独立分量，因 τ^i_j 是对称的，见后）。τ^{ii}表示作用于 x^i 面上的应力矢量沿 x^i 方向（即 e_i 方向）的应力分量，称之为法线应力，它起源于压力或者拉力，通常也将 τ^{ii}记作 σ^i，因为一个面上的应力矢量只有一个法线应力分量。τ^i_j($i \neq j$)则表示作用于 x^i 面上的应力矢量沿 x^j 方向的应力分量，称之为切向应力，或者称为剪切应力，简称剪应力。它起源于剪切力，符号通常仍然采用 τ^i_j。

假定给定了弹性体中任意一点 $P(x^i)$ 处的应力张量（或应力状态），则任意方向面上的应力矢量可表示成如下形式：

$$F^i = \tau^i_j n^j \tag{2.198}$$

其中：n^i 是法向 n 的方向余弦。

当弹性体处于力的平衡状态时，体内的任意一个微元都处于力的平衡状态，满足如下平衡方程：

$$\frac{\partial \tau^i_j}{\partial x_j} + f^i = \rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} \tag{2.199}$$

如果以 x^i 为旋转轴对力矩建立平衡方程，则可得到如下关系：

$$\tau^i_j = \tau^j_i$$

即 τ^i_j 构成二阶混合对称张量 τ，它只有 6 个独立分量。

沿任意方向 n^i 的面上的应力矢量，其分量形式由式（2.198）给出。进而，可以写出沿 n^i 方向的应力

$$\sigma_n = n_i \tau^i_j n^j \tag{2.200}$$

与求主应变的方法相同，将 n^i 作为变量，可以采用附有条件($n^i n_i = 1$）的拉格朗日求极值法求出最大或最小的法向应力以及相应的方向。

新老张量之间满足一定的张量变换规律，形如

$$\tau'^j_i = \Lambda^k_i \Omega^j_l \tau^l_k \tag{2.201}$$

其中：$\Lambda_i^{i'}$ 和 $\Omega_{i'}^{i}$ 分别是变换矩阵和逆变换矩阵；应力张量 τ_i^j 的下指标符合协变矢量的变换规则，而上指标符合逆变矢量的变换规则。或者说，下指标的变换规则与自然基的变换规则相同（故称作协变），而上指标的变换规则与自然基之间的逆变规律相同（故称作逆变）。为了简明起见，也为了表述方便，将来只要不涉及坐标变换，我们就不去区分应力张量是否混合张量，而简单地将它看作二阶张量即可，这时，应力张量的分量的两个指标可以任意放置（注意应力张量是对称的）。如果涉及变换，则要将应力张量视为二阶混合（对称）张量来看待，这时张量分量的指标一个在上，一个在下。在完成了变换之后，又可以不去区分它是否为混合张量（申文斌，2005）。

2.6.3 广义胡克定律

对于各向同性弹性体，应力与应变之间满足如下的广义胡克定律（傅容珊和黄建华，2001；申文斌，2005）

$$\tau_j^i = \lambda\theta\delta_j^i + 2\mu\Gamma_j^i \tag{2.202}$$

其中：$\delta_j^i \equiv \delta^{ij}$ 是 Kronecker 符号，λ 和 μ 是拉梅（Lamé）常数，$\theta = \Gamma_i^i$ 是体膨胀系数。上述广义胡克定律表明（注意各向同性假设），只要给定了应变，即可求出应力。反过来，给定了应力也可以求出应变。如果引进一个辅助量 $\Theta = \tau_i^i$，则又可将广义胡克定律表示成如下形式：

$$\Gamma_j^i = \frac{\tau_j^i}{2\mu} - \frac{\lambda\Theta}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\delta_j^i \tag{2.203}$$

§2.7 地球在负荷作用下的变形

外部负荷主要是指大气负荷以及降水（包括降雨、降雪等）负荷，另外还有植被负荷。植被负荷对地球形变的影响比较小，通常可以忽略。降水实际上就是地球体发生的物质迁移（搬运）：通过蒸发、凝聚作用，将某些地域或广大地域的水"搬运"到另外一些地域或局部地域。普通的、微小的搬运过程（即微小降水）不会使地球发生显著形变，因而无须考虑。但大量的搬运过程（大量降水）将会带来显著影响。

2.7.1 负荷作用下的形变

通常，我们感兴趣的是地表物质分布发生变化之后，地球会产生什么样的形变响应。地表物质分布发生变化具有多种形式，如冰川与海洋之间的物质交换，海洋、大气、地下水之间的物质交换，大气层本身的重新分布，降雨、降雪等。在所有这些情况下，可将质量分布的变化表示成一个表面负荷函数 $q(r,\phi,\lambda,t)$。若展开成球谐函数，并令 $r = R$，则有[（参见式(2.99)或式(2.166)]

$$q(\theta,\lambda,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[a_{nm}(t)\cos m\lambda + b_{nm}(t)\sin m\lambda]P_{nm}(\sin\theta) \tag{2.204}$$

我们主要关心的是地球表面负荷的变化以及由此而导致的地球形变。假定负荷变化量的密度分布为 ρ（它可以是水、大气、雪等，或它们的联合效应）。采用简单模型，地表微元负荷（力）可以表示成

$$\mathrm{d}f = \rho\mathrm{d}\tau = n\rho\mathrm{d}h\mathrm{d}\sigma \tag{2.205}$$

其中：n 是微元面 $\mathrm{d}\sigma$ 上的单位法矢，$\mathrm{d}h$ 是沿法线方向的单位厚度。上式的分量格网形式可以

用下式表示（李英冰，2003）：

$$f_k^i = n^i \rho_k \Delta h_k \Delta S \tag{2.206}$$

其中：下指标 k 表示第 k 个格网，所有格网的面积假定相同；上指标 i 则表示沿 x^i 方向的分量。负荷力矩可以表示成

$$m^i = \sum_{k=1}^{N} Rf_k^i = R\sum_{k=1}^{N} n_k^i \rho_k \Delta h_k \Delta S \tag{2.207}$$

其中：R 是地球平均半径，n_k^i 是地心至第 k 个格网中心的向径的方向余弦，可以表示成如下形式：

$$n_k^1 = \sin\theta_k \cos\lambda_k, \quad n_k^2 = \sin\theta_k \sin\lambda_k, \quad n_k^3 = \cos\theta_k \tag{2.208}$$

在上述负荷力矩作用之下，导致的（一阶）重力位变化为（Blewitt et al.，2001；Lavallee and Blewitt，2003；李英冰，2003）

$$\Delta W(\theta,\lambda) = gn^i m_i \tag{2.209}$$

其中 $m_i \equiv m^i$，g 是重力加速度。垂直位移则可表示成

$$u_r(\theta,\lambda) = h\Delta W(\theta,\lambda) = ghn^i m_i \tag{2.210}$$

其中：h 是勒夫数，其经验取值为 -0.290（这里取负号是因为在地表负荷作用之下地面会下沉）。李英冰（2003）指出，就2000年而言，由大气、内陆水和海面异常而导致的地壳垂直变化为1mm左右，若将这一结论限定在两极附近的区域之外，则与Blewitt et al.（2001）得到的结论基本一致。Blewitt et al.（2001）探讨了地球的整体形变模型，综合利用大地测量数据（主要是GPS监测数据）得出如下结论：在2～3月，北极下降3mm，整个北半球呈压缩状，南半球呈膨胀状；在8～9月间，情况正好相反。由此可以推演，就一年的平均结果而言，起源于地表负荷影响的地表的垂直形变量应该在毫米级。

假定某个区域普遍降水达到5cm，水没有渗透而是积于表面，那将意味着该处地面承受了额外的压力大约500Pa，由此可推算固体地面因此而下降的量级。当然，这是一种理想情形。实际上，由于水的渗透作用，给实际估算带来了很大的难度：

（1）一方面，水对其下的物质施加压力，但另一方面，水对其上的物质施加浮力。

（2）渗透到地下的水如何分布，这直接影响到上述压力以及浮力的模型。最有效的办法是通过大量的定点实际监测确定统计经验模式。

对于降雪的情形，则比较容易处理。假定某个区域普遍降雪而构成雪层，厚度为 h，不难实测出上述雪层的密度 ρ。于是，固体地面受到了额外的压力 ρgh，其中 g 是地面重力加速度。据此，根据弹性力学理论（或地球形变理论），可以从理论上给出固体地球表面在降雪以后的下沉量，它与勒夫数有关。同时，还可以进行实际监测而得到实测下沉量。对上述二者进行比较，可以获取地面以下的有关地球物理信息。

如果整个固体地球外部的大气层是与地球刚性连接的，则没有必要考虑大气层对地球形变的影响。如果整个大气层是稳定的，只是随地球一起旋转（但并非刚性），那么，大气层对固体地球的形变的贡献将由大气潮汐（由引潮力所致，参见第4章）决定：大气潮汐破坏了原有的固体地球与大气层之间的相对固定的模式，导致固体地球的附加形变（固体地球本身在引潮力作用之下就会发生形变），这种附加形变在理论上可以计算出来。但实际情况是，大气层并非稳定，而是存在非常强烈的扰动（如大气对流、湍流、季节风等）。这种异常（以后简称扰动）也会使地球产生附加形变。对此，已有很多学者研究了这一效应。Van Dam et al.（1987，1994）的研究表明，在数百公里到1 000公里长的基线上，由于大气扰动负荷而导致

的地球形变，在水平方向可达3~10mm，在垂直方向可达15~25mm。李英冰（2003）的研究则表明，以2000年而言，平均说来，由大气、内陆水和海面异常而导致的地壳垂直变化为1mm左右。

2.7.2 某些特殊的荷载问题

在全球和局部的尺度上，地表的许多变形是由地表载荷引起的，因此有必要建立起在不同时间尺度上地球对这些载荷的响应公式。问题的一般提法是，给定地球整体或其一部分的尺度和力学性质，给定作用在该体上的力和荷载，求地球随时间的变形、应变和应力。本小节内容主要来自 Lambeck（1988），同时参照了中译本。

2.7.2.1 球对称地球的弹性变形

许多全球变形，例如潮汐和自转引起的变形，是由调和位引起的，它们的解对于地球的细部结构不敏感，特别是对于横向结构不敏感。在这种情况下，用全球参数来表示变形观测结果是很方便的。考虑一个 n 次调和的且以频率 σ 作用在一个不一定均匀的弹性球体上的引力位

$$V = \sum_n V_n = \sum_n V'_n(r) S_n e^{j\sigma t} \tag{2.211}$$

为一球谐调和函数。这个位可以是月球的引力位或地表荷载，如冰或水的引力位。

对于这些方程的许多地球物理应用来说，可以把地球看做是处于一种流体静力平衡状态，球对称且无转动。例如，在荷载周期与地球自由振荡周期显著不同时，研究与时间有关的冰和水荷载所引起的变形就是这种情况。而且变形通常是很小的，故可用这些方程的线性化振动形式。

2.7.2.2 球对称地球的粘弹性变形

有表面载荷或受到外部引力的粘弹性球体的变形解，与等价的弹性问题的解十分相似。例如，若粘弹性球体在时刻 $t=0$ 时加了荷载，且此荷载保持为常数，那么其应力与受到相同荷载的等价弹性球体的相同，其应变和变形可由弹性问题求得，只不过弹性模量要代之以与时间有关的参数。这种等价性是通过对应原理建立起来的。对应原理说，对于基于弹性基本假设（4个假设）推出的关于某个弹性介质的任何方程，粘弹性介质都有一个对应的式子，其间的差别只是所有的变量都是在拉普拉斯变换域中定义的，而所有的弹性模量 λ、μ、υ、k 则分别用它们的拉普拉斯变换 $\hat{\lambda}$、$\hat{\mu}$、$\hat{\upsilon}$、$\hat{k}$ 代替。

例如，由表面位荷载 $\hat{V}_n(R,t)$ 造成的线性粘弹性行星的径向变形可在拉普拉斯域中表示为

$$\hat{\mu}(R,s) = [\hat{h}_n(R,s)/g]\hat{V}_n(R,s) \tag{2.212}$$

式中：$\hat{\mu}(R,s)$ 表示经拉普拉斯变换后的变量；s 为拉普拉斯变换参数（量纲为1/时间）。拉普拉斯变换定义为

$$\hat{u}_r(s) = L\{u_r,(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u'(t)\,dt \tag{2.213}$$

一个物体的粘弹性响应经常可用简单的机械模拟装置来近似。一个例子是由平行安装的弹性弹簧和粘性阻尼延迟器组成的开尔文-伏伊特模型。另一个例子是麦克斯韦模型，在该模

型中，弹性元件和粘性元件是串联安装的。弹簧代表弹簧常数为μ的弹性响应，粘性阻尼延迟器代表常数为η的等于牛顿粘滞度的粘性响应。麦克斯韦体在受到力的作用时，最初是弹性响应，产生弹簧的弹性变形，随后是时间常数为$\tau=\eta/\mu$的阻尼延迟器的"蠕动"。将这两种模型组合起来成为标准线性体，或者引入多个平行的麦克斯韦体，每个麦克斯韦体有它自己的时间常数，可得到更符合实际的响应。

对于麦克斯韦流变体得(Peltier, 1984)

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\mu}=\mu s/(s+\tau^{-1})\\&\hat{\lambda}=\left[\lambda s+\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)\tau^{-1}\right]/(s+\tau^{-1})\\&\hat{\upsilon}=\hat{\lambda}/2(\hat{\lambda}+\hat{\mu})\\&\hat{k}=k=\lambda+\frac{2}{3}\mu\end{aligned}\right\}\tag{2.214}$$

勒夫数k(见第4章)可用经拉普拉斯变换后的量来代替相应的弹性模量。例如，对于开尔文地球模型，有

$$\left.\begin{aligned}&\hat{k}'_n(s)=-(1+\tilde{\mu})^{-1}=k'_n\left(1+\frac{1+k'_n}{\tau}\ \frac{1}{s-k'_n/\tau}\right)\\&\hat{h}'_n(s)=\frac{1}{3}(2n+1)\hat{k}'_n(s)=h'_n\left(1+\frac{1+k'_n}{\tau}\ \frac{1}{s-k'_n/\tau}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.215}$$

其中：k'_n和h'_n第n阶勒夫数（见第4章）。

采用Dziewonski and Anderson(1981)的弹性模量和密度，地幔粘滞度取10^{21}Pa，高粘滞度的岩石圈厚度取50km，这样的地球模型具有勒夫数$\hat{k}_n(s)$、$\hat{h}_n(s)$。当s较大(相应于T较小)时，响应实际上是弹性体的；当s较小($\approx10^{-4}$/a)时，响应接近于覆盖在一个液体地幔上的弹性壳的响应。在液体地幔中，荷载引起的应力都已松弛，随着岩石圈中应力的松弛(这里假定岩石圈的粘滞度为10^{25}Pas)进一步演化。因此，这些结果可定性地被解释为调和荷载的松弛谱。时间域中变形的解，可将经拉普拉斯变换了的勒夫数表达式(2.215)或更切合实际的地球模型的等价表达式代入到变形方程(2.212)之中，并取逆拉普拉斯变换得到最终结果(Peltier, 1984)。

2.7.2.3 地表荷载的格林函数

如果荷载只是覆盖地表的一部分，或者只知道该点附近的情况时，通常可采用格林函数法。考虑位于地表$\boldsymbol{r}'$处(流动点)的一个质量单元dm，在同一地表上位于$\boldsymbol{r}$处的引力位为

$$V=\frac{G_G\mathrm{d}M}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{G_G\mathrm{d}M}{R}\sum_{n=0}^{\infty}p_n(\cos\psi)\tag{2.216}$$

式中：G_G为荷载的格林函数；ψ为流动点和场点对坐标原点的张角。由表达式(2.216)计算的由这个点荷载在r处产生的位移为

$$u=\frac{R}{M}\mathrm{d}M\sum_{n=0}^{\infty}h'_nP_n(\cos\psi)e_r+\sum_{n=1}^{\infty}l'_n\frac{\partial}{\partial\psi}P_n(\cos\psi)e_t\tag{2.217}$$

对于一个覆盖在面积A上、密度为$p(r')$、高度为$H(r')$的荷载，则有

$$u=\int_A G_G(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\rho(r')H(r')\mathrm{d}A\tag{2.218}$$

对于径向变形，有

$$G_{Gr} = G_{ur} = \frac{R}{M}\sum_{n=0}^{\infty} h'_n P_n(\cos\psi) \tag{2.219}$$

对于切向变形，有

$$G_G = G_{ut} = \frac{R}{M}\sum_{n=1}^{\infty} l'_n \frac{\partial}{\partial\psi}P_n(\cos\psi) \tag{2.220}$$

随着 n 的增加，荷载勒夫数 h'_n、nk'_n 和 nl'_n 趋近于常数值 h'_∞、k'_∞ 和 l'_∞，故格林函数可方便地写成

$$G_{ur} = \frac{R}{M}h'_\infty \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\psi) + \frac{R}{M}\sum_{n=0}^{\infty}(h'_n - h'_\infty)P_n(\cos\psi)$$

和

$$G_{ut} = \frac{R}{M}l'_\infty \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\psi}P_n(\cos\psi) + \frac{R}{M}\sum_{n=1}^{\infty}(nl'_n - l'_\infty)\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\psi}P_n(\cos\psi)$$

上述两式中，第一项求和可解析表示，而

$$\left.\begin{aligned} G_{ur} &= \frac{R}{2M}\frac{h'_\infty}{\sin(\psi/2)} + \frac{R}{M}\sum_{n=0}^{\infty}(h'_n - h'_\infty)P_n(\cos\psi) \\ G_{ut} &= -\frac{R}{M}l'_\infty \frac{\cos(\psi/2)[1+2\sin(\psi/2)]}{2\sin(\psi/2)[1+\sin(\psi/2)]} + \frac{R}{M}\sum_{n=1}^{\infty}(nl'_n - l'_\infty)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\psi}P_n(\cos\psi) \end{aligned}\right\} \tag{2.221}$$

由于随着 n 的增加，h'_n 和 nl'_n 趋近于渐近值，因此，为估计这些式子中第二个求和项的值，只需要有限的次数即可。

应用对应原理，对于粘弹性地球上的一个与时间有关的荷载 $H(r,T)$，在拉普拉斯域中的变形为：

$$\hat{u}_r(s) = \int_A \hat{G}(s)\rho(r)\hat{H}(r,s)\,\mathrm{d}A \tag{2.222}$$

其中：格林荷载函数为

$$G(s) = \frac{R}{M}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{h}'_n(s)P_n(\cos\psi) \tag{2.223}$$

2.7.2.4 岩石圈荷载问题

设想覆盖在密度为 ρ_l 的液体上的一个厚度为 H、刚度为 μ、泊松比为 v、杨氏模量为 E 的水平板上的垂直荷载 $q(x_1,x_2)$ 的例子。水平轴 x^1 和 x^2 与原先未变形的平板的中间面一致，x^3 轴垂直向下为正。面荷载受到浮力 $k^* = \rho_l g$ 和板的强度的支持，对于薄板，由小挠曲理论，挠曲 w 的方程简化为

$$D\nabla^2\nabla^2 w + k^* w = q(x_1,x_2) \tag{2.224}$$

式中：

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

D 是由下式定义的弯曲刚度：

$$D = \frac{\mu H^3}{6(1+v)} = \frac{EH^3}{12(1-v^2)} \tag{2.225}$$

有时将式(2.224)写成如下形式：

$$l^4\nabla^2\nabla^2 w + w = q/k^*\tag{2.226}$$

其中：

$$l = (D/k^*)^{\frac{1}{4}}\tag{2.227}$$

这里假定了平板是均匀弹性平板，初始状态是流体静力平衡的，挠曲与板的厚度相比很小，变形后的中间面的倾斜也很小。方程(2.226)忽略了作用于平板整个厚度上的平均面内力 N 的影响。若存在这样的力，那么平衡方程为

$$D\nabla^2\nabla^2 w + N\nabla^2 w + k^* w = q\tag{2.228}$$

其中：N 以挤压为正。

在满足许多边界条件的情况下求解式(2.228)。通常假定平板是无限延伸的，在这种情况下，随着 x_1、$x_2\to\infty$，w、$d^2w/dx_i^2\to 0$。其他边界条件包括在原点处的正则性条件，即若荷载对于原点对称，则在 $x_1=0$ 处 $w=dw/dx_1=0$。除非另有说明，不然在整个平板上，w 和 dw/dx_i 都需是连续的。

对于一个点荷载和相对于荷载点为对称的平板响应来说，挠曲的解可方便地以零阶开尔文-贝塞尔函数表示为

$$w\left(\frac{r}{l}\right) = \frac{q}{2\pi\rho_s g l^2}K\left(\frac{r}{l}\right)\tag{2.229}$$

其中：开尔文函数 K(以及有关的函数 K、B、B)用贝塞尔函数表示。解(2.229)的性质像一种阻尼正弦函数，w 的符号大约每 $4l$ 改变一次，但最大振幅急剧下降，逐渐趋于零。对于一个半径为 A 的圆形荷载，比如其密度为 ρ，高度为 h，则 $r\leqslant A$ 处的解为

$$w = \frac{\rho h}{\rho_s}\left[1 + C_1 B\left(\frac{r}{l}\right) + C_2 B\left(\frac{r}{l}\right)\right]\tag{2.230}$$

在 $r\geqslant A$ 处，

$$w = \frac{\rho h}{\rho_s}\left[C'_1 B\left(\frac{r}{l}\right) + C'_2 B\left(\frac{r}{l}\right) + C'_3 K\left(\frac{r}{l}\right) + C'_4 K\left(\frac{r}{l}\right)\right]\tag{2.231}$$

其中：常数 C_i 和 C'_i 的值由适当的边界条件求得。对于上面所说的条件

$$\left.\begin{array}{ll} C_1 = (A/l)K'(A/l) & C_2 = -(A/l)K'(A/l) \\ C'_1 = 0 & C'_2 = 0 \\ C'_3 = (A/l)B'(A/l) & C'_4 = -(A/l)B'(A/l) \end{array}\right\}\tag{2.232}$$

式中：K′等是 K 等对其自变量的导数。如果荷载可用多个叠加的圆盘来代表，那么这些解对于考察火山群岛或海洋山脉的均衡性是很有用的。垂直作用于平板上的无限长的线状荷载 q 也存在解析解。对于沿 $x^1=0$ 这样一个荷载，挠曲方程(2.224)的通解为

$$w = e^{\lambda x}(C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x) + e^{-\lambda x}(C_3\cos\lambda x + C_4\sin\lambda x)\tag{2.233}$$

式中：

$$\lambda = (\sqrt{2l})^{-1} = (\rho_s g/4D)^{\frac{1}{4}}$$

对于一个无限平板，当 $x\geqslant 0$、$C_1=C_2=0$ 时，在 $x=\infty$ 处挠曲及其导数都为零。若平板是连续的（这要求 $C_3=C_4$），则在原点处 $dw/dx=0$。最后，为了防止平板在 x^3 方向有纯平移，作用在平板上的总浮力要等于荷载 q，或 $2\int_0^\infty k^* w\,dx = q$。由先前这些条件，这就要求 $C_3=\lambda q/2k^*$，且

$$w=\frac{\lambda q}{2k^*}e^{-\lambda x}(\cos\lambda x+\sin\lambda x) \tag{2.234}$$

在分布有荷载的 x 线上对这个解积分，可以得到像三角楔形荷载那样的简单几何体的解析解。这些解析解对于表示大陆边缘处的沉积荷载是很有用的。

另一组有用的解用于展布在 $0<x^1<\infty$ 和 $-\infty<x^2<\infty$ 的半无限平板上沿 $x^1=0$ 的荷载。令 $x^1=\infty$ 处的挠曲为零，因此解与 x^2 无关。令 $x=x^1$，方程(2.233)变为

$$w=e^{-\lambda x}(C_3\cos\lambda x+C_4\sin\lambda x) \tag{2.235}$$

在原点处，挠曲和 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ 达到最大值，故 $C_4=0$。最后有 $\int_0^\infty k^* w\mathrm{d}x=q$ 和 $C_3=2\lambda q/k^*$。因此

$$w=\frac{2q\lambda}{k^*}e^{-\lambda x}\cos\lambda x \tag{2.236}$$

与变形同样重要的是岩石圈内的应力状态，因为这决定着岩石圈是否能承受得住这些荷载；若承受不了，就预示着那里将发生破裂。岩石圈中的应力可分为几个部分，与板块挠曲或弯曲有关的应力，由荷载本身产生的应力(包括垂直荷载 q 和平面内力 N)以及与板块的非流体静力的初始密度结构有关的应力。对于一个薄的平板，垂直荷载下弯曲应力的一般表达式为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{11}&=-12\frac{D}{H^3}x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\\
\varepsilon_{22}&=-12\frac{D}{H^3}x_3\left(v\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)\\
\varepsilon_{12}&=-12(1+v)\frac{D}{H^3}x_3\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}
\end{aligned}\right\} \tag{2.237}$$

对小挠曲薄板模型来说，其他弯曲应力分量很小。对于一个径向对称的荷载来说，径向应力 ε_r 和切向应力 ε_t 为

$$\varepsilon_r=-\frac{12D}{H^3}x_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right);\quad \varepsilon_t=-\frac{12D}{H^3}x_3\left(v\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) \tag{2.238}$$

在上表面有荷载 q_1、下表面有荷载 q_2 的平板内，荷载应力为

$$\varepsilon_{33}=\frac{q_1+q_2}{2}+(q_2-q_1)\left[\frac{3}{2}\frac{x^3}{H}-2\left(\frac{x^3}{H}\right)^3\right] \tag{2.239}$$

式中：$q_1=-\rho gh$，$q_2=-\rho_t gw$。在 $x^3=\pm H/2$ 处，应力分量 ε_r 和 ε_t 达到最大值，在 $|q_1|>|q_2|$ 时，在上表面 $x^3=-H/2$ 处，ε_{33} 达到最大值。

2.7.3 冰后回弹

晚更新世冰盖融化的直接后果是使海平面平均上升 120～130m，大部分上升发生在公元前 14000 年至 8000 年前这 6000 年时间里(Lambeck, 1988)。例如，在澳大利亚周围海底的一些缓坡地带，比如卡彭塔里亚湾，海洋一直以高达 10km/cyr 的速率侵蚀陆地。冰盖融化的次生结果是在某些情况下地壳回弹量达到几百米。由于水荷载的增加，一般会出现海洋地壳下降，海岸线的位置随时间不断移动。Jamieson 于 1865 年确认芬兰斯堪的纳维亚地台的海岸隆起即是晚更新世冰盖消除的结果，这意味着发生了地球的横向流动或塑性变形。至少自 17 世纪以来，人们就知道这种回弹是一个正在进行的过程。加拿大东北部的回弹，在 19 世纪末就已被 Gilbert 发现，他用冰后回弹解释了大湖地区的地壳倾斜。20 世纪 30 年代，不少科学家曾

试图根据芬兰斯堪的纳维亚的隆起的观测结果估算地幔粘度，但是首次根据上升海岸的劳伦太特观测结果估算松弛时间的尝试则是在很多年以后。

有些地区的现代隆起速率已相当高，在芬兰斯堪的纳维亚波斯尼亚湾的上游河段附近已接近 1cm/yr，足以用精密水准方法测量，现已进行了相当细致的测量（见 Vening Meinesz, 1958）。两个发生回弹地区的重力异常都是负值，对此已解释为不完全回弹。从重力场的卫星解中，也可以发现这些地区的负异常，但要最终解释这些负异常还有待探索，因为两个冰消中心都位于地盾区，在其他不受更新世冰川作用的地盾区也发现了可与之相比的负异常（Lambeck, 1988）。实际上，考察重力随时间的变化可能更有用。

除了地表变化、海平面或重力观测之外，地球的全球质量分布也发生变化，产生了随时间变化的惯性元素 I_{ij}（惯量张量）或球谐系数 C_{ilm}。因此，地球的自转可能改变。由于 C_{20} 与时间的相关性，人造卫星轨道的节点可能要经历一次异常加速度。海平面变化、水准和重力测量、地球自转及人造卫星运动的观测结果，都可以在地球对地表荷载响应的地球物理研究中得到进一步的补充。

假定有一个地区被覆盖了一个厚度为 h 的冰盖，则该地区的固体表面（即冰与地面的交界面）就会由于冰盖的压力作用而下沉一些。反之，冰盖消融，上述地区所受压力减小，固体地面回升（回弹）。这两种效应通常都是比较明显的。在形成冰川的过程中，冰盖逐渐变厚，压力逐渐增大，固体地面逐渐下沉。在冰川消融的过程中，压力逐渐减小，固体地面逐渐回弹。例如，覆盖着格陵兰的厚冰使得格陵兰地表下降了几千米，目前处于海平面以下。如果上述厚冰盖消融，格陵兰地表就会回升。不过，若要期望固体表面回弹到原来的位置几乎是不可能的，因为地球并非理想的弹性体，会有部分永久性形变。无论是在冰川的建造期还是冰川的消融期，要精确计算由此而引起的地球形变，是一项非常细致而艰难的工程。同时，上述过程又对地球的旋转角速度产生影响。

2.7.3.1 冰川均衡理论

描述地球对冰盖的响应（形变），通常采用粘弹性理论。这时，模型的场方程由下式给出（Backus, 1967；佩尔蒂埃, 1990）：

$$
\begin{aligned}
0 &= -\rho_0 \nabla \tilde{\phi} - \dot{\rho} g_0 e_r - \nabla(\tilde{u} \cdot \rho_0 g_0 e_r) + \nabla \cdot \tilde{\tau} \\
4\pi G \dot{\rho} &= \nabla^2 \tilde{\phi}
\end{aligned}
\tag{2.240}
$$

其中：G 是引力常数；ρ_0 是基态密度；g_0 是沿向径基矢 e_r 方向的基态引力分量；$\dot{\rho}$ 和 $\tilde{\phi}$ 分别是扰动密度和扰动位。扰动位 $\tilde{\phi}$ 由两部分构成：一部分是由冰盖（冰川）产生的引力位 $\tilde{\phi}_1$，它在地球内部满足 Laplace 方程 $\nabla^2\tilde{\phi}_1 = 0$；另一部分是形变位 $\tilde{\phi}_2$（即由冰盖负荷导致的地球形变而引起的附加引力位），它与扰动密度 $\dot{\rho}$ 之间满足 Poisson 方程 $\nabla^2\tilde{\phi}_2 = 4\pi G \dot{\rho}$。$\tilde{u}$ 和 $\tilde{\tau}$ 分别是位移矢量和应力张量（见 2.6 节）。

方程（2.240）中的第一个方程实际上是平衡方程，本来左边是惯性力（即物质密度与加速度的乘积），右边是作用力。其中：第一项是扰动引力；第二项是压力扰动（压力的一般形式是 ∇p，它约等于 ρg）；第三项是阿基米得力，即浮力，或称为预应力对流（Peltier, 1982；佩尔蒂埃, 1990）；第四项是应力。考虑到我们所研究的论题是长时间尺度，可以忽略惯性效应，故得式（2.240）第一式。第二个方程是众所周知的 Poisson 方程。扰动密度由如下的线性化连续性方程确定（Backus, 1967；佩尔蒂埃, 1990）：

$$\dot{\rho} = -\rho_0 \partial_i \tilde{u}^i - \tilde{u}^i l_i \partial_r \rho_0 \tag{2.241}$$

其中：l_i 是向径单位矢量的方向余弦。

为了简明起见，后面将带波浪的上指标省略。给定适当的边值条件，可以根据方程（2.240）求出应力张量 τ_j^i。如果将地球看做弹性体，则可根据如下的广义胡克定律（参见2.6节）：

$$\tau_j^i = \lambda \Gamma_k^k \delta_j^i + 2\mu \Gamma_j^i \tag{2.242}$$

求出应变张量 Γ_j^i。其中：$\Gamma_k^k = \Gamma_1^1 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^3 = \theta$ 是体膨胀系数；λ 和 μ 是拉梅常数。

然而，方程（2.242）只有在短时间意义下才是近似可用的：假想地面突然加载了负荷，想知道在短时间内地球发生了怎样的形变。但就我们的论题而言，冰盖建造及消融是一个长时间的缓慢的过程，这时的地球表现为牛顿粘滞体，需要采用如下的 Maxwell 本构方程（Peltier，1982）

$$\frac{\mathrm{d}\tau_j^i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mu}{v}\left(\tau_j^i - \frac{1}{3}\tau_k^k \delta_j^i\right) = \lambda \frac{\mathrm{d}\Gamma_k^k}{\mathrm{d}t}\delta_j^i + 2\mu \frac{\mathrm{d}\Gamma_j^i}{\mathrm{d}t} \tag{2.243}$$

其中：v 是牛顿分子粘滞度，由实验确定，取决于粘滞体的物理特性。

采用 Laplace 变换求解上述方程，即可得到应变张量（Peltier，1982；Wu and Peltier，1982；佩尔蒂埃，1990）。

在实际应用中，通常将地球看做分层结构，然后建立扰动位球谐展开系数与 Love-Shida 数之间的联系（Peltier，1982），这种联系实际上是通过激发函数来实现的（一种特殊的激发函数就是 Green 函数，它反映了位于球面上一点的点质量对地球形变的激发，属于荷点质量作用于球体表面的问题）。地球形变对负荷的响应理论已比较完善，将冰川看做荷载（负荷），完全可以归于地球形变对负荷的响应理论。

2.7.3.2 冰川均衡的大尺度特征

冰后回弹会带来显著的可观测效应，主要有三个方面（佩尔蒂埃，1990）：

（1）导致可观测的重力异常。

（2）使地球自转加速。

（3）转动极相对地表地形产生迁移（极游）。

Rubincam（1984）基于 GEM10B 模型数据的分析表明，在赫德森湾地区（加拿大）存在空间重力负异常，其量级达到 $-50\mathrm{mGal} < \Delta g < -40\mathrm{mGal}$，与 Wallcott（1980）给出的结果一致；同时，Rubincam（1984）的分析还表明了在波的尼亚湾（北欧）存在约 -15mGal 的空间重力负异常。佩尔蒂埃（1990）认为，Peltier（1982）以及 Wu and Peltier（1982）根据冰川均衡理论成功地解释了上述空间重力负异常。尽管在他们的解释中附加有不少假设（这些假设未必正确），但上述区域属于冰盖区，若将冰盖设想为山脉，根据通常所理解的均衡补偿理论（参见 Haiskanen and Moritz，1967；管泽霖和宁津生，1981），在山区应该存在负的空间重力异常，因而至少从定性上看，他们的解释是可信的。

由于潮汐摩擦作用，月球逐渐远离地球，使地球的角动量变小，自转变慢。相反，冰盖消融，使地球的平均转动惯量变小。为了保持地球的角动量守恒，地球自转角速度会变大，即产生自转加速效应。Dicke（1969）曾定性地指出了这种效应。Lambeck（1980）、Peltier（1982，1983）以及 Wu and Peltier（1984）定量研究了冰盖消融对地球自转产生的影响，其数量级为

$$\frac{d\omega}{dt}/\Omega = 7 \times 10^{-11}/a$$

研究冰盖消融对自转极的影响极为复杂，早在 1952 年就由 Munk and Revelle 指出。Dickman（1977）研究了大陆漂移对极移的影响，认为极移观测量 $0.95° \times 10^{-6}$/yr 应归于大陆漂移。Lambeck（1980）定量讨论了冰和水对极移的影响。Peltier（1982）以及 Wu and Peltier（1984）则持有不同的观点，认为所观测到的极移量 $0.95° \times 10^{-6}$/yr 应归于冰川轮回作用。

2.7.3.3 海平面变化(Lambeck,1988)

地壳与海平面之间发生的相对运动，已被无数的水下或出露的沉积物以及通常在潮间带、礁石、浪蚀洞、阶地和台地上发现的物质生长所证实。在这些变化当中，有一部分是近代发生的，可能是由 2 万年至 6000 年之前这段时间里劳伦太特和芬兰斯堪的纳维亚冰盖融化引起的海平面上升造成的。随着冰的融化，排出的水分布在海洋之中，原来冰盖下面的地壳发生回弹，海底则承受一个附加荷载。冰后回弹问题就是估计地壳对这种地表荷载重新分布模型。只有在这两种量已知的情况下，才能消除观测值中由冰后回弹引起的海平面变化部分，以确定是否存在剩余构造信息。另外，如果可以单独结束构造变化部分或可以假设该变化在几万年的时间尺度上，可以忽略不计，那么海平面观测值包括该流变结构和冰盖融化过程的信息。

冰川消退期即将结束时的海平面变化取决于该处附近融化水重新分布的详细情况。例如一个小海岛，周围的水荷载几乎是均匀的，其响应与位于大陆边缘狭长海湾或盆地的地方明显不同，大陆边缘的地壳仅在有限的方位内加载。如果全新世海平面变化要对确定地球的响应有所帮助，那么这两种地方都需要较为详细的海洋—陆地几何形状的模型。Nakada 和 Lambeck 发现，要模拟这种响应需要具有相当于大约 180 个波数的海岸线几何形状的分辨率。在冰盖边缘附近，即在出现最引人注意的海平面变化的地方，这些模型对附近冰荷载的时空分布十分灵敏，冰模型中相当小的变化就会使地壳响应产生显著的变化。但人们充分了解的荷载很少，这些地方的海平面观测值的融化过程研究中的应用，比在地球流变学研究中的情况要好。

根据从古至今冰盖区的地貌观测结果、有关冰积累速率的冰川学证据以及冰盖的力学稳定性，对以前的冰盖作了许多重建工作。这些模型还包含地壳在冰荷载作用下的均衡状态假设，有时假设是局部补偿，这是一种与这里讨论的回弹模型不一样的模型，还需深入研究。

Nakiboglu et al.（1983）根据南半球的海平面测量研究认为，在 2 万年至 6000 年前之间注入海洋的融水总量，一定有来自南极的相当于大约 30m 的海平面升降变化的贡献。Wu 和 Peltier(1983)提出了类似的看法，不过他们假设南极对海洋的贡献比北极熔融水要早得多。因此，过去 1 万年中受到的影响极小，这与南半球的数据不一致。Nakiboglu 等人认为，南极的大冰融发生的时间与北极冰盖的融化大致相同，并且南极的较小冰融可能一直持续到全新世。根据他们的模型，总融水量受晚更新世冰模型的制约，冰川消退于 6000 年前终止，提高了诸如沿新南威尔士（澳大利亚）和克赖斯得彻奇（新西兰）海岸一些地方观测值与预测值之间的符合程度，南极对海平面的影响在赫德森湾的渥太华岛或波斯尼亚湾的昂格曼河都比较小，但在波士顿和芬迪湾这样的地方则变得比较大，然而这种影响对这里讨论的粘度范围内的地幔流变性质并不敏感。

在很多地方，全新世高海面预测幅度比所有流变模型观测到的都大，而这些流湾模型与冰

盖边缘附近的观测值相当一致，这使得 Nakada 和 Lambeck 用这些幅度的差值来确定流变性质，用绝对值来确定南极冰盖在全新世的熔融程度。他们在几个构造稳定的地方研究了整个澳大利亚地区的全新世海平面，得出如下结论：

（1）高粘度岩石圈的有效厚度约为 50km。

（2）向下到大约 670km 深处上地幔粘度为 1～10 倍的 10^{20}Pas。

（3）下地幔的粘度至少比这大一个数量级，约为 10^{21}Pas。

（4）大约 6000 年前之后，南极对海面升降变化的贡献可能有 2～3m。

这种模型解释了澳大利亚和太平洋地区的很多观测结果，特别是继大陆边缘之后又得出了海岛的全新世海平面高度。

从验潮记录中已推算出过去 50～100 年的海平面长期变化，总的结论为上一个世纪海平面的上升速率约为 1.5mm/yr。然而记录并不完全，因为进入 19 世纪只在少数几个地点有可靠的观测结果，而某些点上过去的海平面变化受到冰后回弹的严重影响。海洋无处不受到某种程度的冰后回弹的影响，根据地理分布不佳的验潮站建立简单的全球海平面曲线时的假设（海平面的区域性长期变化很小），对现有资料来说是不成立的。例如海水的再分布，海水总量不变，结果从地球对海水荷载的调整都可以产生海平面变化。表 2.3 总结了在 8 个站上观测到的长期海平面变化，这些站具有较长的观测序列，并在全球海平面长期变化的讨论中占重要地位。在这些站上观测的海平面长期变化平均为 1.52mm/yr，但是不同站之间存在着很大的变化，中误差为 0.77mm/yr。对各估值作了现今回弹改正之后，根据采用的流变学模型的不同，这种中误差变化不是增加就是减少，海平面长期上升的估值也是这样。

表 2.3　**过去 100 年海平面长期变化的观测值 ξ_0 和预测值 ξ_p（取自 Lambeck,1988）**

台站	ξ_0 mm/yr	ξ_p(mm/yr) 模型 1	模型 2	模型 3
旧金山	1.30	-0.77	-0.86	-0.68
檀香山	1.58	-0.15	-0.10	-0.40
巴尔博亚（巴拿马）	1.58	-0.24	-0.02	-0.25
悉尼	0.64	-0.17	-0.19	-0.49
孟买	1.33	-0.07	-0.13	-0.33
巴尔的摩	3.42	3.07	-1.11	2.01
克利斯托巴尔（巴拿马）	1.10	-0.18	-0.01	-0.16
卡什凯什（葡萄牙）	1.23	-0.27	0.27	0.25
平均值	1.52	0.15	-0.27	-0.01
（中误差）	(±0.77)	(±1.20)	(±0.47)	(±0.86)
$<(\xi_0-\xi_p)>$		1.37	1.82	1.72
		(±0.56)	(±1.18)	(±0.32)

过去 50～100 年的海平面上升速率比从上述根据以往 6000 年的观测结果估得的平均速率大 3～5 倍。对于海平面的这种小的上升的原因有很多争论，它是反映了过去 100 年中南极

冰盖融化的增加，还是由于山岳冰川的水流入了海洋（Lambeck，1980）？对于前一种假设没有获得实质性的证据。但其重要性显然在于它指明了气候条件变化虽小，但南极却有释放相当多水的可能性。

冰川的形成和消融周而复始，更迭不已。冰川的形成需要较长的时间，大约10万年；消融过程比较短，1万年左右。之后，大概又有1万年的平静期。无论是冰川建造过程还是消融过程，均是全球性的。距今最近的一次冰川高峰大约是在1万8千年前（佩尔蒂埃，1990）。这也就是说，在大约12万年前，开始了距今最近一次的冰川建造运动。那时（冰川达到高峰时），全球主要有三大冰川（Peltier，1982；佩尔蒂埃，1990）：劳伦冰盖（它覆盖了整个加拿大和北美北部）；波的尼亚湾冰盖；南极洲冰盖。之后，上述冰盖开始（同时）消融，直到6000年前才完成。劳伦冰盖消融之后，使全球海水面上涨了60m左右；波的尼亚湾冰盖和南极洲冰盖的消融又分别使海水上涨了20m。

地球正处于间冰期。根据地球史上冰川的周期性特征，再过5000年左右，又会开始新的冰川建造运动。对冰川的研究在地质学、地球物理学以及气象学中均有重要意义。地质学家关心的是冰川的建造过程以及在漫长的地质期中所起的作用；地球物理学家关心的是冰川的构造、均衡补偿、冰川的变迁对物理环境的影响，气象学家关心的是冰川的增长或消融对全球气候的影响。目前，以下三个方向仍然是研究热点：

（1）地球形变对冰川建造过程或消融过程的响应。

（2）地球旋转角速度对上述过程的影响。

（3）对冰川建造过程和消融过程的物理机制解释。

§2.8 地震估值

2.8.1 地震波探测器

地震波是一种弹性波，它通过介质之间的相互作用传输能量。这种相互作用也称为波的振动。按照弹性力学理论，若将地球看做是一个弹性体，则满足如下的弹性力学基本方程（钱伟长和叶开沅，1980；郭俊义，2001）：

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+f=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} \tag{2.244}$$

其中：λ 和 μ 是拉梅常数（表征物体的弹性特性的物理参数）；f 是体力密度；$\boldsymbol{u}$ 是位移矢量；ρ 是物质密度；∇ 是梯度算符。

方程（2.244）是描述地球的受迫振荡方程，可根据弹性力学理论中的几何方程（Cauchy方程）、动力学平衡方程（Navier方程）以及广义胡克定律推出。通常，体力（主要是重力）相比于介质之间的振动力（弹性力）而言要小得多，可忽略不计（Jacobs，1974）。这时，我们有

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} \tag{2.245}$$

这就是通常所说的地球自由振荡方程，它从本质上表述了弹性波（地震波）在地球内部的传播规律。为了看清这一点，只需对上述方程分别作用散度运算和旋度运算，即可得到如下两个方程

$$\left(\nabla^2-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\theta=0 \tag{2.246}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{D} = 0 \tag{2.247}$$

其中：$\theta = \nabla \cdot \boldsymbol{u}$ 是体膨胀系数；$\boldsymbol{D} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ 是位移矢量的旋度，称为旋转矢量。

上述两个波动方程分别表述了纵波 P 和横波 S 的传播规律，其传播速度分别为

$$V_{\mathrm{P}} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad V_{\mathrm{S}} = \sqrt{\mu/\rho} \tag{2.248}$$

通常，根据波的振动的不同特性，将弹性波划分为体波和面波。体波有纵波 P 和横波 S 之分，其波速均取决于介质的物理特性。纵波的传播速度要比横波的传播速度快。纵波 P 的振动方向始终与传播方向一致或相反，随时间作周期性变化，是一种压缩-扩张式波，称为疏密波，或称伸缩波，它不仅可以在固体（通常的弹性体）中传播，还可以在液体（通常的流体）中传播。横波 S 的振动方向始终与波的传播方向（即能量传输方向）垂直，而且振动方向也随时间作周期性变化，其波矢构成一逆进椭圆，属于一种剪切波（Jacobs，1974；Stacey，1977；Shearer，2003）。由于液体不能承受剪切力，因而横波不能在液体中传播。由于纵波的振动方向始终与传播方向相同或相反，因而没有偏振。横波则属于偏振波，可分解为水平偏振波 SH 和垂直偏振波 SV。

弹性波在介质中的传播满足费马原理：在连续分布的介质体中，波的传播取这样一条路径，使得沿该路径传播所花时间最短。根据此原理即可导出波的传播路径。另一方面，当遇到分界面时（此时介质不再连续），波的传播满足通常的折射和反射定律，亦即 Snell 定律。Snell 定律可根据惠更斯（Huygence）原理或费马（Fermat）原理推出。这样，确定的介质分布便决定了确定的波的传播。反过来，通过研究并考察波的传播规律及路径，即可反演物质密度分布，特别是物质的分层结构。地球内部的密度分布以及分层结构模式，便是根据地震波这一探测器推断出来的。大地测量手段可提供地球的总质量以及转动惯量，因而对地球的密度分布施加约束。这种约束又会影响到弹性参数（如拉梅常数），使弹性参数得到改善。

2.8.2 断层与地震估计（Lambeck，1988）

地震的发生是应力差超出地壳局部强度的临界值，或许是因为周围的应力差非常高，或许是因为地壳局部非常弱。破裂面的方位和破裂面运动的方向在某种限定条件下给出了应力场方向的估值。除了地表变形的直接测量外，这种信息也含在断层面特征（解理面）之中上，断层面特征是根据震源向远处传播的地面运动图像估计得到的。例如，地震台记录的 P（和 S）波的初动方向可用来确定初至波是压缩波还是膨胀波，这种信息还可用来建立远离震源的辐射图像（Shearer，2003）。

断层面特征与应变释放关系较为直接，一旦确定了断层面的方位，就可以用几种可能的破裂准则中的一种来推算主应力轴的方向。一种简单而重要的准则是库伦定律。根据该定律，破裂发生在包含中间主应力轴的两个可能的共轭面的一个之上，中间主应力轴相对于最大主应力轴的倾斜角度为 $(\pi/2 - \beta)/2$，其中 β 是内摩擦角，典型值约为 30°。当采用某个准则时，会引入较大的不确定性，因为正如在破裂模型中事先预计的那样，地壳实际上是非均匀的，破裂面将部分地由事先引入的地壳中的参数确定。

应力的大小可由下式定义的地震应力降 $\Delta\Sigma_d$ 求得（Shearer，2003）：

$$\Delta\Sigma_d = 7M_0/16r^2 \tag{2.249}$$

其中：r 是假设的圆形断层面的半径；M_0 是地震矩，由下式定义：

$$M_0 = (\text{刚度}) \times (\text{平均断层滑动量}) \times (\text{断层面面积}) \tag{2.250}$$

地震矩可由长周期地震波谱或短周期震级估算,通常采用下列经验关系式：

$$\log M_0 \approx m + a \tag{2.251}$$

其中:m 是震级,a 为常数。但当震级超过 7 级时,地震矩 M_0 的估算值就会出现较大误差。地震矩与震级之间的关系通常要比上述简单关系复杂。断层面的尺度可根据震源辐射出的地震能量谱或从断层面几何图像和大小的直接测量中求取。

由于滑动通常受摩擦应力的阻碍,断层可能会在全部剪切应力释放完之前锁闭,应力降测量表示断层上的剪应力变化,但不一定是周围的剪应力变化。科学家估算了许多地震应力降,量值范围为 0.1 ~ 100MPa。

测量近地表岩石的应力状态,可以使用以应力释放法为基础的测量技术。在应力释放方法中,某个体积的岩石部分与周围的岩石脱离,测量随后的形状变化。该应变加上弹性模量估值,提供了一种作用于该体积上的应力的一个度量。测量中可使用各种不同的应力释放测量技术。例如,钻孔破裂测量包含应力场方位信息;钻孔壁崩解的趋势是原来呈环形的横截面在最小水平主应力的方向被拉长。水压致裂技术可能是最通用、最有意义的应力测量法,该方法是向钻孔密封段注水直至孔壁破裂,并用最早发生破裂时的压力以及破裂发生后保持裂缝张开所需的压力来确定全部的应力张量。科学家用这种方法已测量了深达 5km 处的应力差和应力轴方向。典型的地表最大的应力差为 10 ~ 20MPa,在约 5km 的深度增至 40 ~ 50MPa。

2.8.3 地质指标

各种尺度的岩石变形提供了大量证据,表明地壳一直处在应力差的作用之下（Lambeck, 1988)。宏观尺度指标,如褶皱轴的方位可以对古应力方向给出定性说明,但解释起来比较复杂,因为经常是不止一个构造事件在同一岩体上留下印记。在一定的条件下,岩石也会产生微观尺度结构,成为周围偏差应力场的特征。例如,位错密度和变形微粒的大小被认为是应力大小的特征,周围应力差的估值在上地壳达到 100 ~ 200MPa,在下地壳约为 100MPa。尽管由于对所涉及的物理和化学过程认识得不全面,这些解释还不很确定,但这些观测值确实提供了估算过去应力状态的可能性,而且不仅限于地壳,还包括深部:例如,通过玄武岩流或金伯利岩管道被带到地表的下地壳(深达 40 ~ 50km)或上地幔的岩石给出的应力差估值为几十兆帕。

2.8.4 板块运动的地震估值（Lambeck,1988)

在典型的情况下,主要板块的平均运动速率为每年几厘米,但在西太平洋的某些会聚边缘相对速率大于 10cm/a,在非洲和欧亚之间的会聚边缘速率低至 1 ~ 2cm/a。较短时段相对运动的估值是根据沿板块边界的地震位移推算得到的。断层上的运动是连续位错的结果,每次发生位错,累积应力都超过阻止这种运动的摩擦力。对断层进行直接的地表观测时常受到限制,位移量只能从地震释放能量的谱测量中以及震中的空间分布中推断出来。

全球大多数地震能量的释放和断层滑动都是由特大地震($m \geq 7.5$)引起的,沿地震带的观测结果揭示了这种事件的某种有规律的时间间隔序列,但并非总有规律。例如,位于加利福尼亚的圣安德列斯地震带曾显示了约 20 年的周期性,但最后一次地震距今已有 40 多年,仍未延续地震序列。沿太平洋边界的阿拉斯加—阿留申地震带上,任何一个区域特大地震的复发间隔约为 60 年,然而沿智利段约为 100 年。这些大的地震可能随着时间的推移沿边界迁移。例如, Mogi (1968) 的研究结果暗示,地震活动正从日本向阿拉斯加、从中美向智利逐渐迁移,速率为 100 ~ 300km/a。但若真正能够预报地震,还需要走很长一段路程。

第3章　地球参考系统与地球参考框架

无论是研究地球旋转、地球重力场模型，还是研究地壳运动均要涉及地球参考系统与地球参考框架的概念。本章主要介绍地球参考框架概念及定义、地球参考框架的建立与维持、不同参考框架之间的转换等内容。

§3.1　参考系统、参考框架和参考基准

参考系统、参考框架、参考基准是大地测量中常用的几个基本概念。

参考系统可以认为是为了表示位置坐标而定义的类似于标尺作用的参照物的称谓。例如：若将椭球体看做参照物，则椭球表面的经线、纬线、法线以及相应刻度就共同构成参考系统。

在参考系统的具体实现中，我们不可能把椭球体或者笛卡儿坐标这类人为定义的东西具体标示出来，而只能代之以用固定在地球上的一组标记及其坐标和其他一些参数间接地表示出来，这组标记就是一个框架。换言之，参考框架就是参考系统的具体实现。例如，ITRF（International Terrestrial Reference Frame）国际地球参考框架就是 ITRS（International Terrestrial Reference System）国际地球参考系的一种具体实现。

大地测量的重要任务之一就是建立和维持一个地面坐标参照基准，为各种不同的测绘工作提供坐标参考基准。地面坐标参照基准的建立包括两个方面的内容（陈俊勇，1991）：一是从理论上确定地面参照系统的定义或模式，明确定义地面参考系统的地球进动、章动和极移理论，以及这一理论所涉及的地球模型；二是建立符合这一地面参考系统的坐标参考框架，后者由一些具体的地面框架点组成，通过框架点在地面参照系统中的明确坐标值和速度场，来实现和维持所定义的地面坐标参照系统。有了坐标参考框架才能真正从实践上将地球上任意点的位置及其变化在地面参照系统中加以定量描述。

经典大地测量参照基准，是由18世纪末至20世纪中期所建立的天文大地网来维持的大地坐标框架。它是一种近似的三维参考系统，由二维的水平坐标系和通过正高加大地水准面差距（或正常高加高程异常）所得大地高的垂直坐标系组合而成。同时它也是非地心的、区域性的、静态的参考系统。实际上，由于测量技术和数据处理手段的制约，这些由天文大地网所建立的坐标参考框架存在着比较大的内部误差和局部畸变，难以满足现代高精度长距离定位、精密测绘、地震监测预报和地球动力学研究等方面的需要。

自20世纪50年代以来，随着空间定位技术的发展，特别是全球定位系统（GPS）技术的出现，使建立和维持一个基于空间定位技术的长期稳定和具有较高精度的、动态的全球性或区域性坐标参考框架成为可能。

ITRF 就是基于 VLBI、LLR、SLR、GPS 和 DORIS 等空间技术所建立起来的现代全球地面参考框架，它提供了一个全球统一的、地心的、三维的和动态的高精度地面坐标参照基准。ITRF

在全球范围的精密定位、地壳形变监测、地球动力学研究以及建立精密数字地球等领域得到了广泛的应用。由于ITRF是一个全球性的坐标参考框架，其框架点的分布密度还不能够满足区域大地测量应用的要求，因此，自20世纪80年代后期以来，一些国家和地区通过大尺度的高精度GPS会战网建立区域性的、与ITRF相一致的局部三维大地坐标参照基准。

ITRF在欧洲的测站被称为ETRF(European Terrestrial Reference Frame)，它是ITRF全球框架的一部分，但其密度远远不能满足欧洲大地坐标基准的需要。1989年，欧洲通过一次大规模的GPS会战（近100个测站），并采用ETRF89(ETRF框架，1989.0历元)的站坐标作为固定基准站，将包括ETRF站在内的EUREF89会战网进行联合处理(Gurtner et al.，1992)，建立了欧洲89参考框架EUREF89(European Reference Frame 1989)，EUREF89是与ITRF89相容的区域地面参考框架基准。

1992年英国为了满足本国的需要，建立了包含700个站的国家GPS网SciNet92(Christie，1992)。SciNet92网数据处理时采用了6个欧洲参考站在ITRF91框架、1992.77历元的站坐标作为固定基准点进行基线处理和网解，再通过四参数Helmert转换化算至ETRF89基准下(Denys，1993)，从而建立了覆盖英国本土并与EUREF89基准统一的英国三维地心坐标参考框架。

澳大利亚利用高精度GPS测量，建立了1994澳大利亚地心坐标基准GDA94(Geocentric Datum of Australia 1994)，它包括了澳大利亚的基准网AFN(Australian Fiducial Network)和国家网ANN(Australian National Network)，该基准与ITRF92框架、1994.0历元的基准一致(Peter Morgan，1994)。在澳大利亚“空间数据基础设施”ASDI(Australian Spatial Data Infrastructure)的计划中，GDA94已作为其地理信息的坐标参考基准而使用(Alister Nairn and Bob Irwin，1997)。

美国国家大地测量局NGS(National Geodetic Survey)计划通过高精度的GPS测量计算ITRF框架下的国内测站坐标。20世纪末这类测站数已达到2 000多个（1997年），这一数目最终将达到7 000个(Charlie Schwarz，1997)。对于这些测站，NGS还将给出它们在ITRF框架下的预报速度场，对于具有足够多期观测的测站则给出其实测的速度场。在NGS提供的测站坐标成果中，将同时提供该点在1983北美基准NAD83(North American Datum of 1983)下的坐标以及ITRF坐标和速度场两套成果，并注明“该点的ITRF坐标和速度场可用”。1996年11月以后，在NGS所发布的数据表光盘(NGSCD-ROM)中已经包含了测站的ITRF坐标，并正式提供使用。

参考基准又可以理解为“完全确定参考系统的必须因素”（宁津生，2000）。ITRS的基准则为原点、尺度、指向及其随时间的变化。对于我国的1985年黄海高程系统，基准就是水准原点及其高程值。国际上重力基准的演化值得追溯一下。在绝对重力测量已成为可能但仍然非常困难的年代，于1909年用当时最精确的数台可倒摆建立了波茨坦系统，即测定了一个点的绝对重力。直到1971年，国际上的重力点都是直接或者间接地与波茨坦系统进行相对重力测量建立的。波茨坦的这个绝对重力值可说是重力基准。出现了更精确的自由落体绝对重力仪之后，国际上于1971年建立了国际重力标准网(IGSN71)。在这个标准网中，8个台站是用绝对重力仪建立的，其他还有1 800多个台站是通过相对重力仪测量确定的。这个标准网中的每个台站都可以当做基准点用相对重力测量确定其他位置的重力。在这个意义上，这个标准网实质上是一个基准网。这个基准网也可以称之为一种重力基准。后来，由于绝对重力仪精度的进一步提高和普及，建立足够精确的绝对重力点以服务于相对重力测量已不像以前那样

困难。我国也建立了自己的绝对重力网,作为我国大地测量工作的重力测量基准,任何重力测量必须与这个基准相容。

实现一个地球参考系,就是建立一个与之相应的地球参考架。地球参考系从定义到实现需要以下几步工作:

(1) 给出理论定义和协议约定。

(2) 建立地面观测台站,并用空间大地测量技术进行观测。

(3) 根据前面对协议地球参考系的一些约定,采用国际推荐的一组模型和常数,对观测数据进行数据处理,解算出各观测台站在某一历元的站坐标,即建立一个国际协议地球参考架(ITRF)。

(4) 对于影响地面台站稳定的各种形变因素进行分析处理,建立相应的时变模型,以维持该协议地球参考架的稳定。

地球参考系的实现可分为建立和维持两个方面。

§3.2 综合各种技术建立全球最优的协议地球参考架 CTRF

由于各种地球动力现象的存在,以大地测量为目的的静态参考坐标系已不适用。现在迫切要求建立和维持一个长期稳定的参考系统,使各种随时变化的地球动力现象都在这个系统中表现出来,在其中表述地球动力理论并建立动力模型。由于地球是一个非刚性的形变体,建立一个固结于地球的参考系非常复杂,只能定义一个理想的地球参考系。理想参考系的定义为:相对于它地球只存在形变,不存在整体性旋转和平移;相对惯性参考系地球只存在整体性运动,如地球自转等。在理论上,通常采用 Tisserand 条件来实现理想的地球参考系(叶叔华等,2000)。而实际上很难用物理和数学模型来精确描述地球的各种形变,因此至今无法定义一个真正的理想参考系。实用的参考系仍是一种协议地球参考系(Conventional Terrestrial Reference System,CTRS),即对所建立的参考系的各种方法、参数和模型做出一定的协议。由一组参考点的位置和坐标来具体实现某一协议参考系,这组参考点的位置和坐标构成了一个协议参考框架(Conventional Terrestrial Reference Frame,CTRF)。

理论上,采用甚长基线干涉测量(VLBI)、卫星激光测距(SLR)、激光测月(LLR)、全球定位系统(GPS)和多普勒定轨与无线电定位系统(DORIS)等空间技术都能单独建立 CTRF。一般采用该技术的观测数据和有关的模型、常数,根据各自对参考架原点、尺度和定向的一些约定,经过复杂的数据处理技术完成。但因各种技术自身的局限性,包括各自性能、台站数量及分布的局限性,各观测技术机构,如 IGS(International GPS Service for Geodynamics)、ILS(International Lunar Society)等都很难根据自己的观测资料建立一个最优的 CTRF,各分析中心根据各自空间技术建立的 CTRF 势必会存在一定的偏差,从而影响 CTRF 的精度和应用。为此,有必要综合各种空间技术数据处理中心的分析解,建立一个较理想的、高精度的、统一的 CTRF。1988 年之前,由国际时间局(BIH)建立 CTRF,即 BTS 序列(BTS84-BTS87)。自 1988 年开始,这项工作改由新成立的国际地球自转服务(IERS)机构负责,所建立的 CTRF 为 ITRF 序列(ITRF88-2000)。

3.2.1 历元的统一

由于各分析中心提交的 CTRF(也叫站坐标组 SSC)的历元和其所采用的运动模型可能是

不同的,所以在综合处理以前,必须先根据各 CTRF 所采用的运动模型把它们归算到同一历元。归算可采用下面公式进行:

如果所采用的运动模型是某个绝对板块运动模型,例如 NNR-NUVEL1,则从历元 t_0 到历元 t 的坐标归算为

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(t_0) \\ Y(t_0) \\ Z(t_0) \end{bmatrix} + K\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_Z & \Omega_Y \\ \Omega_Z & 0 & -\Omega_X \\ -\Omega_Y & \Omega_X & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(t_0) \\ Y(t_0) \\ Z(t_0) \end{bmatrix}(t-t_0) \tag{3.1}$$

其中:Ω_X、Ω_Y、Ω_Z 是台站所处板块的欧拉矢量三分量,以度/百万年为单位。K 为将 Ω_X、Ω_Y、Ω_Z 化成弧度/年所乘系数,$K = 1.745\ 329\ 2 \times 10^{-8}$。

如果所采用的运动模型直接就是台站的运动速度场,则从历元 t_0 到历元 t 的坐标归算为

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(t_0) \\ Y(t_0) \\ Z(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_X(t-t_0) \\ V_Y(t-t_0) \\ V_Z(t-t_0) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

其中:V_X、V_Y、V_Z 是某站的站速度。

3.2.2 最优 CTRF 站坐标解算

由各种技术提供的坐标数据组(SSC)组合建立 CTRF 的观测方程是:

$$(\mathrm{CTRF})_j + V_j = X_j^i + \delta^i + R_1(\beta_1^i)R_2(\beta_2^i)R_3(\beta_3^i)X_j^i + D^iX_j^i \tag{3.3}$$

其中:$(\mathrm{CTRF})_j$ 为新的 CTRF 在 j 台站的坐标,V_j 为站坐标残差。X_j^i 为第 i 组 SSC 在 j 台站的站坐标,δ^i 是第 i 坐标组相对于新 CTRF 的三个平移参数,β_1^i、β_2^i、β_3^i 为三个旋转参数,D^i 为尺度参数。

要确定新 CTRF 的定向参数,还需要建立如下的观测方程:

$$\left.\begin{aligned} X_p + V_{XP} &= X_p^i + \beta_2^i - \alpha_1^i\sin\theta + \alpha_2^i\cos\theta \\ Y_p + V_{YP} &= Y_p^i + \beta_1^i + \alpha_1^i\cos\theta - \alpha_2^i\sin\theta \\ W_d \cdot UT1 + V_{UT1} &= W_d \cdot UT1^i - \beta_3^i + \alpha_3^i \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

其中:X_p^i、Y_p^i、$\mathrm{UT1}^i$ 是第 i 组 SSC 对应的地球自转参数(ERP:极移 X、Y 和世界时 UT1);X_p、Y_p、UT1 是新 CTRF 的 ERP,θ 为恒星时;小旋转角 α_1^i、α_2^i、α_3^i 是新 CTRF 对应的常规惯性系统 CIS (Conventional Intertial System)与第 i 组 SSC 对应的$(\mathrm{CIS})^i$ 之间的转角。

在上述方程中,待解参数是:各台站在新 CTRF 中的坐标$(\mathrm{CTRF})_j$,δ^i、β^i、D^i 和 α^i 以及 ERP(X_p,Y_p,UT1)。但是,如果式(3.4)中 X_p^i、Y_p^i、$\mathrm{UT1}^i$ 是平均值(在长于 1 天的间隔内),则 α_1^i 和 α_2^i 就不能求定,因为 sinθ 和 cosθ 项在一恒星日中平均为零。综上所述,与台站有关的参数$(\mathrm{CTRF})_j$ 确定了新的 CTRF,其他项则给出了该 CTRF 与第 i 组 SSC 的关系(δ^i,β^i,D^i)及与 CIS 的关系(X_p,Y_p,UT1),也给出了 CIS 与第 i 组 SSC 所对应的$(\mathrm{CIS})^i$ 的关系(α^i)。

在实际应用中,通常对新建立的 CTRF 的原点、尺度和定向作特殊的约定,例如 IERS 对 CTRF 的约定。因此在用式(3.3)和式(3.4)建立新的 CTRF 时,常附加一些必要的约束条件以使新的 CTRF 满足某种要求,下面分别加以说明:

(1) 对新 CTRF 坐标原点的约定

根据 CTRS 的定义,其原点应位于整个地球的质量中心。SLR 和 LLR 是动力学技术,能以

较高精度确定地球质心。所以一般新 CTRF 的坐标原点由这两种技术确定。方法是:使参加平差的某个分析中心(例如 CSR)的 STRF 的平移参数为零,或使参加平差的几个分析中心的 STRF 和 LTRF 的平移参数的加权和为零,即

$$\sum_i W_i \cdot \delta^i = 0 \tag{3.5}$$

其中:W_i 为第 i 个 SSC 的权,通过选择 W_i 可使新 CTRF 的原点定义在几种动力学技术确定的地球质心。

(2) 对新 CTRF 尺度的约定

关于 CTRF 的尺度,按定义应为引力相对论意义下一局部地球框架的尺度。实用中则是由各分析中心采用的光速 c,地球引力常数 GM 以及某种相对论改正模型来确定。上述数值和模型不同,各 SSC 的尺度也就不同。不过目前各分析中心一般都是采用 IERS 规范的推荐值,所以各 SSC 的尺度差并不大。新的 CTRF 的尺度一般是选用某个 STRF(如 CSR 提供的 STRF)的尺度,也可采用多个 STRF、LTRF 甚至 VTRF 的带权平均,即平差采用下面约束条件

$$\sum_i W'_i \cdot D^i = 0 \tag{3.6}$$

(3) 对新 CTRF 定向的约定

关于新建 CTRF 的定向,如无特殊约定,则由平差中解出的 ERP(X_p,Y_p,UT1)确定,但一般是先确定了新 CTRF 的定向参数,如 BIH/IERS 所建立时 BTS/ITRF 序列的定向都是由 BIH 在 1984.0 历元的定向参数确定,此时式(3.4)中的 X_p、Y_p、UT1 将作为已知值处理,不在平差中解算,式(3.4)实际上提供了对新建 CTRF 定向的约束条件。

对于上述(3.3)、(3.4)、(3.5)、(3.6)四个方程,可用最小二乘法进行平差,最终求得所有待定量,从而建立一个最优 CTRF。平差后的残差,可用于评价新的 CTRF 的实现精度。

3.2.3 最优 CTRF 速度场的建立

在 20 世纪 80 年代后期,随着 CTRF 实现精度的提高,已开始考虑因板块运动引起的台站漂移。从 BTS86-ITRF90,各分析中心采用的板块运动模型不尽相同,但 BIH/IERS 建立的 BTS/ITRF 都是采用 AM0-2 模型。从 ITRF91 开始,因有些分析中心不仅采用了新的板块模型 NNR-NUVEL1A,而且给出了那些具有较长观测历史的台站的实例站速度。因此,对于那些具有实测站速度的台站,ITRF91 速度场采用实测站速度(由各分析中心提供结果的综合平差给出),而对于那些尚无实测站速度的台站,用新的 NNR-NUVEL1A 模型给出其站速度。

联合平差的方法,完全类似于前面求解新 CTRF 站坐标的方法。即把各分析中心提供的站速度组(SSV)作为输入数据,用式(3.3)进行平差,求解出新 CTRF 的 SSV 以及它与其他 SSV 的变换参数。

§3.3 协议地球参考架的维持

在理想的参考架中,基本参考点的坐标应是固定的,或以一种理论上模型化了的方式运动。地球不是刚体,地球表面和内部存在着运动和形变。如果我们能把这些运动和形变对点位坐标的影响精确地加以模拟并改正,我们就可以建立并维持一个理想的地球参考架。但是,因地球上发生的运动和形变十分复杂,我们只能在一定量级上对一些影响较大且有规律的因素加以模拟并改正,从而建立并维持一个达到一定精度的地球参考架。

考虑到各种地球动力学因素的影响，位于固体地球表面一点的瞬时位置可表示为

$$X(t)=X_0(t_0)+\dot{X}_0(t-t_0)+\sum_k \Delta X_k(t) \tag{3.7}$$

其中：ΔX_k 是对各种短期或短周期时变影响的改正；$X_0(t_0)$ 和 $\dot{X}_0$ 是该点在历元 t_0 的平位置和速度。现今考虑的各项改正有：固体潮位移（包括长期位移）改正，海洋负载和大气负载位移改正等。如果其他局部形变因素的影响量级达到毫米级并能用适当的模型加以模拟，则应附加相应的改正。速度 $\dot{X}_0$ 是由一些长期时变因素引起的，目前考虑的因素主要有

$$\dot{X}_0=V_p+V_i+V_r \tag{3.8}$$

其中：V_p 是由于板块运动引起的点位变化速度，主要沿水平方向；V_i 是由于冰期后地壳均衡回弹引起的点位变化速度，主要沿垂直方向；V_r 主要是由地壳构造形变引起的点位变化速度。

固体潮等短期或短周期时变因素的影响这里不作讨论，仅讨论几种主要长期时变因素的影响和改正。

3.3.1 板块运动的影响和改正

板块构造学说认为，地球表面岩石圈由十几个板块构成，由于地幔对流的作用，这些板块之间存在着相对运动，运动的量级是 1～10cm/yr。目前，VLBI 和 SLR 等实测技术已经证实这种运动的存在，并且实测的板块运动与由地质记录和其他地球物理信息导出的最近几百万年内平均的板块运动基本一致。当板块运动时，地面台站的相对位置将发生变化，使 CTRF 产生变形。为维持 CTRF 的稳定，必须采用适当的板块运动模型对其影响加以改正。板块运动模型给出了各板块的运动角速度矢量（或称为欧拉矢量）$\boldsymbol{\Omega}(\Omega_X,\Omega_Y,\Omega_Z)$。对于 K 板块上的一点，如其点位坐标是 $X(X,Y,Z)$，则该点的运动速度为：

$$\begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_Z & \Omega_Y \\ \Omega_Z & 0 & -\Omega_X \\ -\Omega_Y & \Omega_X & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

采用式(3.1)或式(3.2)，都可计算因板块运动引起的站坐标变化。

自板块构造学说形成以来，地球科学家已建立了一系列板块运动模型。早期被广泛应用的是 Minster 和 Jordan 建立的相对板块运动模型 RM2 以及由它导出的绝对板块运动模型 Am1-2 和 AM0-2。AM0-2 是通过施加全球地壳无整体旋转约束条件由 RM2 导出的，而AM1-2 是采用热点数据由 RM2 导出的。因为，AM0-2 仅取决于板块边界的确定，而 Am1-2 取决于热点的选择，更易受不确定因素的影响。况且，导出 AM0-2 的约束条件与定义理想地球参考系的约束条件基本一致，所以 MERIT 规范和 IERS 规范都推荐采用 AM0-2。Am1-2 对应一个与下地幔连接的参考架，为表示一个地球引力位模型，该系统是必须的，因为该地球引力位模型不应存在因所用参考架的整体旋转而引起的长期变化。所以 Am1-2 常用于卫星跟踪数据的动力学分析中，一些 SLR 数据分析中心早期就偏爱 Am1-2。进入 20 世纪 90 年代，DeMets 等建立了一个新的相对板块运动模型 NUVEL-1，该模型在许多方面优于 RM2，所以它一经发表便被广泛引用。Gripp 和 Gordon 基于热点数据由 NUVEL-1 导出了参考于热点的绝对板块运动模型 HS2-NUVEL1，Argus 和 Gordon 则基于岩石圈无整体旋转（NNR）约束由 NUVEL-1 导出了参考于平均岩石圈的 NNR-NUVEL1 绝对模型。基于上述同样原因，IERS 规范推荐采用 NNR-NUVEL1 模型维持 CTRF 的稳定，从 ITRF93 开始采用 NNR-NUVEL1A 模型。值得说明的是，上述两种板块运动的绝对约束条件都是不完善的，可能存在某种问题，因此还需要探索

更合理的板块运动绝对约束条件。

地学板块运动模型(RM2 或 NUVEL-1)是由地质和地球物理资料导出的,它给出的只是板块运动在最近几百万年内的平均值,而空间大地测量技术则可测定目前正在发生的现时板块运动。因此,要维持现今 CTRF 的稳定,应该采用完全基于空间大地测量实测数据的现时板块运动模型。

利用 ITRF2000 实测速度场的 134 个台站,建立了独立于地质学的全球板块运动模型 ITRF2000VEL(符养等,2002)和 NNR-ITRF2000VEL(朱文耀、符养等,2003),ITRF2000VEL 是现时板块运动模型。

3.3.2 局部地壳形变的影响和改正

在研究大尺度板块运动,建立全球板块运动模型时,常把板块作为刚体处理。尽管在全球尺度上这样做是合理的,但对局部问题却不能这样处理。实际上板块并不是纯粹的刚体,在它的边界及内部某些地区一般都存在形变。位于形变地区的台站将不完全随整个板块一起运动(V_p),而是存在附加运动(V_r)。这种现象已被一些位于板块边界或内部形变区的台站的实测结果所证实。这种形变一般是由构造因素引起的中长期变化,可通过对形变地区的实际观测和构造学分析建立该地区的地壳形变模型,从而对 CTRF 中位于该地区的台站进行附加改正;或者像目前 IERS 的处理方式那样,通过实测求得台站的站速度,这是板块运动、局部形变及冰后回弹等长期运动的总体反映,直接用这个站速度对台站坐标进行改正。但这种方法仅适用于那些有长期观测积累的台站,而对于那些观测较少的台站,要进行精确的改正,仍需建立局部地壳形变模型。

3.3.3 冰期后地壳回弹的影响和改正

在整个地球历史中,地球表面的气候曾发生过剧烈的变化,地球上曾出现过多次冰川期。最近的一次冰川期发生在大约 18000 年以前,巨大的大陆冰盖在约 5000 年前基本消融完毕。虽然目前冰川消融几乎停止,但由于地幔的高均值粘弹性(量级为 10^{21} Pas),固体地球继续回弹以响应冰川的消退。James 和 Lambert(1993)给出了基于 ICE-3G 冰期后地壳回弹模型估计的现今地壳回弹速率。最大的回弹速率(超过 10mm/yr)发生在 Hudson 湾和 Bothnia 湾,这两处曾覆盖着最厚的冰盖。因此,要维持亚厘米级甚至毫米级 CTRF 的稳定,冰后回弹的影响已不容忽视。

Tushingham 和 Peltier 根据冰期后相对海平面变化的地球物理估计,考虑到地球内部的粘弹性结构,经过复杂的计算建立了 ICE-3G 冰川消退-地壳回弹模型。ICE-3G 模型比以前的 ICE-2 模型有更高的精度和分辨率。James 和 Lambert 用 ICE-3G 模型估计了北美和欧洲几个 VLBI 站的地壳回弹速率,量级为几个 mm/yr。目前已在冰后回弹显著地区建立了新的 VLBI 观测站,目的是精确测定这些站的回弹速度,并以此为约束建立更为精确的冰期后地壳回弹模型。

3.3.4 地球质心运动的影响和改正

各种地球动力学因素引起的地球各圈层质量再分布会导致地球质量中心的漂移。地球质心运动是一个十分复杂的过程,既有短期或短周期项,也有长期或长周期项。因地球参考系的原点定义在地球质心,地面点的坐标是相对于地球质心确定的,所以地球质心相对于地壳的运

动必然引起地面点坐标的改变。如果考虑地球质心运动的影响，前面所述一个地面点的四维点位模型应变为

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0(t_0) + (V_p + V_i + V_r + V_g)(t - t_0) \\ &\quad + \sum_i \Delta X_i(t) + \sum_j \delta X_j(t) \end{aligned} \tag{3.10}$$

式中：V_g 为地球质心引起的地面点长期或长周期变化，$\sum_j \delta X_j(t)$ 为地球质心运动引起短期短周期地面点坐标变化。

地球质心的运动将引起地球参考系（CTRS）定义的改变。CTRS 的原点定义在地球质心，而维持 CTRS 稳定的台站则位于地壳上，地球质心相对于地壳的运动等效于 CTRS 相对于整个地球的移动，亦即地球相对于 CTRS 存在整体平移，这与 CTRS 的定义是相矛盾的。因此，为了维持 CTRS 的稳定，我们设想像引入协议地极原点那样，引入协议地球质心的概念。即根据地球质心运动规律，在其主周期内求定一个平均地球质心位置，称为协议地球质心，使 CTRS 的坐标原点定义在协议地球质心。瞬时地球质心相对于协议地球质心的各种短期或周期项变化 $\sum_j \delta X_j(t)$ 可在解算测站平坐标时直接加以改正，而长期或长周期变化 V_g，与板块运动等因素一起改正。

CTRS 的坐标原点定义在协议地球质心，实际上改变了 CTRS 定义的第一点。在毫米级精度，这种改变是必然的，否则就难以维持一个稳定的 CTRS，并且相对于整个地球漂移的 CTRS 也不符合对 CTRS 定义的第四点。

§3.4 大地测量参考系统的几种具体实现

下面概略介绍 3 种用以表示几何位置的大地测量参考系统：我国 1980 年国家大地坐标系；国际大地测量坐标系统 WGS84；国际地球参考系统 ITRS。

我国 1980 年国家大地坐标系主要是前空间大地测量意义下的参考系统。它采纳了 1975 年国际大地测量协会推荐的地球椭球（IAG-75 椭球），极点采纳我国在 1949—1977 年期间 36 个台站的观测资料归算得到的 1968 年极原点，即 JYD1968.0，起始子午线采纳格林尼治子午线。地球椭球中心的位置是根据椭球面与我国拟大地水准面符合得最好的原则（最小二乘）确定的。大地原点位于我国中部的陕西省泾阳县永乐镇。

WGS84 是一个惯用地面参考系，在其定义中包括一个参考框架，一个参考椭球，一组协调的常数和一个与全球大地水准面有关的地球重力模型。一组协调的全球三维站坐标确定了一个原点的位置、一组正交的笛卡儿坐标轴的定向和一个比例尺，因此，一组站坐标确定了一个特定的参考框架。构成有效的 WGS84 参考框架的站坐标是那些永久性的 DOD（美国国防部，Department of Defense）GPS 监测站，见图 3.1。

WGS84 最初是利用 TRANSIT 大地测量卫星系统的多普勒观测确定的。后来进行了 2 次更新。第 1 次更新是 1994 年，WGS84 完全根据 GPS 观测重新确定，称为 WGS84（G730），其中 G 代表 GPS，730 表示进行了 730 个星期的观测。第 2 次是 1996 年，方法与前一次一样，称为 WGS84（G873），其中 G 仍代表 GPS，873 代表进行了 873 个星期的观测。

WGS84（G873）的中心、指向和尺度是根据 15 个 GPS 跟踪站的坐标确定的，其中 5 个跟踪站由美国空军维护，另外 10 个跟踪站由美国国家图像与制图局（NIMA）维护。将来，WGS84

还可能随跟踪站的增加或已有跟踪站天线的移动或更换而进一步改进。由于 GPS 卫星的广播星历是相对于 WGS84 的，所以利用广播星历适时定位得到的便是 WGS84 坐标，这使 WGS84 得到了广泛的应用。但是，高精度定位工作中通常不采用 WGS84，这是因为高精度定位需要已知的高精度控制点，各种高精度差分 GPS 定位技术均需要一个或多个高精度控制点，以消除系统误差。所以，要采用 WGS84 进行高精度定位，必须预先建立一个比较密集的高精度 WGS84 控制网。另一个影响高精度 GPS 定位的因素是 WGS84 中跟踪站的地壳运动速度（不向 GPS 用户提供）。

WGS84 符合 IERS 定义的协议地球参考系（CTRS），即：①中心在地球质心；②采用广义相对论下地固参照系中的尺度；③指向符合 IERS（事实上是其前身国际时间局，简称 BIH）1984.0 指向；④指向随时间的变化，使它相对地壳没有整体转动，这与 ITRS 是一致的。

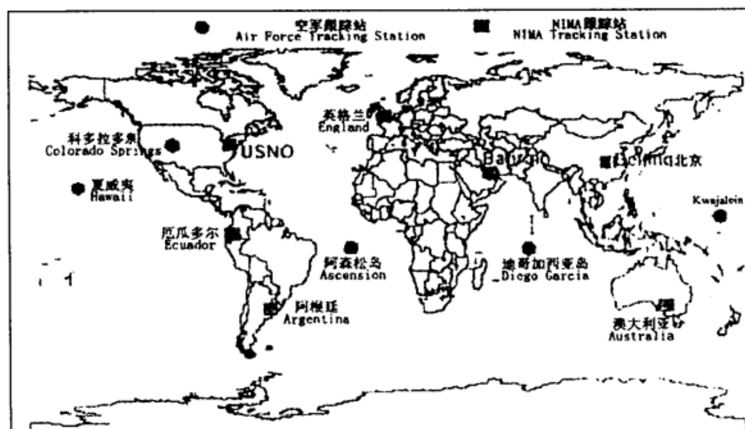


图 3.1　NIMA（National Imagery and Mapping Agency，国家影像制图局）和美国空军跟踪站的全球分布（引自黄立人，2002）

ITRS 是 20 世纪 80 年代后期引进的，目的是促进需要高精度定位的科学研究的开展，例如监测地壳及地球自转轴的运动。ITRS 的具体实现称为国际地球参考框架（ITRF）。从 1988 年起，IERS 基本上每年都发表 ITRS 的一种实现，即 ITRF88，ITRF89，…，ITRF2000。

ITRS 是第 1 个将板块运动及其他地壳运动考虑在内的国际大地测量参考系统，具体做法是同时给定控制点的坐标和速度。由板块运动理论不难理解给出速度的必要性。根据板块运动理论，地球表层的岩石圈由大约 20 块基本上为刚体的板块构成，这些板块在做相对的横向运动，位于不同板块上的点之间的相对运动速度有的达 150 mm/a，这用 GPS 是很容易探测到的。

既然地球表层的各板块在做相对运动，那么必然要提出这样一个问题：板块运动的“绝对”速度应该怎样表示呢？由于没有“绝对”不动的点作参考，所以要表示板块运动的“绝对”速度，必须预先知道一些点的“绝对”速度。这是个类似先有鸡还是先有蛋的难题。目前，建立 ITRS 时解决这一难题的办法是假设地球表层作为整体在平均意义下相对地球内部没有运动，换句话说，地球表层相对 ITRS 的总角动量等于零，即一个板块的角动量刚好由其他板块的角动量所抵消。这事实上是前面提及的 IERS 定义的 CTRS 的第 4 点内容的具体化。

ITRS 的所有具体实现 ITRF88，ITRF89，…，ITRF2000 都是由处于稳定板块内部的一些观测站的坐标和速度维持，其中的坐标是指某一历元的。例如，若已知 t_0 时刻的坐标，则 t 时刻的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + v_x(t - t_0) \\ y(t) &= y(t_0) + v_y(t - t_0) \\ z(t) &= z(t_0) + v_z(t - t_0) \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

其中：v 为速度。各期 ITRF 的 t_0 不同，可参阅表 2.4。

上述 3 种大地测量坐标系所采用地球椭球的参数见表 3.1。

表 3.1　地球椭球参数

	长半轴(m)	扁率(无量纲)
我国 80	6 378 140	1/298.257
WGS 84	6 378 137.0	1/298.257 223 563
ITRS	6 378 136.49	1/298.256 45

§3.5　ITRF 国际地球参考框架及 ITRF 框架之间的转换

3.5.1　IERS 国际地球自转服务

IERS 是 ITRF 的发布机构，于 1988 年由 IUGG 国际大地测量学与地球物理学联合会和 IAU 国际天文学联合会共同建立，用以取代 BIH 国际时间局的地球自转部分和原有的 IPMS 国际极移服务。IERS 同时也是 FAGS 天文与地球物理数据分析服务联盟的成员之一。

根据创建时的委托协议，IERS 的任务主要有以下几个方面(IERS，1991)：

(1) 维持国际天球参考系统和框架，即 ICRS 和 ICRF。

(2) 维持国际地球参考系统和框架，即 ITRS 和 ITRF。

(3) 为当前应用和长期研究提供及时准确的地球自转参数，即 EOP。

IERS 采用了多种技术手段进行观测和分析，来完成对上述参考框架和地球自转的监测。这些技术包括雷达干涉技术，如甚长基线干涉 VLBI 和激光测月 LLR 以及卫星大地测量技术，如激光测卫 SLR、GPS(自 1991 年起)、卫星轨道跟踪和定位 DORIS(自 1994 年起)。

IERS 通过分布在全球各地的 IERS 观测网(图 3.2)获取各种技术的观测数据，这些观测数据首先由不同技术各自的分析中心进行处理，如 VLBI 的分析中心有戈达德空间飞行中心 GSFC、波恩大学大地测量学院 GIUB、美国海洋和大气局 NOAA、美国喷气推进实验室 JPL 等；SLR 的分析中心有空间研究中心 CSR、戈达德空间飞行中心 GSFC 等；GPS 的分析中心有加拿大天然能源 NRCan(前 EMR)、德国地球科学研究所 GFZ、欧洲轨道测定中心 CODE、欧洲空间局 ESA、美国国家大地测量局 NGS、美国喷气推进实验室 JPL、美国斯克里普思海洋研究所 SIO 等；DORIS 的分析中心有法国空间大地测量研究所 GRGS、美国得克萨斯大学空间研究中心 CSR、法国国家地理研究所 IGN 等。最后由 IERS 中心局(IERSCB)根据各分析中心的处理结果进行综合分析，得出 ICRF、ITRF 和 EOP 的最终结果，并由 IERS 年度报告(IERS Annual

Report)和技术备忘录(Technical Notes)向世界发布,提供给各方面使用。ITRF2000 高质量测站分布情况见图 3.3。

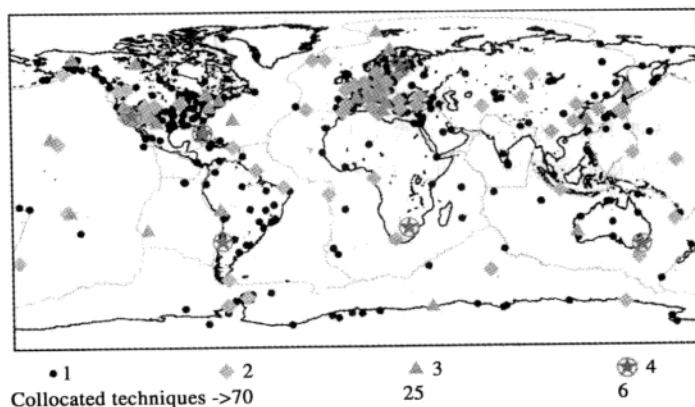


图 3.2 ITRF2000 框架的 54 个核心站和 736 个点位坐标站分布图
(1:GPS 站,2:SLR 站,3:VLBI 站,4:DORIS 站)

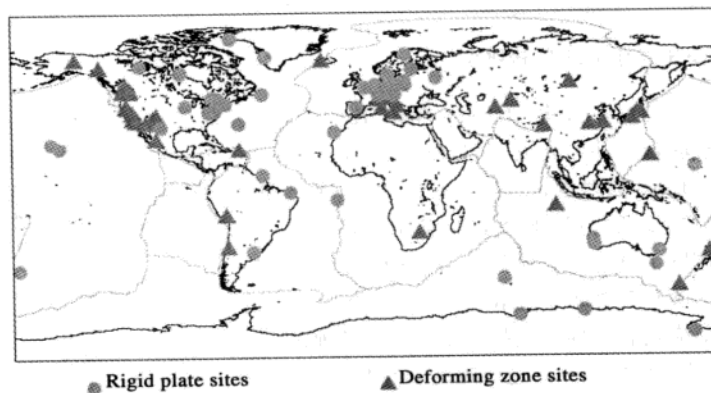


图 3.3 ITRF2000 框架的高质量测站分布情况(●刚性板块点,△变形区域点)
(引自 http://itrf.ensg.fr/ITRF_solution/2000)

3.5.2 ITRS 国际地球参考系统

ITRS 是国际地球参考系统,它的定义(具有理论意义)为(IERS Conventions,1996):

(1)ITRS 所定义的地心为包括海洋和大气的整个地球的质量中心。

(2)ITRS 的长度为米(SI),是在广义相对论框架下定义的。

(3)ITRS 坐标轴的定向与国际时间局 BIH1984.0 历元的定义一致。

(4)ITRS 系统的时间演变基准是使用满足无整体旋转 NNR(No-Net Rotation)条件的板块运动模型,来描述地球各块体随时间的变化。

ITRS 的建立和维持是由 IERS 全球观测网以及观测数据经综合分析后得到的站坐标和速度场来具体实现的，即国际地球参考框架 ITRF。

3.5.3 ITRF 国际地球参考框架及基准的定义

ITRF 是 ITRS 的具体实现，它采用 VLBI、SLR、LLR、GPS 和 DORIS 等多种空间观测技术，综合多个数据分析中心的解算结果构建地球参考框架，由 IERS 中心局 IERS CB 分析得到一组全球站坐标和速度场。

IERS CB 每年将全球站的观测数据进行综合处理和分析，得到一个 ITRF 框架，并以 IRES 年报和 IERS 技术备忘录的形式发布。国际地球自转服务（ITRS）发布的 ITRF 序列地球参考框架是国际上公认的精度最高、稳定性最好的参考框架。从 ITRF88 到 ITRF2000 共公布了 10 个序列（参见表 3.2）。

一个地球参考框架的定义，是通过对框架的定向、原点、尺度和框架时间演变基准的明确定义来实现的。自 ITRF 建立以来，随着技术水平的提高和新的测量手段的加入（GPS：1991 年；DORIS：1994 年），不同 ITRF 框架的定义也作了一些改进，其中包括：

（1）定向基准。ITRF93 的定向参数与其他的框架之间存在着显著的旋转关系。

（2）原点基准。ITRF88 至 ITRF93 的原点以得克萨斯大学空间研究中心 CSR 的 SLR 分析结果作为固定基准；ITRF94、ITRF96 的原点基准是取 SLR 和 GPS 结果的加权平均值。

（3）尺度基准。ITRF88 至 ITRF93 的尺度是以得克萨斯大学空间研究中心（CSR）的 SLR 分析结果作为固定基准；ITRF94、ITRF96 的尺度基准采用了 VLBI、SLR 和 GPS 结果的加权平均值。

（4）时间演变基准。ITRF88 至 ITFR90 采用 AMO-2 绝对板块运动模型；ITRF91 至 ITRF92 采用 NNR-NUVEL1 板块运动模型；ITRF93 加入了 IERS 的地球自转参数约束条件，它求出的全球站速度场模型与 NNR-NUVEL1A 模型存在一个小的旋转角；ITRF94、ITRF96、ITRF97 和 ITRF2000 仍然采用 NNR-NUVEL1A 模型。

框架之间的定义上的不同，造成了框架之间的系统性差异。

表 3.2　　**ITRF 坐标框架序列**

ITRF	观测技术	参考历元	速度场	板块运动模型
88	VLBI, SLR, LLR	1988.0	AM0-2, AM1-2	AM0-2, AM1-2
89	VLBI, SLR, LLR	1988.0	AM0-2, AM1-2	AM0-2, AM1-2
90	VLBI, SLR, LLR	1988.0	AM0-2, AM1-2	AM0-2, AM1-2
91	VLBI, SLR, LLR, GPS	1988.0	AM0-2, NNR-NUVEL1, 少量实测	AM0-2, NNR-NUVEL1
92	VLBI, SLR, LLR, GPS	1988.0	NNR-NUVEL1, 实测	AM0-2, NNR-NUVEL1
93	VLBI, SLR, GPS	1993.0	NNR-NUVEL1A, 实测	NNR-NUVEL1A
94	VLBI, SLR, GPS	1993.0	实测加 NNR-NUVEL1A 约束	NNR-NUVEL1A
96	VLBI, SLR, GPS, DORIS	1997.0	实测	没有说明
97	VLBI, SLR, GPS, DORIS	1997.0	实测	没有说明
2000	VLBI. SLR. GPS. DORIS. LLR	1997.0	实测加 NNR-NUVEL1A 约束	NNR-NUVEL1A

3.5.4 ITRF2000 坐标框架

IERS 于 2001 年 3 月 19 日公布了 ITRF2000 的初步结果。ITRF2000 综合了 3 个 VLBI、7 个 SLR、1 个 LLR、6 个 GPS、2 个 DORIS 和 1 个多技术(SLR + DORIS + PRARE) 分析中心的结果,同时有 6 个 GPS 网的结果作为 ITRF2000 的区域加密,产生了 736 个点位坐标和 54 个核心站。在综合解中考虑了各个分析中心结果的赋权,并进行了数据质量检查。ITRF2000 的原点采用 5 个 SLR 分析中心(CGS、SRL 、CSR、DGFI 和 JCET) 的结果加权平均。ITRF2000 定向与 ITRF97 在 1997.0 历元相同,速度场采用 NNR-NUVEL1A 地质模型。

ITRF2000 通过以下 4 条标准选择台站用于参考框架的定向:

(1) 至少连续观测 3 年以上。

(2) 远离板块边缘和形变带。

(3) 综合解的速度场精度优于 3mm/a。

(4) 至少 3 个以上分析中心的速度场残差小于 3mm/a。

通过以上筛选, ITRF2000 选出的 54 个核心站作为 ITRF2000 框架定向参考站,见表 3.3 。此外,满足条件(1)、(3)和(4)的台站有 41 个。54 个核心站的分布为欧亚板块 20 个,北美板块 15 个,阿拉伯板块 1 个,非洲板块 1 个,澳大利亚板块 14 个,南美板块 4 个,太平洋板块 4 个,纳兹卡板块 1 个,南极洲板块 4 个;印度、加勒比海、菲律宾和胡安德富卡海峡板块没有台站。

表 3.3　　ITRF2000 核心站

经度	纬度	国际代码	站名	板块	经度	纬度	国际代码	站名	板块
70.256	-49.351	91201M002	KERG	ANTA	24.395	60.217	10503S011	METS	EURA
77.973	-68.577	66010M001	DAV1	ANTA	36.759	55.699	12330M001	ZWEN	EURA
110.520	-66.283	66011M001	CAS1	ANTA	109.383	-27.148	41703M003	EISL	NAZC
166.669	-77.838	66001M003	MCMU	ANTA	-50.945	66.987	43005M001	KELY	NOAM
50.608	26.209	24901M002	BAHR	ARAB	-52.678	47.595	40101M001	STJO	NOAM
115.347	-29.046	50107M001	7090	AUST	-64.696	32.370	42501S004	BRMU	NOAM
115.885	-31.802	50133M001	PERT	AUST	-68.788	76.537	43001M001	THU1	NOAM
147.441	-42.804	50116S002	7242	AUST	-71.494	42.613	40440S003	7209	NOAM
148.978	-35.398	50103S010	1545	AUST	-71.987	42.934	40471S001	7618	NOAM
11.870	78.929	10317S003	7331	EURA	-75.624	45.454	40114M001	NRC1	NOAM
-4.251	40.427	13407S010	1565	EURA	-76.828	39.021	40451M105	7105	NOAM
0.336	50.867	13212S001	7840	EURA	-78.073	45.955	40104S001	7282	NOAM
4.359	50.798	13101M004	BRUS	EURA	-79.836	38.438	40441S001	7204	NOAM
5.810	52.178	13504M003	KOSG	EURA	-80.385	25.614	40499S001	7219	NOAM
6.884	50.525	14209S001	7203	EURA	-91.574	41.771	40465S001	7612	NOAM
7.465	46.877	14001S001	7810	EURA	-94.089	58.759	40128M002	CHUR	NOAM

续表

经度	纬度	国际代码	站名	板块	经度	纬度	国际代码	站名	板块
-3.952	40.444	13406M001	VILL	EURA	103.947	30.637	40442S017	7613	NOAM
11.280	48.086	14208M001	OBER	EURA	114.481	62.481	40127M003	YELL	NOAM
11.926	57.396	10402S004	7213	EURA	-15.633	27.764	31303M002	MASP	AFRC
12.877	49.145	14201S004	7224	EURA	167.730	8.722	50506M001	KWJ1	PCFC
13.066	52.379	14106M003	POTS	EURA	155.456	19.801	40477S001	7617	PCFC
14.786	49.914	11502M002	GOPE	EURA	159.665	22.126	40424S001	1311	PCFC
15.493	47.067	11001S002	7839	EURA	176.566	-43.956	50207M001	CHAT	PCFC
17.075	52.277	12205S001	7811	EURA	-14.412	-7.951	30602M001	ASC1	SOAM
20.670	53.892	12209M001	LAMA	EURA	-38.426	-3.878	41602S001	7297	SOAM
20.968	67.857	10403M002	KIRU	EURA	-52.806	5.252	97301M210	KOUR	SOAM
21.032	52.097	12204M001	JOZE	EURA	-57.932	-34.907	41510M001	LPGS	SOAM

ITRF2000 主要是利用 VLBI 和 SLR 观测建立的，主要特点是其方向随时间的变化是以它相对 NNR-NUVEL1A 没有纯转动的原则定义的。考虑到各种应用的需要，如大地测量、制图、导航等，尤其是用作世界各国(特别是会员国)的国家大地测量坐标系的需要，ITRF2000 不仅包含正在运行的空间大地测量仪器，还包含有用的标志，以方便测量工作。

3.5.5 不同 ITRF 框架之间的转换

由于不同时期 ITRF 框架之间四个基准分量定义的不同，使得 ITRF 框架之间存在小的系统性差异，这些系统性差异可以用 7 个参数来表示，表 3.4 给出了 ITRF2000 与不同的 ITRF 框架之间的转换参数及参数的变化率[IGS,2001]。

两个框架之间的转换公式为：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & -R_3 & R_2 \\ R_3 & D & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{3.12a}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{D} & -\dot{R}_3 & \dot{R}_2 \\ \dot{R}_3 & \dot{D} & -\dot{R}_1 \\ -\dot{R}_2 & \dot{R}_1 & \dot{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \tag{3.12b}$$

其中：$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_S$ 和 $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ 分别为转换框架和 ITRF2000 框架的坐标；$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}_S$ 和 $\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix}$ 分别为转换框架和 ITRF2000 框架的坐标变化率，$T_1, T_2, T_3, D, R_1, R_2, R_3$ 和 $\dot{T}_1, \dot{T}_2, \dot{T}_3, \dot{D}, \dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{R}_3$ 分别为 ITRF2000 框架到目标框架的 7 个转换参数和参数的变化率，这些参数由表 3.4 给出的基准历元的参数 $P(t_0)$，加上基准历元 t_0 到转换历元 t 的变化量得到，即

$$P(t) = P(t_0) + \dot{P} \times (t - t_0) \tag{3.13}$$

这样由式(3.12)和式(3.13)就可以完成不同的参考框架在指定历元 t 的坐标转换。

表 3.4　　**ITRF2000 框架与其他 ITRF 框架之间的转换参数**

ITRF 框架	T_1 (cm)	T_2 (cm)	T_3 (cm)	D (PPb)	R_1 (mas)	R_2 (mas)	R_3 (mas)	基准历元
	$\dot{T}_1$ (cm/a)	$\dot{T}_2$ (cm/a)	$\dot{T}_3$ (cm/a)	$\dot{D}$ (ppb/a)	$\dot{R}_1$ (mas/a)	$\dot{R}_2$ (mas/a)	$\dot{R}_3$ (mas/a)	
ITRF97	0.67	0.61	-1.85	1.55	0.00	0.00	0.00	1997.0
	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF96	0.67	0.61	-1.85	1.55	0.00	0.00	0.00	1997.0
	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF94	0.67	0.61	-1.85	1.55	0.00	0.00	0.00	1997.0
	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF93	1.27	0.65	-2.09	1.95	-0.39	0.80	-1.14	1988.0
	-0.29	-0.02	-0.06	0.01	-0.11	-0.19	0.07	
ITRF92	1.47	1.35	-1.39	0.75	0.00	0.00	-0.18	1988.0
	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF91	2.67	2.75	-1.99	2.15	0.00	0.00	-0.18	1988.0
	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF90	2.47	2.35	-3.59	2.45	0.00	0.00	-0.18	1988.0
	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF89	2.97	4.75	-7.39	5.85	0.00	0.00	-0.18	1988.0
	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	
ITRF88	2.47	1.15	-9.79	8.95	0.00	0.00	-0.18	1988.0
	0.00	-0.06	-0.14	0.01	0.00	0.00	0.02	



第4章　潮汐大地测量观测方法及潮汐改正

理论固体潮与实际固体潮有较大的差异，这主要是由于对地球内部的流变特性（特别是粘滞系数）了解不足，因而从理论上很难计算由地球形变引起的潮汐影响。为此，需要采用观测手段直接测量潮汐效应。反过来，通过理论值与观测值的比对，就有可能获得地球内部的物理参数。这是利用大地测量手段研究地球物理问题的范例之一。

利用绝对重力仪（超导重力仪）在任意一点 A 作长期固定观测，即可测出该点的重力值随时间变化的规律。随时间变化的周期波动部分，即为实际的重力潮汐。但有一个关键性的问题，那就是要对 A 点的坐标进行校正，因为 A 点的坐标随着地球的形变而变，所测重力必然包含由于位置变化而引起的重力变化，这部分变化当然不属于固体潮。为此，还需要对 A 点的坐标进行监测（比如利用 GPS 定位技术），然后利用正常重力模型计算出由于点位变化而引起的重力变化值，将其从绝对重力观测值中扣除。因此，前面所说的重力观测值中的周期波动部分，实际上是指已经过点位校正的重力观测值的周期波动部分。显然，这一过程本身也是相当复杂的，因为点位误差又会带来二级影响。今假定垂直方向的点位监测精度为 1cm，那么，由此而带来的重力变化约 1.6 微伽($1\mu\text{Gal}=10^{-8}\text{m/s}^2$)。这就是说，如果监测点位的精度只能达到厘米级水平，那么，测定固体潮的绝对重力仪的精度也只需保持在微伽级。精度再高，没有什么益处，因为已被点位误差所掩盖，除非能以高于厘米级的精度确定点位坐标。目前的超导重力仪已能达到亚微伽级的测量精度，主要用于在固定台站测量潮汐效应。在亚微伽级甚至更高的精度水平上，我们还必须考虑大气潮汐、行星潮汐、地球旋转不均匀潮汐，等等。同时，地球旋转的不均匀性又会直接影响到点位坐标，从而影响到重力场变化。这是一个极为复杂的相互影响的系统。

§4.1　验潮站观测及守则

本节内容主要说明设置固体潮重力台站的注意事项、数据采集要求以及固体潮重力观测的基本程序，包括计算公式（中国地震局，2001）。

4.1.1　观测对象及技术要求

(1) 观测对象：台站重力观测的对象是测点的重力加速度（简称重力）随时间的变化，重力的单位是 m/s^2。

(2) 技术要求：精度要求为 $1\times10^{-9}\text{m/s}^2$，采样率为 1 次/min。

4.1.1.1　观测台站及观测系统

(1) 观测台址勘选。台址选在布格异常梯度带、地质构造变异带或地震活动带内，避免在孔隙度大、吸水率高、松散破碎的岩体上建台。距大水库、大湖泊、大河流的距离≥3km，距

铁路、主干公路≥1km，距海岸距离≥10km，避开地下水位变化大的地区，避开强电磁场及强振动等干扰源。

(2) 仪器室设计。仪器室的结构和尺寸应满足所选仪器的要求，仪器墩直接建在基岩上，与基岩连成一体，墩面平整。

(3) 记录室设计。建造安置数据采集系统、标定系统和辅助设备的固定平台。

4.1.1.2 观测台站及观测系统

(1) 观测台址环境。台址3km范围内不得进行深层抽注水、采石爆破、筑堤建水库，1km范围内不得修建大型仓库和建筑铁路和主干公路。

(2) 仪器室环境条件。仪器洞室的覆盖厚度≥30m，洞室地面高于当地最高洪水位；仪器室日温差≤0.1℃、年温差≤1℃、相对湿度≤80%；交流电压180～240V，设置地线，接地电阻≤5Ω；安装避雷设备；室内防尘。

4.1.1.3 观测系统技术要求

(1) 测试仪器技术要求。分辨率优于1mV；非线性度不超过1%；动态范围（最大量程与分辨率之比）应大于4 000；灵敏系数不超过$3\times10^{-9}m^2\cdot V\cdot s^{-2}$；采样率1次/min；工作电压180～240V；具有交直流切换功能；使用寿命超过10a；使用恒温箱控温仪器。

(2) 辅助设备技术要求。时号系统日差不超过1s；仪器室恒温设备分辨率为0.1℃；气压观测分辨率0.1hPa；湿度观测分辨率为1%。

4.1.1.4 观测质量监控

(1) 对重力仪需进行面板常数标定和测量格值标定（具体标定法可参照中国地震局，2001）。

(2) 面板常数标定。按优选次序分三类：国家基线场比测法，倒小球法，对比观测法。

(3) 格值标定。在规定时段内连续标定次数不少于3，标定格值的互差不超过$0.005\times10^{-8}m^2\cdot V\cdot s^{-2}$。

(4) 标定周期。定期标定；仪器安装、检修前后进行标定；确定异常认为必要时可进行标定。

(5) 标定时间。标定时间为小潮的波峰或波谷时段。

(6) 观测系统性能检验。定期对观测系统性能进行检验，并提交评估报告。

(7) 值班日志。值班人员当日填写值班日志，标明天气过程及观测曲线中断、形态畸变的时段（准确至小时）；收集中强地震时的特异记录图像或典型的干扰图像；对突变事件及时调查核实，记录调查核实结果并上报。

4.1.1.5 观测数据的收集、处理与报送

(1) 数据采集。采集重力、气压及温度观测仪器的原始输出分钟值、整点值。

(2) 数据处理。按日将原始采样数据处理成重力、气压和温度的分钟值、整点值，填报整点值表，绘制整点值曲线图；按月处理出重力、气压和温度的日均值、旬均值、月均值，生成月整点值数据文件，打印整点值月表并绘制月整点值曲线图；若记录数据缺值时间少于4小时，按记录曲线走势补插数据，补插数据加圆括号以示区别；若中断4小时以上，按指定方法

处理。

(3) 数据存储。重力、气压和温度的分钟值、整点值数据文件以磁介质保存于台站一份；重力、气压和温度的整点值数据以纸价值保存于台站一份。

(4) 资料报送。台站按有关规定报送以下资料：①每日报送前一天重力分钟值观测数据文件；②每月报送整点值观测数据文件、月报表和月整点值曲线图；③每年报送全年日均值曲线图、辅助观测数据（室温、湿度、气压、温度、降雨量）曲线图、工作年表及年度技术工作总结。

4.1.2 重力固体潮观测

4.1.2.1 重力固体潮理论值

(1)封闭公式

$$G(t)=165.17F(\varphi)\left(\frac{c}{r}\right)^3\left(\cos^2 Z-\frac{1}{3}\right)-1.37F^2(\varphi)\left(\frac{c}{r}\right)^4\cos Z(5\cos^2 Z-3)$$
$$76.08F(\varphi)\left(\frac{c_s}{r_s}\right)^3\left(\cos^2 Z_s-\frac{1}{3}\right)\tag{4.1}$$

$$F(\varphi)=0.998327+0.00167\cos 2\varphi\tag{4.2}$$

其中：φ 为测站纬度；c、r、Z、c_s、r_s、Z_s 分别代表月亮和太阳相对地球的平均距离、瞬时距离和地心天顶距。

儒略世纪数按下式计算：

$$T=\left(T_0-2415020.0+\frac{t-T_e}{24}\right)/36525\tag{4.3}$$

其中：T_0 为计算时的儒略日；t 为计算时刻；T 为计算时刻的儒略世纪数；T_e 表示时区。

6 个天文参数的计算：

$$\begin{aligned}
s&=270.43659^\circ+481267.89057^\circ T+0.00198^\circ T^2+0.000002^\circ T^3\\
h&=279.69688^\circ+36000.76892^\circ T+0.00030^\circ T^2\\
p&=334.32956^\circ+4069.03403^\circ T-0.01032^\circ T^2-0.00001^\circ T^3\\
N&=259.18328^\circ-1934.14201^\circ T+0.00208^\circ T^2+0.000002^\circ T^3\\
p_s&=281.22093^\circ+1.71902^\circ T+0.00045^\circ T^2+0.00003^\circ T^3\\
\varepsilon&=23.45229^\circ-0.01301^\circ T-0.000002^\circ T^2
\end{aligned}\tag{4.4}$$

月亮参数 c/r 和 $\cos Z$ 的计算：

$$\begin{aligned}
\frac{c}{r}=&1+0.054\cos(s-p)+0.003\cos 2(s-p)+0.01\cos(s-2h+p)\\
&+0.0082\cos 2(s-h)+0.0006\cos(2s-3h+p_s)+0.0009\cos(3s-2h-p)\\
\lambda=&s-0.0032\sin(h-p_s)-0.001\sin(2h-2p)+0.001\sin(s-3h+p+p_s)\\
&+0.0222\sin(s-2h+p)+0.0007\sin(s-h-p+p_s)-0.0006\sin(s-h)\\
&+0.1098\sin(s-p)-0.0005\sin(s+h-p-p_s)+0.0008\sin(2s-3h+p_s)\\
&+0.0115\sin(2s-2h)+0.0037\sin(2s-2p)-0.0020\sin(2s-2N)\\
&+0.0009\sin(3s-2h-p)\\
\beta=&-0.0048\sin(p-N)-0.0008\sin(2h-p-N)+0.003\sin(s-2h+N)
\end{aligned}$$

$$+0.0895\sin(s-N)+0.001\sin(2s-2h+p-N)+0.0049\sin(2s-2p-N)$$
$$+0.0006\sin(3s-2h-N)$$
$$\sin\delta=\sin\varepsilon\sin\lambda\cos\beta+\cos\varepsilon\sin\beta$$
$$\cos\delta\cos H=\cos\beta\cos\lambda\cos\theta+\sin\theta(\cos\varepsilon\cos\beta\sin\lambda-\sin\varepsilon\sin\beta)$$
$$\cos Z=\sin\varphi'\sin\delta+\cos\varphi'\cos\delta\cos H$$
$$\theta=(t-T_e)15^{\circ}-h+L-180^{\circ} \tag{4.5}$$
$$\varphi'=\varphi-0.193296^{\circ}\sin2\varphi$$

其中：λ、β、δ、H 分别为月亮的黄经、黄纬、赤纬和时角，θ 是地方恒星时时角，φ'、L 为测站的地心纬度和经度。

太阳参数 c_s/r_s 和 $\cos Z_s$ 的计算：

$$\frac{c_s}{r_s}=1+0.0168\cos(h-p_s)+0.0003\cos2(h-p_s)$$
$$\lambda_s=h+0.0335\sin(h-p_s)+0.0004\sin2(h-p_s)$$
$$\beta_s=0$$
$$\cos Z_s=\sin\varphi'\sin\varepsilon\sin\lambda_s+\cos\varphi'(\cos\lambda_s\cos\theta+\sin\theta\cos\varepsilon\sin\lambda_s) \tag{4.6}$$

（2）分波公式

$$G(t)=\sum_{i=1}^{k}a_i\cos(\omega_i t+\varphi_i^0) \tag{4.7}$$

其中：a_i 为分波振幅，ω_i 为分波频率，φ_i^0 为初始相位。

4.1.2.2 重力固体潮观测值

（1）封闭公式

$$G_0(t)=\delta G(t+\Delta t)+\sum_{k=0}^{m}c_k t^k \tag{4.8}$$

其中：δ 为潮汐因子，Δt 为时间滞后，$c_k(k=1,2,\cdots,m)$ 为漂移多项式系数。

（2）分波公式

$$G_0(t)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i a_i\cos(\omega_i t+\Delta\varphi_i+\varphi_i^0)+\sum_{k=0}^{m}c_k t^k \tag{4.9}$$

其中：δ_i 和 $\Delta\varphi_i$ 为各分波的潮汐因子和滞后相位。

4.1.2.3 观测精度计算及精度指标

（1）观测精度计算

观测精度采用包括漂移的最小二乘拟合法估计得到，其数学模型为：

$$G_0(t)=\delta G(t)+\delta\Delta t\frac{\partial G(t)}{\partial t}+\sum_{k=0}^{m}c_k t^k \tag{4.10}$$

通过对两天 48 小时整点值固体潮观测资料的最小二乘拟合法计算，获取参数 δ、Δt、c_k（$k=0,1,2$），同时按下式估算精度：

$$m=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{48}v_i v_i}{48-5}} \tag{4.11}$$

其中：v_i 表示每一整点值的拟合残差。

(2)精度指标

$\eta=(m\leqslant 2\times 10^{-8}\mathrm{m/s^2}$ 的段数$)$/总段数$\times 100\%$

新 GS-15 和 LCR 定点重力仪：$\eta\geqslant 90\%$

老 GS-15 和 DZW 重力仪：$\eta\geqslant 85\%$。

§4.2　潮汐应力场及潮汐因子

4.2.1　潮汐应力场

根据 2.6 节的讨论，将地球看做弹性体，可写出如下方程

$$(\lambda+\mu)\partial^i\theta+\mu\nabla^2u^i+f^i=0 \tag{4.12}$$

其中：$\theta=\partial_iu^i$ 是体膨胀系数（注意求和约定）；u^i 是位移；$\partial^i\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_i}$，$\partial_i\equiv\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$x^i\equiv x_i$。方程(4.12)中，$f^i$ 是体力密度。就目前的论题而言，这里的体力密度就是潮汐力 ∂^iU_t。于是，方程(4.12)可以写成如下形式：

$$(\lambda+\mu)\partial^i\theta+\mu\nabla^2u^i+\partial^iU_t=0 \tag{4.13}$$

今假定地球是各向同性（因而肯定均匀）的球对称体，因而具有恒定的勒夫数以及拉梅系数。根据 2.3 节的讨论，假如知道了二阶勒夫数，也就知道了拉梅系数。这样，根据三元一次偏微分方程组（4.13）即可解出位移 u^i，在求解过程中所需要的边值条件是简单的：在地球中心，u^i 以及 ∂_ju^i 均为零。有了位移场即可根据如下的几何方程

$$\Gamma_j^i=\frac{1}{2}(\partial_iu^j+\partial_ju^i) \tag{4.14}$$

求出应变场，然后利用广义胡克定律求出应力场 τ_j^i（见 2.6 节）。对于球对称体而言，选用球坐标求解比较简单：以地月连线为第三轴 x^3，同时 x^i 构成右旋正交坐标系；用 θ_P 表示地球内任意一点 P 至地心的连线与 $O\text{-}x^1x^2$ 面之间的夹角，则有 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-z$（z 是月球的天顶距）。由此求解出的应力场如下（张国民等，2001）

$$
\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{2(4\lambda+3\mu)GM_m\rho}{(19\lambda+14\mu)c_m^3}(a^2-r^2)(3\cos^2\theta_P-1)\\
\sigma_\theta &= -\frac{2(4\lambda+3\mu)GM_m\rho}{(19\lambda+14\mu)c_m^3}(a^2-r^2)(3\cos^2\theta_P-2)+\frac{(3\lambda+2\mu)GM_m\rho}{(19\lambda+14\mu)c_m^3}r^2\\
\sigma_\Lambda &= -\frac{2(4\lambda+3\mu)GM_m\rho}{(19\lambda+14\mu)c_m^3}(a^2-r^2)+\frac{(3\lambda+2\mu)GM_m\rho}{(19\lambda+14\mu)c_m^3}r^2(3\cos^2\theta_P-2)\\
\tau_{r\theta_P} &= -\frac{6(4\lambda+3\mu)GM_m\rho}{(19\lambda+14\mu)c_m^3}(a^2-r^2)\sin\theta_P\cos\theta_P\\
\tau_{r\Lambda} &= \tau_{\theta_P\Lambda}=0
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

其中：ρ 和 a 分别是地球的平均密度和平均半径；c_m 是地月平均距离。在地球表面有（由于 $r=a$）：

$$\sigma_r=\tau_{r\theta_P}=\tau_{r\Lambda}=\tau_{\Lambda\theta_P}=0$$

$$\sigma_{\theta}=\frac{(3\lambda+2\mu)GM_m\rho}{(19\lambda+14\mu)c_m^3}a^2$$

$$\sigma_{\Lambda}=\frac{(3\lambda+2\mu)GM_m\rho}{(19\lambda+14\mu)c_m^3}a^2(3\cos^2\theta_P-2) \tag{4.16}$$

体应力可以表示成

$$\Theta=\tau_i^i=\sigma_r+\sigma_{\Lambda}+\sigma_{\theta_P}=\frac{(3\lambda+2\mu)GM_m\rho}{(19\lambda+14\mu)c_m^3}a^2(3\cos^2\theta_P-1) \tag{4.17}$$

粗略估计，若取 $\lambda=\mu,\rho=5.5\mathrm{g/cm^3},M_m=M_e/81.3$（其中 M_e 是地球质量），地月平均距离 $c_m=3.84\times10^{10}\mathrm{cm},a=6.37\times10^8\mathrm{cm}$,那么，由月球引起的地表潮汐应力的最大值为

$$\sigma_{\max}=\frac{(3+2)GM_m\rho}{(19+14)c_m^3}a^2\approx88\mathrm{g/cm^2} \tag{4.18}$$

由太阳引起的最大潮汐应力大约 $40\mathrm{g/cm^2}$。二者的叠加可达到 $128\mathrm{g/cm^2}$，相当于 0.13 个大气压（张国民等，2001）。若考察地心，月球引起的应力为

$$\sigma_{\max}^0=\frac{4(2+3+2)GM_m\rho}{(19+14)c_m^3}a^2=5.6\times88\approx493\mathrm{g/cm^2} \tag{4.19}$$

4.2.2 潮汐因子

勒夫数表达了弹性地球形变与理想流体地球形变之间的关系。潮汐因子则表示实测潮幅与理论潮幅之比。在固体潮分析中主要有重力潮汐因子 δ、地倾斜潮汐因子 γ、经纬度潮汐因子 Λ 以及体积膨胀潮汐因子 f(张国民等，2001)。它们与勒夫数之间存在如下关系

$$\begin{aligned}&\delta_n=1+\frac{2}{n}h_n-\frac{n+1}{n}k_n\\&\gamma_n=1+k_n-h_n\\&\Lambda_n=1+k_n-l_n\\&f_n=(ah'+2h_n)+2h_n-n(n+1)l_n\end{aligned} \tag{4.20}$$

通常只考虑二阶项。通过对实测资料的调和分析可以求出如下结果（张国民等，2001）：

$$\begin{aligned}&ah'+2h_n=-0.25,\delta_2=1.16\\&\gamma_2=0.68,\Lambda_2=1.21,f_2=0.50\end{aligned} \tag{4.21}$$

§4.3 重力固体潮观测

4.3.1 勒夫数的潮汐估值

4.3.1.1 潮汐力的地表响应

地球固体潮可通过测量地球形状或质量分布的周期性变化得到,也可通过测量如下几种量得到:

(1)地球表面的重力变化。

(2)地壳内的应变变化。

(3)地表相对于当地垂线的倾斜变化。

这些周期性变化都很小，重力约为 0.1mGal（10^{-6} m/s^2）量级，地壳或垂线偏差为 0.04″量级。

如果由位于 $\boldsymbol{r}_*$ 处的引潮力源体造成的 $\boldsymbol{r}$ 处的位用 $V_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_*)$ 表示，那么潮汐变形体的位可表示成

$$\Delta V_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_*) = k_n\left(\frac{R}{r}\right)^{2n+1} V_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_*) \tag{4.22}$$

在 $r=R$ 处的等位面移了一个 $N=\Delta V_n/g$ 的量。地球之外，引潮位与潮汐变形位的和为

$$\begin{aligned} V_n^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_*) &= V_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_*) + \Delta V_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_*) \\ &= \left(1 + k_n\left(\frac{R}{r}\right)^{2n+1}\right) V_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_*) \end{aligned} \tag{4.23}$$

自由面响应引潮位的变形为

$$u_n = \frac{h_n}{g} V_n(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r}_*) = \frac{h_n}{g}\left(\frac{R}{r}\right)^n V_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_*) \tag{4.24}$$

海洋覆盖的行星相对于固体球体的水位变化为

$$\xi = (1 - h_n + k_n) V_n(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_*)/g \tag{4.25}$$

变形后地表的重力变化为

$$\Delta g = -\frac{\partial V_n^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_*)}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial r} u_n$$

或

$$\begin{aligned} \Delta g(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r}_*) &= -\frac{n}{R}[1 + 2h_n/n - k_n(n+1)/n] V_n(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r}_*) \\ &= -(n/R)\delta_n V_n(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r}_*) \end{aligned} \tag{4.26}$$

其中：

$$\delta_n = 1 + 2h_n/n - k_n(n+1)/n \tag{4.27}$$

对于二次主分潮

$$\Delta g(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r}_*) = -\frac{2}{R}\left(1 + h_2 - \frac{3}{2}k_2\right) V_2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r}_*) = -\frac{2}{R}\delta_2 V_2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r}) \tag{4.28}$$

式中：δ_2 为二阶重力振幅因子。采用理论值 $k_2=0.3$ 和 $h_2=0.6$，方程（4.28）中间表达式的三项的比值为 100∶60∶45，且径向变形超出了质量重新分布的项。但是这两种效应部分抵消，且弹性地球上的潮汐重力仅超过等价刚体潮汐重力的 15%。重力潮汐变化一般为 50～100μGal（1μGal $=10^{-8}$ m/s^2）量级。若要以具有地球物理意义的 0.1% 的精度测量弹性形变（δ^2-1），仪器的精度至少要达到 0.01μGal。这仅是对主要的潮汐分量而言，但某些有意义的周日潮汐的振幅仅为这些值的 1% 左右。

地球对潮汐位响应的延迟导致变形在太阳或月球经过中天后的 ΔT 时刻达到最高值。因此，对于滞弹性地球（只考虑二次项），有

$$\begin{aligned} \Delta g_2 = -\frac{2}{R} A_{2m}^{(v)} p_{2m}(\sin\phi) \Bigg[& \left(1 - \frac{3}{2}h_2 + k_2\right) \\ & \times \cos(\sigma_{2m}^{(v)} T - m\lambda) + \left(h_2 - \frac{3}{2}k_2\right) \sin\varepsilon_{2m}^{(v)} \sin(\sigma_{2m}^{(v)} T - m\lambda) \Bigg] \end{aligned} \tag{4.29}$$

式中：$\varepsilon_{2m}^{(v)}$ 为滞后角，与延迟 ΔT 和耗散函数 Q^{-1} 有关。根据地表重力仪经历的滞后角 $\Delta_{2m}^{(v)}$，有

$$\Delta g_2 = -\frac{2}{R}A_{2m}^{(v)}\left(1 + h_2 - \frac{3}{2}k_2\right)p_{2m}(\sin\phi)\cos(\sigma_{2m}^{(v)}T - m\lambda - \Delta_{2m}^{(v)}) \tag{4.30}$$

及

$$\varepsilon_{2m}^{(v)} \approx -\frac{1 + h_2 - \frac{3}{2}k_2}{h_3 - \frac{3}{2}k_2}\Delta_{2m}^{(v)} \approx -7.7\Delta_{2m}^{(v)} \tag{4.31}$$

$Q \approx 100$ 时，$\varepsilon_{2m}^{(v)} \approx 0.6°$，$\Delta_{2m}^{(v)} < 0.1°$。

相对于地表的垂线潮汐偏差用灵敏的水平摆测定，响应由三部分组成：由月球和太阳的直接引力造成的等位面偏差；通过体内的质量再分布造成的位的改变；地表变形。在子午圈测量的这三个分量分别为

$$\frac{1}{8R}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}v_n(\boldsymbol{R},\bar{\boldsymbol{r}});k_n\frac{\partial}{\partial\phi}v_n(\boldsymbol{R},\bar{\boldsymbol{r}});-h_n\frac{\partial}{\partial\phi}v_n(\boldsymbol{R},\bar{\boldsymbol{r}})\right] \tag{4.32}$$

考虑滞弹性效应，倾斜的子午分量为

$$\xi_\phi = \frac{1}{Rg}(1 - h_n + k_n)\frac{\partial}{\partial\phi}V_n(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r}) \equiv \frac{1}{Rg}\gamma_n\frac{\partial}{\partial\phi}V_n(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r}) \tag{4.33}$$

其中：

$$\gamma_n = 1 - h_n + k_n \tag{4.34}$$

同样，与子午圈正交的分量为

$$\xi_\lambda = \frac{1}{Rg\cos\phi}\gamma_n\frac{\partial}{\partial\phi}V_n(\boldsymbol{R},\boldsymbol{r}) \tag{4.35}$$

式中：γ_n 为 n 次的倾斜因子。对于勒夫数名义值，$\gamma^2 = \gamma \approx 0.70$。测得的倾斜潮滞后 $\Gamma_{2m}^{(v)}$ 与 $\varepsilon_{2m}^{(v)}$ 的关系是

$$\varepsilon_{2m}^{(v)} = \frac{1 - h_2 + k_2}{-h_2 + k_2}\Gamma_{2m}^{(v)} \approx 2.5\Gamma_{2m}^{(v)} \tag{4.36}$$

天文纬度观测是测量观测员的垂线与自转轴的瞬时位置之间的角度，垂线的潮汐偏差在该角中引入摄动，若略去滞弹性，则为

$$\left.\begin{aligned}\Delta\phi_a &\approx \frac{1}{Rg}(1 + k_n - l_n)\frac{\partial V_n}{\partial\phi} = \frac{1}{Rg}x_n\frac{\partial V_n}{\partial\phi}\\ \Delta\lambda_a &\approx \frac{1}{Rg\sin\phi}(1 + k_n - l_n)\frac{\partial V_n}{\partial\lambda} = \frac{1}{Rg\sin\phi}x_n\frac{\partial V_n}{\partial\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

其中：

$$x_n = 1 + k_n - l_n \tag{4.38}$$

基于地表变形分量 (u_r, u_ϕ, u_λ)，ϕ 和 λ 方向的应变为：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{\phi\phi} &= -\frac{1}{r}\ \frac{\partial(u_\phi)}{\partial\phi} - \frac{1}{r}u_r\\ \varepsilon_{\lambda\lambda} &= \frac{1}{r\cos\phi}\ \frac{\partial(u_\lambda)}{\partial_\lambda} - \frac{\tan\phi}{r}u\phi + \frac{1}{r}u_r\end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

对于二次变形谐函数，有

$$
\varepsilon_{\phi\phi} + \varepsilon_{\lambda\lambda} = \frac{l}{Rg}\left\{\frac{\partial^2 V_2}{\partial \phi^2} + \tan\phi \frac{\partial V_2}{\partial \phi} + \frac{1}{\cos^2\phi} \frac{\partial^2 V_2}{\partial \lambda^2}\right\}
$$

$$
\varepsilon_{\phi\phi} + \varepsilon_{\lambda\lambda} = -\frac{2}{Rg}(h - 3l) V_2 \tag{4.40}
$$

潮汐应变的差分测量提供了 h 和 l 的估值。这些应变一般为 10^{-8} 的量级。

重力、倾斜和应变潮汐测量代表一种总的响应 B,可写成如下形式:

$$
B = B_0 + \sum_i \Delta B_i + \sum_j N_j \tag{4.41}
$$

式中:B_0 为径向对称的、弹性的、没有海洋的,然而其他方面却是真实地球模型的响应 ΔB_i 为对该模型的摄动,是响应在振幅和相位两方面的摄动。这里 B_0 和 ΔB_i 被看做是对严格周期性激发的响应,激发的频率是已知的,其精度与测量太阳和月亮相对于地球运动的精度相同。观测到的响应还包含地球物理噪声 N_1 和仪器或测量噪声 N_2。N_1 中包括的是周期性现象,如有时在倾斜或重力记录中看到的由 S_3(8 小时)或 S_4(6 小时)太阳潮汐造成的大气压振荡,以及 K_1 和 K_2 分潮频率相同的周日和半周日太阳潮汐。周日和季节性温度变化、降雨及地下水位的变化可能也会使地壳发生应变和倾斜并产生周期性噪声。N_1 还包括由气象、地震或构造活动造成的非周期性现象。仪器噪声 N_2 大部分显示出周期项,它们是由于仪器对环境因素,如温度和压力或可能还有磁场变化的响应造成的。

地球椭圆度及地球自转破坏了潮汐响应的对称性,响应 B 随纬度变化。为方便起见,我们把这些小项包括在 B_0 之中。Wahr (1981) 关于旋转椭圆弹性地球的理论给出了半周日频率的重力因子

$$
\delta_2 = \delta_2^0 - 0.005\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(7\sin^2\Phi - 1)\right] \tag{4.42}
$$

式中:δ_2^0 为径向对称的地球响应。B_0 最好用根据地震资料建立的弹性地球模型来计算,特别是因为这种响应对地幔模型的选择相对来讲不敏感,不同模型给出的勒夫数仅在第三位有效数字不同。然而,要与下面讨论对 B 的某些其他地球物理影响相比,k_2 或 h_2 差 0.5% 就是显著的了。在接近极的地方,B_0 的半周日和周日潮都为零,这些分潮对于研究某些摄动 ΔB_i 或考察主要潮汐频带之外的变形是很重要的。

4.3.1.2 某些地面观测结果

只有二次或三次勒夫数组合(δ,γ)已经被以千分之一量级的精度观测到了。这几乎不比这些参数对全球地幔弹性性质的灵敏度好,观测结果对地球的径向结构对地球的径向构造没有提供有力的约束。在地球物理意义上较为有意义的是对径向对称响应的偏离 $\underline{\Delta B_i}$,这种偏离可能比 B_0 的 1% 大得多。

海洋荷载 ΔB_1 的大小能掩盖多种其他的干扰因素,除非能采用某种合理模式作高准确度的改正。正如格林函数法所指出的那样,区域和全球海洋潮汐对 ΔB_1 的贡献较大,但未能以足够的准确度了解这两种影响,即使是主要的 M_2 海洋分潮也是如此。一般情况下,海洋 M_2 分潮对远离附近海洋的大陆台站的影响约为直接重力潮汐的 1% ~2%。在 1 000km 以外,在其最近的点处,海洋潮汐的重力影响为 0.6μGal,略去这一改正值将在 δ_2 中产生 0.01 的误差。Merriam(1981) 计算了海洋 M_2 模型在这个地方的海洋改正数,所得结果与 Parke and Hendershott (1980) 用他们自己的 M_2 海洋模型计算的改正值相差约 5%。与其他误差,特别是那些与仪器标定有关的误差相比,至少 δ_2 的海洋改正数的精度看来是足够了。对于其他频率,该

地方的海洋潮汐改正的百分比误差较大。

海洋荷载改正的局限性,促使 Kuo et al. (1970)提出($B_0+\Delta B_1$)响应的实测值与预测值之差可以作为海洋潮汐模拟的约束。问题是在假设格林荷载函数 G 为已知的前提下,如何反演潮汐 $\zeta(r')$。这种反演并不惟一,不论是沿海的海洋潮汐观测还是深海的海洋潮汐观测,都必须并入反演之中。就各种地球潮汐测量而言,重力潮汐似乎最有助于进行这些反演,因为这种响应受潜在的重要因子 ΔB_2 的影响最小(如空腔、地形和地质综合效应的影响)。Kuo et al. (1970)试图使用陆地和海岛上的 ΔB_1 重力估值,模拟太平洋西北部和北大西洋的 O_1 分潮,但发现在两大洋的结果之间存在明显的互相依从关系;太平洋的潮汐结果是就大西洋潮汐所作假设的函数,反之亦然。使用成对台站,i 和 j 的差分响应因子,即 $\Delta B_{1(i,j)}=\Delta B_{1(i)}-\Delta B_{1(j)}$ 可部分地减少这种不惟一性。只要台站的间距不大,这些差值对于远距离海洋潮汐相对来讲是不敏感的,该方法可能最适于研究近海的潮汐。Beaumont (1978) 在大西洋西北部潮汐的研究中以及 Baker (1980) 在不列颠诸岛的潮汐研究中都曾使用了这一方法。

在未对 ΔB_1 作精确改正的情况下,要估计其他的干扰效应 ΔB_3、ΔB_4 和 ΔB_5,只能把仪器架设在海洋荷载最小的地方,即所谓荷载潮的无潮点上。

只要可充分地求出海洋对相位滞后的影响,固体地球的耗散估值就可从引潮位与地球对该位响应之间的相位滞后观测值中求得。如果 δg_0 为重力的海洋改正值,Δg 为总的重力潮汐振幅,ε_0 为海洋改正的相位,那么,对重力信号相位滞后 Δ_0 的影响量级为 $\Delta_0=(\delta g_0/\Delta g)\sin\varepsilon_0$。

4.3.1.3 卫星观测结果

根据卫星轨道摄动求得的潮汐响应是固体地球和海洋的综合响应,其中海洋中响应约占总数的10%~15%。这里不存在海洋潮汐作用等于零的轨道,因此根据该信息源提出的有关固体地球耗散的说法多是推测性的。

在某些例子中,因为这些潮汐与地球自转之间的轨道相互作用,周日潮汐参数需作小的改正。问题如下:只有当运动周期与日长相比较长时,极移才会在地球卫星轨道元素中造成近周日摄动,然而如果极移具有近周日逆向分量,轨道摄动必将是长周期的。这种分量是月球和太阳对地球的转矩产生的。如果这种分量在轨道理论中未被模拟,它们将产生与卫星轨道的直接潮汐摄动频率相同的摄动。对于非极轨道,我们有

$$\frac{\Delta I(\text{受迫周日极运动})}{\Delta I(\text{周日潮汐})}\approx\frac{3gC_{20}}{\omega_0^2k_2a}\approx\frac{5\times10^6}{a}\tag{4.43}$$

式中:a 为卫星轨道的长半径。对于 STARLETTE 卫星的轨道,$a\approx7100\text{km}$,该比值约为0.006。如何有效地利用卫星轨道摄动分析估算海洋潮汐系数 $D_{st}^{\pm(v)}$ 和相位滞后 $\varepsilon_{st}^{\pm(v)}$ 是有待进一步研究的论题。

由地幔耗散造成的勒夫数随频率的变化在半日和周日频带上相对较小,对于根据地震波研究求得的地幔 Q 值来说,这种效应基本上被诸如海洋潮汐和海洋荷载等其他因素掩盖了。双周和月周期的勒夫数观测结果可能比较有用,尽管由于相应的海洋潮汐对平衡状态的偏离,这里的结果也是不确定的。还需要更长周期的潮汐响应观测。

例如,由章动引起的18.6年的潮汐,可期望这种潮汐的海洋响应是遵从平衡理论的。因此,对于随频率变化的 Q 值模型,$Q=Q_0\sigma^r$,当 $Q_0=500$ 且 $0.1<r<0.2$ 时,k_2 的取值范围为

0.32至0.38。

4.3.2 卫星雷达测高观测(Lambeck 1988)

如果用一台星载雷达测高仪测定了卫星至地面的高度,那么就可以求出地球表面相对于参考椭球的几何形状。绘制的洋面形状的准确度是测高仪测量的空间分辨率和精度的函数,也是计算的轨道精度的函数。根据这些结果推算大地水准面的准确度,取决于这些因素以及从大地水准面中分离出瞬时海面的能力。用于海洋学和大地测量学研究第一台雷达测高仪装在"空中实验室"上,但这台雷达测高仪仅提供了有限的资料。装在1975年发射的GEOS-3卫星上和1978年发射的SEASAT卫星的测高仪提供了非常有价值的资料,这些资料已得到了重要的大地测量学、地球物理学和海洋学的结果。另一颗测高仪卫星GEOSAT是由美国国防部为编制重力场图在1985年发射的,其观测资料已得到广泛的应用。

雷达测高仪的信号是以15GHz左右的频率发送的能量脉冲序列。第一个脉冲在宽度为1°左右的波束内向海洋表面发送。脉冲覆盖的海洋表面的面积随着时间增加到波束宽度的极限。若发出的脉冲的前沿是一个阶梯函数,那么返回的脉冲最初将是一个斜坡函数,它的开始相应于发送脉冲的前沿的能量,这是从紧挨着星下的点反射来的。在时刻T_r这个起始时间不能精确确定,测量的是从发送的瞬间到返回信号的幅度达到某个阈值的时刻T'_r的时间间隔。因此,测量的高度是雷达波束在时段($T'_r - T_r$)所覆盖的卫星下的这块面积的一个平均值。通常雷达的"足迹"半径约为3~5km。雷达脉冲以100/s的速率快速发送,双向走时求平均得到约1s时间内的平均高度,因而沿轨迹的空间分辨率约为7km。

测高仪测量结果的一个误差源来自反射面的性质。如果海面的反射特性随风力而变化,则反射脉冲随时间的增强将不是线性的,且可能在名义时间之前或之后达到阈值。可以通过对返回信号波形的取样对此作一阶改正。星载频率标准信号的波动或不稳定也会引入显著的误差,但这通常可通过检查与高度计所记录的脉冲形状和强度这些辅助的仪器数据辨认出来。另一个误差源是信号的折射。测高仪信号的电离层折射可近似地由下式给出

$$\mathrm{d}\rho = \int (n-1)\,\mathrm{d}\rho \approx \frac{80.5}{2f^2}\int N_e\,\mathrm{d}\rho \tag{4.44}$$

在白天太阳活动最弱的时候,$\mathrm{d}r \approx 4\mathrm{cm}$;在白天太阳活动最强时,$\mathrm{d}r = 15\mathrm{cm}$。只有在太阳活动强的时候,电离层的折射才是使测高仪观测结果变坏的一个主要因素。对流层折射更为重要,需要加进距离改正,其中的一个主要影响参数是对电磁辐射的折射率。

若各频率中测高仪观测值的误差是相等的,则可认为海面高度的误差谱是白噪声,这时,1s采样预期可求解的最大谐波是$l_{max} = \pi R/L$,其中$L \approx 7\mathrm{km}$,它是1s走过的距离,R为地球半径。l阶谐函数对大地水准面高的总误差的影响为$\sigma_l = \sigma_h (2 l_{max})^{\frac{1}{2}}$,其中$\sigma_h$取检验值30cm。另外,只有沿着跟踪方向才能达到1s空间分辨率,因此,L的较为适当值是低纬度和中纬度相邻跟踪间的平均跨度大,为50~100km。于是$l_{max} = 200 \sim 400$,$\sigma_l = 1.1 \sim 1.5\mathrm{cm}$。预期的$l$阶大地水准面高的信号为

$$[V_l^2\{N\}]^{\frac{1}{2}} = [R^2 V_l^2\{\Delta V\}]^{\frac{1}{2}} = (2l+1)^{\frac{1}{2}}[RA10^{-5}/l^2] \tag{4.45}$$

当$l < 300 \sim 400$时,超过噪声水平(σ_l)。因此,测高仪资料对海洋上的大地水准面高的全球空间分辨率约为200km,这个分辨率主要受控于跟踪密度,一般要比SEASAT的大,因而得

到的全球空间分辨率差不多。

4.3.3 潮汐加速

天文学家们很早就发现地球的自转并不是固定不变的，自转速度在缓慢减少，因此日长以约 2ms/cyr 或 $\omega \approx 5 \times 10^{-22}/s^2$ 的速率增加。同样，月球在其轨道上有一个每世纪约 22″或$N_{\text{月}} \approx 10^{-23}\text{rad/s}^2$的加速度。此加速度看来很小，但如果这种加速度在整个地月系统的历史中一直存在，那它的结果将是惊人的，因为这将意味着月球在地球形成时至大约 20 亿年前的某个时间距地球很近(但不会超过 Roche 极限)。这种加速度源于日月引起的潮汐摩擦，此因月球和太阳对潮汐变形了的地球作用了方向转矩。因此，地球自转和月球轨道的演化问题属于潮汐在整个地球史中的演化问题。

关于地月系统动力学演化问题的研究已历经了好几百年，一直是科学家的热点研究内容之一。最初的有影响力的研究归功于康德。要进行全面的讨论则需要研究这些运动的天体力学，需要评价近代、18 世纪和 19 世纪的望远镜观测结果，古代的日、月食、掩星和天体会合记录（这些问题涉及根据珊瑚虫、双壳类软体动物和垫藻岩判断过去潮汐理论)，深入研究洋盆和海岩线的演化；需要了解地球的热学史和耗散机制；还需要着手进行地球与月球演化的地球化学方面的论证。

4.3.4 潮汐转矩

月球重力位 V_n 对地球的作用产生一个转矩(Lambeck，1988)

$$L = -\int_M \rho \boldsymbol{x} \times \nabla V_n \mathrm{d}M \tag{4.46}$$

式中：$\mathrm{d}M$ 为位于 x 处密度为 ρ 的体元的质量，积分是因潮汐作用而变形了的地球的质量 M 上取的。如果像在用弹性勒夫数方法所假定的那样，变形响应与所作用的位成正比，那么月球绕地球运动一周取平均，该积分为零。然而，响应中的任何延迟 ΔT 都能使潮汐变形与直接重力引力作用下的变形有系统性的相位差，此时在月球运动一周取积分，转矩不等于零。估计该转矩的后果的一种简便方法是要求在没有其他转矩的情况下，角动量在地-月-日系统中守恒。地球和月球绕其质心的轨道运动的角动量 $H_{\text{月}}$ 为

$$H_{\text{月}} = \frac{MM_{\text{月}}}{M+M_{\text{月}}} r_{\text{月}}^2 \dot{f}_{\text{月}} = \frac{MM_{\text{月}}}{M+M_{\text{月}}} a_{\text{月}}^2 (1-e_{\text{月}}^2)^{\frac{1}{2}} N_{\text{月}} \tag{4.47}$$

式中：M 为地球质量；$M_{\text{月}}$ 为月球质量；$r_{\text{月}}$ 为地—月距；$f_{\text{月}}$ 为真近点角；$N_{\text{月}}$ 为月球平均运动。与转动轴平行的 $H_{\text{月}}$ 分量为 $H_{\text{月}} \cos I_{\text{月}}$，其中 $I_{\text{月}}$ 为月球轨道在地球赤道上的倾角。以平均速率 ω_0 自转的地球的角动量为

$$H_{\text{地}} = C\omega_0 \tag{4.48}$$

月球自转的角动量为 $C_{\text{月}}\ \omega_{\text{月}}$，其中 $\omega_{\text{月}}$ 为月球绕其质心的平均角速度。因为 $C_{\text{月}}/C \approx M_{\text{月}}\ R_{\text{月}}^2/MR^2 < 10^{-3}$和 $\omega_{\text{月}}/\omega_0 \approx 1/27$，最后一项对总角动量的影响可以忽略不计。

在地月系统中的角动量守恒要求

$$\begin{aligned} &\frac{1}{C}\ \frac{MM_{\text{月}}}{M+M_{\text{月}}}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}[a_{\text{月}}^2\ N_{\text{月}}(1-e_{\text{月}}^2)^{\frac{1}{2}}\cos I_{\text{月}}] + \dot{\omega}_{t\text{月}} = 0, \\ &-\frac{1}{C}\ \frac{MM_{\text{月}}}{M+M_{\text{月}}} N_{\text{月}}\ a_{\text{月}}^2 \left(\frac{1}{3}\ \frac{N_{\text{月}}}{N_{\text{月}}}\cos I_{\text{月}} + e_{\text{月}}\ \dot{e}_{\text{月}}\ \cos I_{\text{月}} + \dot{I}_{\text{月}}\ \sin I_{\text{月}}\right) + \dot{\omega}_{t\text{月}} = 0 \end{aligned} \tag{4.49}$$

式中：$\dot{\omega}_{t月}$在本例中表示由月球潮汐作用而引起的地球自转变化。根据 M、$M_{月}$ 和 C 为常数的假设

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{t月} &= \frac{Na^2}{C}\ \frac{MM_{月}}{M+M_{月}}\sum_l\sum_m\sum_p\sum_q\left\{-\frac{\cos I}{2a}\psi^a_{lmpq}+e\cos I\psi^e_{lmpq}+\sin I\psi^I_{lmpq}\right\}k_1\sin\varepsilon_{lmpq}\\ &= \sum_l\sum_m\sum_p\sum_q\dot{\omega}_{lmpq}k_1\sin\varepsilon_{lmpq}\end{aligned} \tag{4.50}$$

根据变形是以与引潮位相同的阶和次调和的假设，方程（4.50）给出了由月球产生的潮汐造成的地球自转加速度。对 $\dot{\omega}_{t月}$ 的主要影响来自半长径（或平均运动）摄动，而由偏心距和倾角摄动产生的影响不大。

月球受地球的影响也产生一种潮汐，其外部位需要在地心参照系表示。如果把参照地球的参数换成相应的月球参数，可得到适当的方程。因此，在考虑月球轨道元素的变化时，这一转换后的位也必须乘以 $M/M_{月}$，以便用月球质量单位表示这种变化。对于给定的 $l(=2)mpq$ 指标，由月球和地球引起的潮汐造成的 a、e 和 $I_{月}$ 的摄动之比为（Lambeck，1988）

$$\frac{\text{月球引起的潮汐}}{\text{地球引起的潮汐}}=\left(\frac{M}{M_{月}}\right)^2\left(\frac{R_{月}}{R}\right)^5\frac{(k_2\sin\varepsilon_{2mpq})_{月}}{(k_2\sin\varepsilon_{2mpq})} \tag{4.51}$$

月球勒夫数 $(k_2)_{月}$ 为 0.02～0.03，月球 Q 值的相应的下限约为 100，因此，该比值等于或小于 0.15。然而，与 $M_2(lmpq=2000)$ 等价的月球潮汐为一种永久性形变，因为月球平均轨道周期与月球绕其轴自转平均周期相等因此该潮汐对耗散没有影响，上述比值只适用于像 N_2 那样的潮汐。因此，由地球诱发的、由月球潮汐造成的轨道摄动通常可以忽略不计。地球受太阳影响产生的潮汐作用类似于地球受月球影响产生的潮汐作用，只要用太阳参数取代相应的月球参数并将得到的结果乘以 $M_{日}/M$ 即可得出（太阳）潮汐表达式。

4.3.5 地球自转中的潮汐信号（Lambeck，1988）

1928 年，Jeffreys 首次指出地球角动量守恒意味着日长必定有周期性变化。但是直到大约 1953 年才观测到日长中的半年项，它的早期解释被当时所用的 FK3 星表中的误差以及认识到除潮汐以外的季节性因素可能有影响而放弃了。1955 年 Markowitz 根据摄影天顶筒观测结果的分析首次报道了月分潮和 14 日分潮项的观测结果。应用现今以原子时为参照的长序列的日长观测结果，潮汐项很明显地叠加在背景测量噪声之上。

1959 年 Woolard 对弹性地球的潮汐扰动进行过详细的理论计算。若引入一个液态的球形地核，且在核幔边界无耦合，那么这个核将不参加自转，对于弹性的地球振幅将在减少 $(A-A_M)/A_m$ 或约 10%。假定潮汐遵从平衡理论，那么海潮的影响使地球的有效扁率增加，这也使日长大约变化 10%，因而有效的“整个地球”的勒夫数接近于弹性地球的勒夫数。

4.3.5.1 固体潮

地球的潮汐变形引起的地球自转变化的定量估计很容易根据这种变形的勒夫数描述求得。在 $r=R$ 处，只考虑 2 次项地球变形的重力位

$$\Delta V_2 = \frac{GM}{r}k_2\left(\frac{R_e}{a_月}\right)^2 \sum_m \sum_v B_{2m}^{(v)} \cos(\sigma_{2m}^{(v)} T + \beta_{2m}^{(v)} + m\lambda) P_{2m}(\sin\Phi) \tag{4.52}$$

其中：$a_月$ 为月球轨道主半轴。上述方程可写成

$$\Delta V = \frac{GM}{r}k_2\left(\frac{R_e}{r}\right)\left(C\,\frac{(v)}{2m}\cos m\lambda + S\,\frac{(v)}{2m}\sin m\lambda\right)P_{2m}(\sin\Phi) \tag{4.53}$$

其中：

$$\begin{bmatrix} C_{2m}^{(v)} \\ S_{2m}^{(v)} \end{bmatrix} = \frac{M_月}{M}\left(\frac{R_e}{a_月}\right)^3 B_{2m}^{(v)} \begin{bmatrix} \cos(\sigma_{2m}^{(v)} T + \beta_{2m}^{(v)}) \\ -\sin(\sigma_{2m}^{(v)} T + \beta_{2m}^{(v)}) \end{bmatrix}$$

另外，

$$\left.\begin{aligned} &\Delta I_{13} + \mathrm{j}\Delta I_{23} = k_2(\Delta I_{13}^* + \mathrm{j}\Delta I_{23}^*) \\ &\Delta I_{33} = k_2 \Delta I_{33}^* \end{aligned}\right\} \tag{4.54}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} &\Delta I_{33}^* + \mathrm{j}\Delta I_{23}^* = M_月\left(\frac{R_e}{a_月}\right)^3 R_e^2 B_{21}^{(v)} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\sigma_{21}^{(v)} T + \beta_{21}^{(v)})} \\ &\Delta I_{33}^* + \frac{2}{3}M_月\left(\frac{R_e}{a_月}\right)^3 R_e^2 B_{20}^{v} \cos(\sigma_{20}^{(v)} T + \beta_{20}^{(v)}) \end{aligned}\right\} \tag{4.55}$$

略去其中惯性张量的时间导数，自转的激发函数为

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = M_月\left(\frac{R_e}{a_月}\right)^3 \frac{R_e^2 k_2}{(C-A)} B_{21}^{(v)} \begin{bmatrix} \cos(\sigma_{21}^{(v)} T + \beta_{21}^{(v)} \\ -\sin(\sigma_{21}^{(v)} T + \beta_{21}^{(v)}) \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

$$\psi_3 = \frac{2}{3}M_月\left(\frac{R_e}{a_月}\right)^3 \frac{R_e^2}{C}k_2 B_{20}^{(v)} \cos(\sigma_{20}^{(v)} T + \beta_{20}^{(v)}) \tag{4.57}$$

在导出最后一个关系式时，假定惯性张量的迹是守恒的，以保持转动的对称性 $\Delta I_{11} = \Delta I_{12}$。这时，$\Delta I_{33} = -2\Delta I_{11}$。对于某些主要的分潮，根据 $k_2 = 0.30$ 的名义值，在表 4.1 和表 4.2 中给出了 ψ_i 的理论振幅和引起的转动 m_i。对于 $m = 0$，潮汐位具有某种分带特征，它对时间的依赖关系是长周期的。这些分潮只对 ψ_3 和 m_3 有影响（表 4.1）。对于 $m = 1$，周期群集在 24 小时附近，极移受到小的接近于周日的波动。半日分潮（$m = 2$）没有一阶影响，因为自转运动的一阶方程与惯性元素 I_{12} 和（$I_{11} - I_{12}$）无关。

周日分潮对 ψ 有显著影响，但相应的自转轴的运动的振幅接近于 $\sigma_0/\sigma^{(v)}$ 或 ψ 的 1/435。只在最高精度和分辨率的水平上，它们对地球自转的影响才是显著的。自转轴相对于地壳的综合章动和潮汐激发为

$$\psi = \psi_{章动} + \psi_{弹性潮} \approx M_月\left(\frac{R_e}{a_月}\right)\frac{3G}{\omega^2 R^3}\left(1 - \frac{k_2}{k_0}\right)\sum_\beta B_{21}^{(v)} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\sigma_{21}^{(v)} T + \beta_{21}^{(v)})} \tag{4.58}$$

弹性地球对刚性地球的周日地极运动振幅的比为

$$m_0 / m_0' = (1 - k_2/k_0) \tag{4.59}$$

月球分潮引起近 14 天和 27 天的日长扰动。太阳分潮则引起 6 个月和 12 个月左右的扰动。更长周期的扰动出现在 8.8 年和 18.6 年附近，但与观测到的十年尺度变化相比，它们的幅度很小。

表 4.1 长周期潮汐引起的 m_3 扰动的振幅。第 4 列相应于 $k_2=0.30$ 的弹性地球，第 5 列相应于弹性地幔、液核和平衡海洋的地球（取自 Lambeck,1988）

Darwin 记号	Doodson 数	周期（太阳日）	m_3 （弹性地球）$\times 10^{-9}$	m_3 （核+海洋）$\times 10^{-9}$
	055.565	6817	1.654	1.730
	055.575	3409	-0.016	-0.017
Sa	056.554	366.3	-0.292	-0.305
	056.556	366.2	-0.015	-0.016
Ssa	057.555	183.1	-1.840	-1.925
	057.565	178.3	0.045	0.047
	058.554	122.0	-0.107	-0.112
Msm	063.655	31.9	-0.399	-0.417
Mm	065.455	27.7	-2.084	-2.180
Msf	073.555	14.8	-0.346	0.362
Mf	075.555	13.7	-3.959	-4.141
	075.565	13.6	-1.642	-1.718
	085.455	9.1	-0.758	-0.793

表 4.2 由周日固体潮和海洋球带潮引起的激发函数 ψ 和极移 m 的幅度（取自 Lambeck,1988）

Darwin 记号	Doodson 数	$\|\psi\|(10^{-6})$	$\|m\|(10^{-6})$
固体潮			
K_1	165.555	4.1	9.6
O_1	145.555	2.9	6.8
P_1	163.555	1.4	3.2
Q_1	135.655	5.6	1.3
海潮		(10^{-9})	(10^{-9})
18.6 年	055.565	2.0	2.0
Ssa	057.555	2.2	0.9
Mm	065.455	2.5	0.2
Mf	075.555	4.7	0.2

4.3.5.2 地核的影响

与地球的自转对月球和太阳的转矩的响应类似，液核的潮汐变形可能与地幔的变形解耦。这表明自转激发函数 ψ_3 应写成下式

$$\psi_3 = -\Delta I_{33}^m / c_m \tag{4.60}$$

其中：ΔI_{33}^m 仅指地幔惯性张量的变化。对于一颗受到一个 2 次体力位作用的具有椭球形的液核的行星，在估计这些元素的值时需要采用下式（Wahr et al.，1981）：

$$\psi_3 = -\frac{\Delta I_{33}^m}{C_m} = -\frac{\Delta I_{33}}{C}(1 - C_c\gamma/Cx)/1 - C_c/C \tag{4.61}$$

其中：$-\Delta I_{33}/C$ 是相应于弹性地球模型的激发函数；C_c 为核的极惯性矩；γ 为先前引入的无量纲地幔变形常数；$x = (k_2/k_0)(C - A)/A$。

对于刚性地幔，$\gamma = 0$。若将此结果与式(4.54) 和式(4.55) 比较，可以看出潮汐响应可写成式(4.56) 和式(4.57) 的形式，其中用下述参数取代了弹性勒夫数：

$$k = k_2(1 - C_c\gamma/Cx)/(1 - C_c/C) \tag{4.62}$$

Sasao et al. (1980) 对三种不同的地球模型给出了求此式的值所需的参数，k 的范围约在 0.266 和0.268 之间。因此，液核的影响使弹性潮汐响应减少 10% ~11%。

如果核-幔发生某种程度的耦合，那么有效勒夫数将落在上述 k 值与弹性值 k_2 之间。在响应中也将引入一个滞后角，但看来还达不到可被观测的程度。

4.3.5.3 海潮

海潮对激发的作用可用类似于考察海洋极潮对地球自转的影响所用的方法来估计。这种影响由两部分组成：若潮汐遵从平衡理论，海洋的直接变形将造成惯性张量的潮汐成分增加；符号相反的间接影响，它来自于在海潮荷载下地球的变形。

由海潮引起的引力位为

$$\Delta V_\zeta = 4\pi G R \rho_w \sum_S \sum_t \sum_\pm \frac{1 + k'_s}{2s + 1}\left(\frac{R}{r}\right)^{s+1} \times D_{st}^{\pm(v)} P_s(\sin\Phi)\cos[\sigma^{(v)}T \pm t\lambda - \varepsilon_{st}^{\pm(v)}] \tag{4.63}$$

相应的激发函数为

$$\begin{bmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{bmatrix} = \frac{4\pi}{5}\rho_w \frac{R_e^4}{(C-A)}(1 + k'_2) D_{21}^{\pm(v)} \begin{bmatrix}\cos(\sigma^{(v)}T - \varepsilon_{21}^{\pm(v)}) \\ -\sin(\sigma^{(v)}T - \varepsilon_{21}^{\pm(v)})\end{bmatrix} \tag{4.64}$$

$$\psi_3 = \frac{8\pi}{15}\rho_w \frac{R_e^4}{C}(1 + k'_2) D_{20}^{+(v)} \cos(\sigma^{(v)}T - \varepsilon_{20}^{+(v)}) \tag{4.65}$$

其中：参数 $D_{21}^{\pm(v)}$ 和 $\varepsilon_{st}^{\pm(v)}$ 定义了相对于海底的潮汐，海底本身是可变形的。后一种响应用荷载勒夫数 k'_s 来描述。重要的是要注意地球自转中的潮汐扰动的谱将比有或没有液核的弹性地球模型的更为复杂。例如半日的海潮展开其中包含(2,0)阶次和(2,1)阶次的调和函数项，但没有来自这种潮汐位的固体地球的影响（略去了自转运动中的二阶项），极移和日长中将有小的半日项。同样，长周期球带潮包含有二次和一阶谐函数。可以预期，极移会有周期与这些长周期潮相同的小的波动。

考虑半日 M_2 分潮，(2,1)分量的幅度约为 2.5cm，故 $|\psi| \approx 2.8\times10^{-7}$，$|m| \approx 3\times10^{-10}$，地极运动的半日波动完全可以忽略不计。$M_2$ 分潮中的(2,0)系数的幅度约为 1cm，故 $|\psi_3| \approx |m_3| \approx 2.5\times10^{-10}$，日长的变化约为 0.02ms，这也低于观测噪声水平。同样，周日分潮中的(2,0)系数产生的日长的周日波动也可忽略不计。周日海洋分潮的(2,1)谐函数在 m 中引入差不多量级的扰动，或者说是弹性潮汐效应的 10% 左右，也是完全可忽略不计的。但对在空

间的章动就不能忽略，因为尽管变化的比率相同，但章动本身的幅度大得多：若弹性变形使章动的振幅改变了 30%，那么海洋的影响约为刚性地球章动的 3% 左右，而且自转轴相对于直接的月球和太阳位的运动也将有一个小的延迟。

海洋分潮是否遵从平衡理论仍然是一个有争论的问题。若采用平衡潮模型，并只取第一阶，有（Lambeck，1980）

$$\psi = \frac{4\pi}{5}\ \frac{R_e^4}{(C-A)}\ \frac{\rho_w}{g}(1+k_2'-h_2)\times(1+k_2)\frac{GM_{月}}{R_e}\left(\frac{R_e}{a_{月}}\right)^3 B_{20}^{(v)}\psi_{20}^0\cos\sigma_{20}^{(v)}T \tag{4.66}$$

其中：

$$\psi_{20}^0 = \left(\frac{1}{7}O_{21}+\frac{10}{21}O_{41}\right)+\mathrm{j}\left(\frac{1}{7}O'_{21}+\frac{10}{21}O'_{41}\right) \tag{4.67}$$

和

$$\psi_3 = \frac{8\pi}{15}\ \frac{R_e^4}{C}\ \frac{\rho_w}{g}(1+k_2-h_2)\times(1+k'_2)\frac{GM_{月}}{R_e}\left(\frac{R_e}{a_{月}}\right)^3 B_{20}^{(v)}\psi_{33}^0\cos\sigma_{20}^{(v)}T \tag{4.68}$$

其中：

$$\psi_{33}^0 = \left(O_{00}+\frac{2}{7}O_{20}+\frac{2}{7}O_{40}\right) \tag{4.69}$$

纬向分潮对极移产生的扰动最大（见表 4.1），但幅度仍很小，约为 $|m|\approx 2\times10^{-9}$ 或更小一些，m_3 的扰动明显地较显著些，约为相应的固体潮的 10% 左右。

具有平衡海洋潮汐的一个弹性地球的潮汐响应用有效勒夫数描述为

$$k = k_2(1+C\psi_3^{海洋}/k_2\Delta I_{33}^*) \tag{4.70}$$

对于上述模型，$k/k_2=1.28$。若用非平衡潮，k 将包含反映综合弹性海潮相对于引潮位的延迟的虚部。上面所用的简单模型看来对大部分情况是适当的，特别是因为纬向海洋潮汐的平衡模型是否有效还存在问题。总的潮汐激发函数为

$$\psi = -k_2\frac{\Delta I_{33}}{C}[x_c+C\psi_3^{海洋}/k_2\Delta I_{33}] \equiv -k\Delta I_{33}/C \tag{4.71}$$

其中：

$$x_c = [1-C_c\gamma/Cx]/(1-C_c/C) \tag{4.72}$$

对于上述这些模型，$k=1.03k_2$。

4.3.6 日长

地球的不均匀自转可通过测量一颗恒星连续两次通过观测者子午圈中天的时间间隔来测定。为此，可将 UT1（加进了极移改正的世界时）看做是观测量。相对于一个均匀的参考时间标准 R 来测定所经过的时间，观测量为 $\pi=R-\mathrm{UT1}$，即经过一段时间 ΔT 后地球自转变慢的量。因而 π 的测量由两部分组成，即与天体中天瞬间的定义有关的天文部分以及与根据频率标准建立的均匀时间尺度有关的物理学部分。

从某一天到下一天 π 的波动约为 1ms 量级，相当于子午面定向变化约为 0.015″。因此高分辨率的 π 的观测量是最精确的一种观测。如果这种变化持续一段较长的时间，地球自转变慢或变快的累积量相应地也就较大。π 的季节性变化约为 20～30ms 量级，而在几十年中 π 可达几秒，在几千年中则可达到几个小时。地球物理上感兴趣的量不是 π 而是它的一阶导数，即日长 Δ(l.o.d) 的变化。若 ω_3 是关于自转轴平均位置的瞬时转速，ω_0 为平均速度，日长

的变化 Δ(l.o.d)定义为

$$-\frac{\Delta(\mathrm{l.o.d})}{\mathrm{l.o.d}}=\frac{(\omega_3-\omega_0)}{\omega_0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}(R-\mathrm{UT1})=\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}T}=m_3 \tag{4.73}$$

其中:$\omega_3=\omega_0(1+m_3)$,m_3 是一个对均匀转速 ω_0 偏离大小的微小无量纲量。对于作为长于 1 年的时间段的参考时间来说,摆和晶体钟不能达到足够好的稳定性,因而在 1955 年之前,历书时作为长期参考时间。根据天文观测和轨道计算得到的这一时间尺度不是非常精确的,只有经过一年或更长的时间尺度,地球不规则转动的积累才能得到有意义的结果。限制 m_3 观测结果的精度的主要因素是参考时间尺度 R 的建立,随着 1955 年原子时间标准的引入,现在主要的限制是天文观测的精度。

在相对于瞬时转轴的转速没有任何变化的情况下,由于极移,子午面的定向随时间而移动,天文经度(或者等价地说地球所保持的时间)也将变化。因此在一个测站上测得的时间,并不是如上面所假定的那样是 UT1,而是地方世界时 UT0,由下式得出

$$-m_1(T)\cos\lambda\tan\Phi+m_2(T)\sin\lambda\tan\Phi+(\mathrm{UT1}-R)=(\mathrm{UT0}-R) \tag{4.74}$$

其中:UT0 由观测到的地方恒星时计算。另外,通常由三个或更多个测站的观测值确定UT1 - R 和地极坐标 m_1、m_2。

世界时的观测一直主要是用摄影天顶筒(PZT)和等高仪进行的。根据一夜的观测纲要推算得到的 UT 估值的标准偏差约为 0.006s,纬度 0.07″。1955 年以前,日长波动主要来源是各观象台的观测结果,尤其是格林尼治和美国 Naval 观象台的 PZT 观测结果。这些单站观测结果的优点是 资料组的相对均匀性,但系统误差可能较大。在引入 PZT 之前,日长观测值是由各种望远镜观测结果推算得到的,用这些望远镜观测通过观测者子午面的太阳、月亮、行星,主要是金星和水星的中天。在内行星经过太阳前面中天时,也利用月掩星和行星掩星进行观测。这些观测结果可追溯到 17 世纪,但 1621—1820 年间只有一些孤立的 π 值可用。1820 年以后,已有足够的观测结果。对于 1820—1850 年间,能以大约 1s 的精度算出每年的 π 值,对于 1850—1923 年间,精度提高到 0.4s; 1923—1955 年间精度达到了 0.2s。

1955 年以来,国际时间局根据许多站的观测结果(1975 年约有 50 个站,但其中只有 20 个左右有显著影响)发表 π 值。各种不同仪器对这些解的影响不同,但主要是 PZT 和等高仪的观测结果起作用。用最早的等高仪测得的一个晚上的观测的标准偏差为 0.0045s, 纬度 0.05″, 但现代等高仪观测比这精度要高。从 1955 年到目前的 BIH 资料是不均匀的, 1955.5—1962.0以 10 天的间隔给出数据点,而以后各年则每 5 天给出一个数据点。Guinot 估计,π 值的精度从 1955.5—1962.0 年间的大约 3ms 改善到 1962.0—1967.0 年的 2ms,1972 年后的资料则达到 1ms。与之相比,原子时引入前达到的精度为 1s。

§4.4 大地测量潮汐改正

引潮力除了改变重力场之外，还引起地球形变，后者又会影响重力场。潮汐改正涉及很多方面，不仅需要对重力场进行改正，实际上，凡是与位置有关的测量量均需作潮汐改正。

4.4.1 重力测量潮汐改正

通常，我们所需要的地面点的重力值（如布设重力基准网）不应包含日月引潮力的影

响。但重力仪所测得的结果包含有上述影响（除了日月的直接引力作用之外，还包括由形变而引起的附加影响），因而需要对观测到的重力值进行潮汐改正，以便获得不受潮汐影响的重力场。改正的方法是首先计算出固体潮的理论值，再乘以相应的潮汐因子。通常，只需要计算出重力固体潮的理论值，再乘以重力潮汐因子 δ 即可，因为地倾斜潮汐以及水平潮汐影响都比较小，可不予考虑（就重力测量而言）。潮汐因子与位置有关，即在不同的区域有不同的潮汐因子。平均说来，潮汐因子的取值为 $\delta=1.16$。潮汐效应对重力场的影响在 6 小时内最大可以达到 300μGal 左右（管泽霖和宁津生，1981；胡明城和鲁福，1994）。如果所要求的精度是毫伽级，则无须考虑潮汐效应。另外，潮汐效应对重力方向的影响在 $-0.018''$ 至 $0.018''$ 之间（胡明城和鲁福，1994）。

4.4.2　空间测量中的潮汐改正

通常所采用的 GPS、SLR、VLBI 等空间技术，均与地面点位或地面坐标有关。但引潮力使地球发生形变，从而使点位坐标发生变化，变化幅度以垂直方向最大，可达 ±40cm 左右（管泽霖和宁津生，1981）。因此，这种潮汐效应必须剔除。

下面以激光测卫（SLR）为例阐述潮汐改正的方法（胡明城和鲁福，1994）。由于潮汐影响（包括固体潮和海潮作用），测站会发生位移 u^i。假定没有潮汐作用时，在地固质心参考系中，卫星和测站的坐标分别为 x^i 和 X^i。今由于潮汐影响，测站坐标变为 X^i+u^i，但卫星坐标仍然是 x^i。这时，实际上测定的距离不是

$$s=[(x^i-X^i)(x_i-X_i)]^{1/2} \tag{4.75}$$

而是

$$s'=[(x^i-X^i-u^i)(x_i-X_i-u_i)]^{1/2} \tag{4.76}$$

若以式(4.75) 为模型求解未知参数 x^i 和 X^i（通过大量观测，采用最小二乘平差），显然引入了位移误差 u^i。因此，需采用的模型是方程（4.76）。其中 u^i 是采用潮汐模型事先计算出的测站的位移（它与时间有关）。

对于激光测月，潮汐改正要复杂一些，这时需要同时顾及月面反射点（反光镜所在位置）处的潮汐形变位移 d^i，该位移是相对于月固质心参考系的量，由关于月球的潮汐形变理论推求。对于 VLBI 测量，潮汐改正涉及基线的两个端点 A 和 B 的潮汐形变位移 u_A^i 和 u_B^i。从原理上讲，无论是激光测月还是甚长基线干涉测量，潮汐改正均与激光测卫情形类似。更为详细的过程可参阅胡明城和鲁福的文章(1994)。

4.4.3　潮汐对地球旋转的影响

潮汐作用使地球旋转角速度逐渐减慢。长期的观测数据为地球自转逐渐减慢提供了证据。以日长的变化而论，每 10 万年大约变长 2 秒。从直观的经验出发，不难理解上述结论。为了定性地论证这一点，可以按如下方式考虑（管泽霖和宁津生，1981）：月球的公转周期比地球的自转周期长得多，月球产生的引力作用使地球沿地月连线轴的两边向外隆起（实际上就是潮汐作用），但由于地球的旋转，这种隆起在恢复到原来的状态之前已经逆时针旋转了一个角度 $\delta\theta$。实际上，由于地球是弹滞体，隆起部分的最高峰总是要超前地月连线一个小的角度 $\delta\theta$，于是产生了由月球作用于地球的反向净力矩。该力矩阻尼地球的旋转，从而使地球的旋转角速度逐渐减小。

如果地球是旋转对称刚体，则地球的旋转由自转（周期约 24 小时）和 Euler 自由进动（约 305 天）构成。仍然是刚体的情形，日月引力的作用使地球的旋转产生章动（约 19 年）以及更大范围的进动（约 25800 年）。但地球是弹滞体，因而使 Euler 进动的周期变为 400 天左右（Jeffreys and Vicente，1957b；Molodensky，1961；Lambeck，1980）。海洋潮汐的作用使 Euler 进动的周期进一步增加，由此产生了 Chandler 进动（摆动）周期约 430 天。

4.4.4 固体潮的数据处理

数据来自两个方面：引潮力理论计算值和对应于由于引潮力的作用而引起的实际地球物理特性以及几何特性的变化的实际观测值。由此可以求出勒夫数 h,k,l。选定一个固定的台站，我们可以假定勒夫数是固定的。当然，从严格的意义上来说，即使台站固定，勒夫数也会有变化，因为地球表面不存在相对于地球本体固定的点，但通常我们将这种变化忽略不计。然而，由于观测值本身带有误差，若只根据一组数据求解，所得到的结果必然带有随机性。这就需要进行最小二乘处理。又因观测数据以及理论计算值均随时间而变（此因引潮力随时间变化），因此，最佳的处理方案是采用带有滤波的最小二乘法，即将观测序列看做是带有误差的随时间变化的观测序列加以处理。更进一步，考虑到引潮力带有周期性，可以分解为具有不同周期的分潮波，因而可将观测序列设定为具有不同周期的波的组合。这就是说，可以采用如下的三角多项式序列进行带有滤波的最小二乘拟合（胡明城和鲁福，1994）：

$$T(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cos\omega_i t + b_i \sin\omega_i t) \tag{4.77}$$

由此可以确定第 i 阶振幅和相位（$i=1,2,\cdots,n$）。通过与相应的理论值进行比较，即可确定出勒夫数 h,k,l。

另外，如果换一个台站，则得到另一个地点的勒夫数 h',k',l'。一般地，在第 i 个台站（地点），通过本地观测可求出本地勒夫数 h_i,k_i,l_i。如果我们假定全球的勒夫数恒定，那么，就可以根据多个台站各自求出的本地勒夫数进行最小二乘处理，得到一组统一的全球勒夫数 h,k,l，作为衡量地球响应引潮力的程度的一种平均标尺。但实际上我们知道，在不同地点，勒夫数肯定是有区别的，因为地理环境、密度分布以及大地构造因地而异。正是由于这一特性，有了平均勒夫数，即可与当地的勒夫数进行比对，并通过它们之间的异同来研究并提取当地的地球物理信息。

除了日月引潮力之外，还有其他行星引起的引潮力。另外，引潮力导致地球的形变，后者又对重力场产生影响。在重力观测值中，包含了各种各样的影响，或者说，在固体潮观测值中包含了具有不同频率和振幅的潮汐波。此外，重力仪的零点漂移也不可避免。这样一来，在观测值中不仅包含有所需要的固体潮信息，而且也包含噪声。为此，如何剔除噪声，最大限度地提取出有用的信号，这是固体潮数据处理的主要任务。处理固体潮数据的方法很多，但基本上都采用了序列（坐标）组合原理（管泽霖和宁津生，1981）：通过序列组合（有加组合、减组合以及乘组合），可以使有的信号加强，另外一些信号减弱。比较常用的固体潮数据处理方法有日均值法、别尔采夫法（别尔采夫滤波器）以及高通滤波法（三阶 Z 型滤波器）。

下面对这几种方法（张国民等，2001）作简要介绍。

4.4.4.1 日均值方法

设有观测序列 $y_i(i=0,1,2\cdots,23)$，从0点开始每一个整点观测一个数据。因此，y_i 表示时间为 i 点的观测值。日均值的数学表达式为

$$y_m = \frac{1}{24}\sum_{i=0}^{23} y_i \tag{4.78}$$

假定 y_i 是线性的，则24小时的平均值就是11.5时的（假想）观测值，即有 $y_m = y_{11.5}$。对于每个观测值 y_i，可以将它表示成如下形式：

$$y_i = \sum_{n=1}^{N} R_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) \tag{4.79}$$

其中：在等号的右边，第一项是潮汐波，第二项是零漂，第三项是非潮汐成分。将式(4.58)代入式(4.78)，得

$$y_m = \frac{1}{24}\sum_{i=0}^{23}\sum_{n=1}^{N} R_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \sum_{i=0}^{23}\varphi_1(t) + \sum_{i=0}^{23}\varphi_2(t) \tag{4.80}$$

利用坐标组合原理，上式右边的第一项可以表示成

$$\begin{aligned}\frac{1}{24}\sum_{i=0}^{23}\sum_{n=1}^{N} R_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) &= \frac{1}{24}(Y_{23.5} + \cdots + Y_{11.5} + Y_{10.5} + \cdots + Y_{1.5} + Y_{0.5}) \\ &= \frac{1}{24}Y_6 Y_3 Y_{1.5}\left(Y_1 + \frac{Y_0}{2}\right) = M(\omega_n) R_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)\end{aligned} \tag{4.81}$$

其中：$Y_i = y_i + y_{-i}$ 是由老序列经加组合得到的新的序列，$M(\omega_n)$ 是日均值振幅因子，由下式给出：

$$M(\omega_n) = \frac{1}{6}\cos 6\omega_n \cos 3\omega_n \cos 1.5\omega_n \cos^2\frac{\omega_n}{2} \tag{4.82}$$

其中：ω_n 表示某个波频。这时，下列关系成立：

$$\frac{1}{24}\sum R_n(\cos\omega_n t + \varphi_n) \approx 0 \tag{4.83}$$

方程（4.80）右边的第二项可以表示成（展开成泰勒级数）

$$\frac{1}{24}\sum_0^{23}\varphi_1 \equiv \frac{1}{24}\sum_0^{23}\Phi = \Phi_0 + 0.42\Phi''_0 \tag{4.84}$$

其中：Φ''_0 表示对时间的二阶导数在 $t=t_0$ 处取值。再令 $\Phi_2(t) = \sum_{i=0}^{23}\varphi_2(t)$，则可将方程(4.80)写成

$$y_m = \Phi_0 + 0.42\Phi''_0 + \Phi_2(t) \tag{4.85}$$

此方程是日均值的最后结果：方程右边的第一项是坐标原点的零漂，第二项是当天的42%的非线性零漂，第三项是其他非潮汐成分。

4.4.4.2 别尔采夫滤波器

别尔采夫滤波器的形式可以写成

$$y_p = \frac{1}{15}(y_0 + Y_2 + Y_3 + Y_5 + Y_8 + Y_{10} + Y_{13} + Y_{18}) \tag{4.86}$$

将式(4.79)代入上式，得

$$y_p = \sum P(\omega_n) R_n(\cos\omega_n t + \varphi_n) + \frac{1}{15}\sum \Phi(t) + \Phi_2(t) \tag{4.87}$$

其中：

$$P(\omega_n) = \frac{1}{15}(2\cos5\omega_n + 4\cos^2 5\omega_n - 1)(1 + 2\cos8\omega_n) \tag{4.88}$$

是振幅因子。这时有

$$\frac{1}{15}\sum R_n(\cos\omega_n t + \varphi_n) \approx 0 \tag{4.89}$$

类似于日波法，有

$$\frac{1}{15}\sum \Phi = \Phi_0 + 0.080\Phi''_0 \tag{4.90}$$

这时，有

$$y_p = \Phi_0 + 0.080\Phi''_0 + \Phi_2(t) \tag{4.91}$$

其意义与式（4.85）完全相同。

4.4.4.3 高通滤波器

前面给出的两种处理方法基本上是等价的，它们未能将零漂 Φ_0 和非潮汐效应 $\Phi_2(t)$ 消除。为了消除零漂和非潮汐影响，可以考虑高通滤波器。通常采用的是三阶 Z 型滤波

$$\begin{aligned} y_l &= Z_1 - Z_2 + Z_6 - Z_7 - Z_{10} + Z_{11} + Z_{14} = Z_{15} - Z_{13} + Z_{19} - Z_{26} + Z_{27} \\ &= Z_{12.5} Z_6 Z_{0.5}\left(y_8 + \frac{y_0}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.92}$$

其中：$Z_i = y_i - y_{-i}$。将式（4.79）代入上式，得

$$y_l = \sum L(\omega_n) R_n(\cos\omega_n t + \varphi_n) + \sum_{x=1}^{4} N^{(x)} \Phi_l^{(x)}(t) + \Phi_2(t) \tag{4.93}$$

其中：$\Phi_l^{(x)}(t)$ 和 $N^{(x)}$ 分别表示 x 阶导数和相应的系数，$L(\omega_n)$ 是振幅因子，同时，下式成立。

$$\sum R_n(\cos\omega_n t + \varphi_n) \approx 0 \tag{4.94}$$

作类似于式（4.81）的处理，可得

$$N^{(1)} = N^{(2)} = N^{(4)} = 0, N^{(3)} = 0.21 \tag{4.95}$$

于是有

$$y_l = 0.021\Phi_l^{(3)}(t) + \Phi_2(t) \tag{4.96}$$

此滤波器的优点是几乎消除了零漂影响（还有可以忽略的2%没有消除），单独保留了非潮汐成分 $\Phi_2(t)$。非潮汐影响在地震预报中具有重要作用，因为此时需要将所有的潮汐影响剔除，只保留非潮汐影响。

4.4.4.4 影响观测数据的干扰因素

凡是未被引潮力理论模型所考虑的导致地球重力场变化的效应通称干扰因素。干扰因素又可分为随机干扰和系统干扰。随机干扰如大气扰动、波浪运动、地球旋转角速度的不规则变化部分，天外来石，地下水的无规则变化，火山的无规则喷发，地震，等等。系统干扰如地下水位缓慢升降，大气负荷、海洋负荷的总体影响，未顾及的远方行星的影响，未顾及的地球旋转角速度有规律的变化所带来的影响，科里奥利力效应，等等。还有一些影响是事先不知

或不可能完全消除的影响，如未知的地下空洞效应，未察觉的某地区的缓慢升降、地下水变化，不规则地形的影响，等等。所有上述干扰因素，都应尽量消除。这样，通过观测值拟合出的全球平均勒夫数才能较真实地反映地球对引潮力的响应。

最主要的干扰因素来自海潮和大气潮。由于大气潮比较微弱，通常可以忽略（胡明城和鲁福，1994）。因此，最重要的干扰因素是海潮。海潮作用将引起地球的二级形变，从而导致重力场的变化。关于地球形变对海潮的响应，可由负荷潮汐形变理论来描述。

§4.5 研究潮汐现象的地球物理意义

潮汐观测结果主要以潮汐因子和相位或时间滞后 δ 和 $\Delta\Psi$ 或 Δt 表示。δ 代表弹性地球在日月等天体起潮力作用下，重力的实际值与观测值之比，表征地球的弹性性质；$\Delta\Psi$ 或 Δt 代表弹性地球对日月等天体起潮力作用的滞后效应。δ_n（n 表示潮汐位阶数）与表征地球弹性性质的勒夫数 h_n 和 k_n 有关

$$\delta_n = 1 + \frac{1}{2}h_n - \frac{n+1}{n}k_n \tag{4.97}$$

在理论上，勒夫数 h_n 和 k_n 可通过不同的地球模型解算得到。重力固体潮观测结果可为理论的研究和模型的进一步改进提供依据。

实际观测表明，δ 存在空间分布特征，这种特征为高精度大地测量技术，如精密重力测量，水准测量，GPS 测量等提供基本的物理常数改正，有助于提高它们的观测精度。

按最简单的假设，δ 与地球平均密度 ρ、地球半径 R、地球表面重力加速度 g_0 及地球刚性系数 μ 存在如下关系：

$$h = \frac{5f}{2f+1}, k = \frac{3f}{2f+1} \tag{4.98}$$

其中 $f = \rho R g_0 / 15\mu$，地球模型不同，f 值也不同。故借助 δ 的异常变化，再结合倾斜潮汐因子 γ 值和应变潮汐因子 Λ 值的变化，可反算勒夫数 h 和 k，研究地壳构造运动的异常，为地震预报和地球动力学研究服务。

非潮汐观测结果主要指在重力固体潮观测结果中扣除潮汐效应后的部分。通过适当的方法排除其中的仪器漂移影响后，可以获得测点位置的重力长期变化结果。重力长期变化包含了极移、大气、冰川消融、地下水、物质迁移、地震孕育等因素的影响，认真加以研究鉴别，可以提供与地震预报有关的前兆信息。



第5章 确定地球自转参数的空间大地测量方法

1957年第一颗人造卫星的发射成功，是空间大地测量的前奏。随后，Doppler、SLR、VLBI、GPS、INSAR等测量技术的开发和应用，开创了空间大地测量的实用阶段。实际上，上述空间技术已具有了非常广泛的应用领域，从确定点位坐标到监测地壳形变，从确定地球重力场模型到解释地球内部的物质迁移（如地下水变化、冰川消融等），从确定地球自转参数到解释地球内部的动力学机制，从监测地球外部空间环境（包括大气层、电离层等）到确定地磁场，无一不与空间测量技术密切相关。目前正处于如何有效地利用空间测量信息解释各种地球物理现象，使人类最大程度获益的时期。地球在绕太阳公转的同时，其自身也在旋转。由于地球的转动惯量很大，因而地球的旋转是比较稳定的。如果地球的旋转角速度在惯性空间中保持恒定，那么，旋转角速度的模就是自转角速率，相应的周期就是恒星天。因此，利用恒星两次上中天的间隔可以确定地球的自转速率。在古代，人们并不知道地球有旋转。直观地考察太阳（以及恒星）东升西落，好像太阳在绕地球旋转。本章主要阐述如何利用空间大地测量方法确定地球自转参数。

§5.1 重力梯度测量的作用

重力梯度对于近地表的密度变化非常灵敏，在几百公里高度上的星载重力梯度测量是提供测量重力场中短波长部分的一种重要方法。星载重力梯度仪计划将于2006年实施，也即GOCE卫星系统。

重力梯度仪的雏形基于扭秤原理，由Eöt vös于19世纪后期首次提出。为了测量重力梯度，只要用一个两端质量位于同一水平面上的杆就可以了。这个杆的平衡方程表述了细丝的扭力与作用在这两个质量上的微分重力之间的平衡。相对局部坐标轴（x'^1 指向北，x'^2 指向东，x'^3 沿垂线方向）表示的重力梯度可以用总的重力位表示如下

$$W'_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^i}\left(\frac{\partial W}{\partial x'^j}\right) \tag{5.1}$$

其中：对于安放在地上的仪器，W 包括引力位和离心力位；对于安放在卫星上的仪器，在通常情况下，W'_{ij}只含有引力位的贡献（Shen，1996）。这里指出，重力梯度 W'_{ij}构成二阶对称协变张量（申文斌，2005）。

若 T_m 为扭丝相对于 x'^3 的扭矩，I 为相对于 x'^3 的惯性矩，那么，表示扭丝的扭力与微分重力之间的平衡方程为（Lambeck，1988）

$$T_m = \frac{I}{2}[(W'_{22} - W'_{11})\sin 2A_z + 2Wx'^1x'^2\cos 2A_z] \tag{5.2}$$

其中：A_z 为平衡杆相对于 x'^1 轴的方位角。

扭丝的扭角很小，且假定正比于 T_m，故在不同方位测量偏转角可组合出所需测定的重力场的各分量。

考虑一个绕x'^3 轴缓慢转动的扭秤，测量扭转偏角的传感器的输出将显示出一种两倍于转动频率的正弦信号。若这种平衡是在一个运动的平台上，那么就需要区分开重力和与这种运动有关的惯性力，此即著名的引力与惯性力的分离问题，这个问题可以利用重力梯度仪并通过适当配置的传感器来解决。例如，两个扭杆互相成直角，并以角度 A_z 转动，两杆之间有一个微分矩，正比于重力场的梯度。在严格的意义上讨论引力与惯性力的分离问题需要在广义相对论的框架中完成(Shen，1996)。本书第 12.3 节在牛顿框架中对重力梯度原理作了较详细的阐述。

已经提出了许多种不同的星载重力梯度仪的设计，其基本构架与 Forward 等人最先研制的相同。如前所述，两个正交的扭秤，缓慢地绕垂直于它们所决定的平面的轴转动。这样，装在三个彼此正交的平面上的三套这样的扭秤，可测量整个重力梯度张量。在其他系统中，在一个转动的平台上安装三对加速度计，加速度计读数之差决定了重力梯度。

按 GOCE 重力梯度仪计划，有可能测量波长与地壳厚度相当的重力变化，从而在解释地球内部构造方面发挥重要作用。

§5.2 SLR 技术测定地球自转参数的基本原理

从跟踪站 P 的卫星的位置向量 $\rho(t)$ 的观测值与卫星的地心位置 $X_S(T)$ 和测站位置 $X_P(T)$ 的关系为

$$X_s(T)=X_p(T)+\rho(T) \tag{5.3}$$

其中：所有三个向量都是在一惯性参考框架 X 中定义的。在一般情况下，只部分地观测了向量 $\rho(T)$，观测方程可由

$$\dot{X}_s(T)=\dot{X}_p(T)+\dot{\rho}(T) \tag{5.4}$$

导出。卫星的地心位置向量 $X_{(s)}(T)$ 是 T_0 时轨道元素 K_a 以及在 $T—T_0$ 这段时间内，各种摄动力的影响引起这些轨道元素的变化 ΔK_a 的函数。假定摄动已知，需要确定引力参数或运动量参数，这时，可采用一般形式

$$K_a(T)=K_a(T_0)+\Delta K_a(T-T_0)+\cdots \tag{5.5}$$

其中：ΔK_a 是 $K_a(T_0)$、C_{ilm}和其他附加物理常数 β_k（诸如表面力或潮汐参数）的一个已知函数，即

$$\Delta K_a=\Phi_a(K_a,C_{ilm},\beta_k) \tag{5.6}$$

因此

$$X_s(T)=X_s[K_a(T_0),C_{ilm},\beta_k;T] \tag{5.7}$$

其中：C_{ilm}是待定球谐系数。将跟踪站地心位置向量 X_p 转换到地固坐标 X'_p，可简单地表示为

$$X'_p(T)=X_p[X_p(T),m(T),\theta(T),a_j(T)] \tag{5.8}$$

其中：$\dot{X}_p$ 必须看作是已知的。在当前的跟踪资料的准确度水平上，由于地球的潮汐位移和地壳变形，X_p 与时间有关。自转参数 m（两个分量）和 θ 以不规则和不可预测的方式变化，是一个未知的与时间有关的量，除非用独立的方法对它们进行了测量。对于大部分应用来说，可以假定以足够的准确度确定了岁差 α_j 和章动项 θ(否则，它们可作为未知参数一起参与求解)。

观测方程具有如下一般形式：

$$\rho(T)=\rho[K_a(T_0),C_{ilm},\beta_k,X_p,m,\theta,\alpha_j;T] \tag{5.9}$$

$$\dot{\rho}(T)=\dot{\rho}[K_a(T_0),C_{ilm},\beta_k,X_p,m,\theta,\alpha_j;T] \tag{5.10}$$

它们描述了观测量与天文、大地测量以及地球物理参数间一种复杂的非线性关系。如果在全球地理分布良好的许多站上观测卫星，且注意到①卫星对重力和其他力的响应与轨道有关以及②作用在卫星上的力造成的轨道摄动与因跟踪站位置或地球自转参数知道得不充分而引起的误差通常有明显的不同，那么，理论上就可以通过逐次迭代或最小二乘原理求出这些未知数。通常，大地测量参数估算过程是一个艰巨的任务。第一步，在假定力和测站位置为已知的情况下，求出轨道元素 $K_a(T_0)$，这一步对一个轨道弧是独立进行的，轨道弧的长度范围可从几天至几个星期，这取决于资料的情况、轨道和要估计的参数。第二步，将这些轨道弧综合起来求解全部或部分未知参数，同时包括改进 $K_a(T_0)$ 的估计。以迭代的方式重复上述两步，直到解充分收敛到较理想的参数。整个求解过程实际上就是最小二乘平差以及逐次迭代。

测高仪观测值 $h(T)$ 提供了一个附加观测方程，但此时，$X_p(T)$ 是指海面位置，观测方程为下式的模：

$$\boldsymbol{h}(T)=\boldsymbol{X}_s[K_a(T_0),C_{il_1m_1},\beta_kT]-\boldsymbol{X}_p[\theta,C_{il_2m_2},\Delta h_0;T] \tag{5.11}$$

其中：$\Delta h_0(T)$ 为海洋表面偏离大地水准面可能产生的海洋学改正。由于位的向上衰减相对较快，确定轨道所需的球谐系数比以同样的精度描述大地水准面高要少，且 $(l_2,m_2)>(l_1,m_1)$。这里为求解未知参数对观测方程也可用迭代方法。第一步，求解以必要的精度确定轨道所需的部分系数 $C_{il_1m_1}$ 和 β_k；第二步，迭代求解全部系数 $C_{il_2m_2}$，给出新的估值。或者可假定根据先前的轨道摄动分析，$C_{il_1m_1}$ 是已知的，然后由测高仪观测值求其余的系数。

卫星对卫星跟踪观测值可由下式联系

$$\dot{\rho}_{12}=\rho\{\boldsymbol{X}_{s(1)},\dot{\boldsymbol{X}}_{s(1)},\boldsymbol{X}_{s(2)},\dot{\boldsymbol{X}}_{s(2)}\mathrm{j}T\} \tag{5.12}$$

其中：两颗卫星的位置 $\boldsymbol{X}_{s(i)}$ 和位置变化的速率 $\dot{\boldsymbol{X}}_{s(i)}(i=1,2)$ 以(5.9)式的形式展开。显然，如果位展开到接近 200 次(约 4×10^4 个球谐系数)，那么大地测量参数估算的方法就显得极为重要，需要利用测量结果的全部潜力。通常可采用不同的方法求解(5.7)式中的 C_{ilm}，例如采用最小二乘法或配置法(Rummel et al., 1993)。

§5.3 VLBI 技术确定大地测量和地球物理参数

VLBI 测量可测定基线在空间的转动(假设这些基线都严格与地球相固连)及地球的自转(极移、不规则的转速以及岁差和章动)。另外，由于望远镜和不同的潮汐位移以及地壳的构造形变，基线的方位也发生变化。如果测量许多基线，则可分离出这些与时间有关的方位变化。例如，转动不会使由基线构成的几何图形变形，也不会造成基线长度变化。但另一方面，板块运动、形变及潮汐作用一般会使基线图形改变并使基线长度变化，只是时间尺度不同。

VLBI 测量方法相比于激光测距方法的主要优点是，高出观测者地平线的任意数量的射电源都可供利用。因此，要观测地球的日转动对观测量的影响，不一定非要观测某个特定的射电源，而是可使用一些赤经分布良好的射电源。因此，只要能保持整体测量精度，观测效率可大大提前。在马萨诸赛(美国)和韦特采尔(德国巴伐利亚)两台望远镜之间进行的实验表明，在 1 小时的时段内即可获得精确的基线解，表明有可能探测出短时间内（如 1 天内）基线参

数的变化（Lambeck，1988）。

地球外部空间的无线电波发射源干涉观测，是天文学家为研究恒星、银河星系和星际介质的结构与演化而进行的。现代射电天文学起源于 20 世纪 30 年代，当初 Jansky 发现了地球外的无线电发射源。随后，干涉测量法迅速发展起来。望远镜的角分辨率是由发射波长与望远镜口径之比给出的，因为最有使用价值的射电信号是厘米波长，射电望远镜的分辨率比相同口径的光学望远镜低很多个数量级。例如，要与分辨率仅为 20cm 的光学望远镜相当，射电望远镜接收 3.75cm 波长的辐射（≈GHz）需 15km 的口径。干涉仪的引进避免了使用如此大的天线，因为有效的望远镜口径就是干涉仪基线的长度。

在过去的 20 年内，射电干涉测量发展的特点是能够独立地记录由构成干涉仪的两台望远镜接收的信号。在最初的干涉测量试验中，基线两端接收的射电信号通过电缆一同被输送到相关的处理系统，估计出时间或相位延迟。考虑一个波阵面，如果射电源的距离很远，假设它以平面波的形式通过基线。通常，该波阵面先到达一个天线，然后到达另一个天线，这就是时间延迟 ΔT，构成了基本观测量。该延迟是相对射电源基线方位的函数，也是基线长度的函数，关系为

$$\Delta T = \boldsymbol{b} \cdot \hat{s}/c \tag{5.13}$$

其中：$\boldsymbol{b}$ 为基线向量，$\hat{s}$ 为射电源方向的单位向量，c 为光速。$\boldsymbol{b}$ 和 $\hat{s}$ 都在惯性参照系中定义。由于延迟测量的精度与基线长度无关，基线越长，测定基线相对于射电源的方位即张角 Arccos($\boldsymbol{b}.\hat{s}$) 的精度就越高。

由于发展了极为精确的时钟和频率标准，射向每个测站的信号都可以单独记录，同时记录的还有时钟信号；事后，两处的记录信号被送入相关器。对基线长度的限制只是要求在足够长的时间内从两个测站应可同时见到同一个射电源。对于恒星源和地面望远镜，基线限制约为 0.02s，必须以 100ps 以上的精度测量，以得出厘米级的基线准确度。

在每一基线端点设置的 VLBI 仪器设备包括一个接收机、一台时钟，还有一台记录仪。观测记录实际上是记录入射的波阵面强度对时间标准的变化。这种观测在概念上比较简单，但实现很复杂，因为接收的信号频率太高，不能以足够的分辨率直接记录。因此接收到的频率为 f_r 的信号与纯谐波信号混频，纯谐波信号由与 f_r 大致相等的 f_0 频率的本机振荡器产生。这样，就可得到频率为 $f_r - f_0$ 的拍频信号，在一般情况下其频率为几个兆赫兹的量级，按几十到几百毫微秒的间隔取样，以产生与采样振幅相对应的 0 和 1 的二进制记录。本机振荡器产生的参考频率必须非常稳定，以避免产生那种不仅与振荡器有关而且与射电源发射有关的随时间而变化的拍频。

基本的可观测量是两个接收天线上波阵面的到时差，这种到时差可以是相位延迟，也可以是群延迟。相位延迟 Φ 是两台望远镜接收到的信号之间的相位差，它与时间延迟 ΔT 的关系为

$$\Delta T = (N + \Phi/2\pi)/f \tag{5.14}$$

其中：N 表示完整的相应整周数（未知数），$\Phi/2\pi$ 为一周相位的分数，可以很高的精度测得，约为一周的十分之一量级，相当于时间延迟优于 0.01ns。要求解这个整周模糊度的整数，基线长度必须已知，精度要在几厘米之内，在大多数情况下这是不现实的。例如，相位延迟必须加很多改正，如仪器延迟或大气传播延迟（见后），其误差比信号波长长得多，并随时间和基线相对于射电源的方向而变化。因此，仅就相位测量而言，要求非常苛刻：只能观测在空间上十分接近的射电源。

更重要的是群延迟,它与相位变化速率成正比,与频率的关系为

$$\Delta T = (1/2\pi)\,\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}f \tag{5.15}$$

如果可以把 Φ 作为频率的函数取样,可估计没有模糊度的 ΔT, 延迟估计的误差为

$$2\pi\delta(\Delta T) = \delta\Phi/(f_{max} - f_{min}) \tag{5.16}$$

其中:$f_{max} - f_{min}$为有效频带宽度,$\delta\Phi$ 为每一取样频率的相位测量误差。因此频带越宽,群延迟测量的精度越高。这里出现的主要问题是,由于需要用宽频带记录,将使所有可用的记录系统超出其限度。解决这个问题的方法是把宽频带分为几个窄频带,群延迟正是用一个窄频带到下一个窄频带的相位变化来确定的。这就是带宽合成技术。

定义相对于射电源方向的基线方位的大地测量参数与延时关系的基本方程由式(5.15)给出。考虑一个具有赤道坐标 α_s(赤经)和 δ_s(赤纬)的射电源。在这个参照系中,基线由其在天球上投影的赤经 α_b 和赤纬 δ_b 来定义,式(5.13)可写成

$$\Delta T = \frac{b}{c}[\sin\delta_s\sin\delta_b + \cos\delta_s\cos\delta_b\cos(\alpha_s - \alpha_b)] \tag{5.17}$$

如果基线在地固参照系中用两台望远镜的球面坐标(R_j, Φ_j, λ_j) $(j = 1,2)$来定义,并为简单起见,假设 $R_1 = R_2$,则

$$\Delta T = \frac{R}{c}[A_1\sin\delta_s + A_2\cos\delta_s\cos(\theta - \alpha_s - \beta)] \tag{5.18}$$

其中:θ 为恒星角,且

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \sin\Phi_2 - \sin\Phi_1 \\ A_2 &= [(\cos^2\Phi_2 + \cos^2\Phi_1) - 2\cos\Phi_1\cos\Phi_2\cos(\lambda_2 - \lambda_1)]^{1/2} \\ \tan\beta &= (\cos\Phi_2\sin\lambda_2 - \cos\Phi_1\sin\lambda_1)/(\cos\Phi_1\cos\lambda_1 - \cos\Phi_2\cos\lambda_2) \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

因此,时间延迟 ΔT 每日以振幅 A_2 和相位$(\alpha_s - \beta)$变化,这两者均为射电源和基线参数的函数。

在较为实际的模型中,需要加上两台时钟的历元偏移 $\Delta T^{(c)}$,同样加上两台时钟的钟速之差 $\Delta T^{(c)}$,式(5.18)和式(5.19) 写为

$$\Delta T = \frac{R}{c}A_1\sin\delta_s + \Delta T^{(c)} + \Delta T^{(c)}T + \frac{R}{c}A_2\cos\delta_s\cos(\theta - \alpha_s - \beta) \tag{5.20}$$

时间延迟变化有四种参数:偏移,时钟偏移与平行于自转轴的基线分量之和;线性部分,差分钟速;正弦项的振幅 A_2 及相位 β。未知数总共有 7 个,两个相对时钟参数,两个射电源方向及三个基线参数。因此,观测三个射电源,可以唯一地确定六个独立参数,但有一个特解是否有用,不仅有赖于观测精度,而且有赖于一个特定射电源每一观测序列的持续时间、射电源的数量及射电源相对于基线的位置。

在长几公里至几十公里的甚短基线上使用独立的时间和频率标准进行干涉测量的优点是两台望远镜的大气延迟大体相同,因而所得到的解基本上与这些误差源无关。但所有与仪器有关的误差,包括时钟与本机振荡器的不稳定性,都与较长基线的测量结果相同。时钟与振荡器误差可以通过直接比较两个信号测量相位延迟的方法与其他仪器误差区分开来,源的位置误差的影响也不像长基线那么严重。短基线的另一个优点是可以使用常规大地测量方法进行高精度测量,并可进行完全独立的检核。

5.3.1 地球自转参数(Lambeck 1988)

5.3.1.1 极移和 UT1

在给出方程(5.13)以及式(5.17)~(5.20)时,基线向量 $\boldsymbol{b}$ 是在与射电源向量 $\boldsymbol{s}$ 相同的恒星坐标系 $\boldsymbol{x}$ 中定义的。假设 $\boldsymbol{X}'$ 坐标系是一个由瞬时转动轴和相应的赤道在黄道上交线定义的恒星坐标系,那么

$$\boldsymbol{X}' = R_3(\theta)R_1(m_1)R_2(m_2)\boldsymbol{x} \tag{5.21}$$

而且时间延迟为

$$\Delta T = \frac{1}{c}[R_3(\theta)R_1(m_1)R_2(m_2)\boldsymbol{x}]\cdot \boldsymbol{s} \tag{5.22}$$

当章动角 $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ 时,由围绕瞬时转动轴的不规则转动引入的附加时间延迟 $\delta(\Delta t)$ 为:

$$\begin{aligned} c\delta(\Delta T) = {} & \Delta\theta\cos\delta_s[\Delta x_1\sin(\alpha_s - \theta) - \Delta x_2\cos(\alpha_s - \theta)] \\ & + m_1[-\Delta x_3\cos\delta_s\cos(\alpha_s - \theta) + \Delta x_1\sin\delta_s] \\ & + m_2[-\Delta x_3\cos\delta_s\sin(\alpha_s - \theta) + \Delta x_2\sin\delta_s] \end{aligned} \tag{5.23}$$

其中:$\Delta x_i = x_i(1) - x_i(2)$,并假设 $\Delta\theta_1$、m_1 和 m_2 是微小量,它们的积可以忽略不计。θ_0 是初始章动角 α_1,$\Delta\theta$ 表示与该自转模型的偏差。一条南北向基线,$\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0$,不包含恒星角的信息,但包含与基线子午面正交的极移分量的信息。一条东西向基线,$\Delta x_3 = 0$,显示出振幅与 $\Delta\theta$ 成正比的周日信息,因此测定极移和 $\Delta\theta$ 两种分量需要有经度方向上相隔适度的两条基线。

1972 年以后就已开始采用 VLBI 技术测定极移分量,但只是最近几十年,随着国际射电干涉测量计划(IRIS)的实施才开始获得 m_1 和 m_2 的系统成果。该计划包括美国三个永久性观测站(得克萨斯的戴维斯堡,马萨诸塞的韦斯特福德,佛罗里达的里士满)和德国巴伐利亚的韦特采尔永久性观测站,以及断断续续提供数据的其他望远镜。从 1984 年 1 月开始,极位置每 5 天估算一次(见国际时间局的年度报告)。这些坐标估值的有效精度优于 0.001″~0.002″,比以前用光学天体测量方法获得的精度差不多提高了一个数量级。用 IRIS 计划测定的极移与卫星激光测距的成果进行比较,除去两种成果之间存在的系统偏差外,两种解的吻合度约为 0.001″~0.002″。

大约从 1972 年开始,断断续续地用 VLBI 技术测量了 UT0 和 UT1 的变化,但只是从 1984 年初才开始定期地获得间隔均匀、周期短的极移估计。UT0 是格林尼治平太阳时,也称民用时或世界时;UT1 是加了极移改正的世界时。要测定 UT1,极移必须是已知的,在一些根据一条基线得到的解中,用从非 VLBI 解中得出的极坐标,由测得的 UT0 来计算 UT1。从 1985 年 4 月开始已拥有几乎完整的每日 UT1 估值序列。

5.3.1.2 岁差和章动

射电源坐标通常在一平均赤道系统中定义,更完整的延迟方程式是一个将 $\boldsymbol{b}$ 转换到惯性坐标系中的表达式

$$\Delta T = [R_3(\alpha_2)R_1(\alpha_1)]\boldsymbol{X}'\cdot \boldsymbol{s} \tag{5.24}$$

其中:α_1 是章动角(α_2 和 α_3 分别是自转角和进动角),$\boldsymbol{X}'$ 由(5.21)式定义。求解章动角可采用不同的方法。一种方法是在给定的观测时段内求解每一射电源的坐标,并分析得出这些坐标随时间的变化规律,进而求解已知周期章动振幅(可能还有相位)。一种更实用的方法是根

据剩余延迟时间估计一条或更多条基线每一观测时段的 α_1 和 α_2 的改正数($\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2$)

$$\delta(\Delta T) = \left[\frac{\partial R_3(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} R_1(\alpha_1) \Delta\alpha_2 + R_3(\alpha_2) \frac{\partial R_1(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \Delta\alpha_1\right] X' \cdot s \tag{5.25}$$

并分析这些延迟时间残差来求解章动项的振幅和相位。第三种方法是在有较长观测序列的前提下,直接求解章动项的振幅和相位,同时求解所有其他的(包括大地测量的和地球物理的)未知数。所有这些方法都有其优缺点。第一种方法能检验坐标系的稳定度;第一种方法和第二种方法能对不能根据先验信息精确知道频率的那些未预先估计到的效应和现象(例如地球的自由章动)进行残差检验。但这两种方法都难以顾及逐次解之间的相关。第三种方法是最严密的,但由于需要分析较长的观测序列,因而也是最繁杂的。Carter et al. (1985) 以及 Herring et al. (1968)采用了第二种方法,并获得了可比较的结果(两次分析基本上使用了相同的数据组)。Herring et al. (1986) 估计了周期为 9.1 天至 12 个月的 7 个章动项的改正数,但似乎只有 12 个月和 6 个月的项是显著的。由于近周日项与产生 $\sigma_i - \omega$ 的长周期项的频率为 σ_i 的项(这里的 ω 为周日频率)相混,会在延迟时间中引入长周期项。例如,未被模拟的对流层或潮汐误差就可以产生这种误差,但 Herring 等并不认为这些是重要的。然而,基线长度中不可解的振荡表明基线解中还有误差。

5.3.1.3 潮汐

台站径向和切向潮汐位移由勒夫数 h_n、l_n 定义为

$$u_r = \frac{h_2}{g}(V_{月} + V_{日})_2, \qquad u_t = \frac{l_2}{g}\bar{V}_t(V_{月} + V_{日})_2 \tag{5.26}$$

其中:仅考虑了位 $V_{月} + V_{日}$ 的 2 次项。对于半日潮

$$\begin{aligned} u_r &= h_2 \frac{M_{月}}{M} R\left(\frac{R}{a_{月}}\right)^3 B_{22}^{(v)} p_{22}(\sin\phi)\cos(\Theta_{22}^{(v)} + 2\lambda) \\ &\approx 53.6 h_2 B_{22}^{(v)} p_{22}(\sin\phi)\cos(\Theta_{22}^{(v)} + 2\lambda)\ \text{cm} \end{aligned} \tag{5.27}$$

由于切向位移勒夫数 l_2 只有 h_2 的六分之一,对 VLBI 基线的潮汐影响主要是由径向变形引起的。采用 $h_2 = 0.60$,在赤道由 M_2 分潮造成的径向位移振幅大约为 16.4cm。一条 10^4km 长的东西向基线,由于该条基线的两台望远镜移动的相位不同,将显示约 25cm 的长度变化及 0.004″的方位变化。

勒夫数的主要特征如下:潮汐响应是海洋和固体地球的综合响应,前者是测站离开海岸线的距离的函数。因此,即使是弹性径向对称地球,总的潮汐也将随频率变化,并可能使引潮位提前或滞后。而且,由于海洋的影响、固体地球的频散效应、以及地核的共振效应,潮汐响应将随频率变化。对单一全球响应模型的偏差仅为二阶效应,但它们是勒夫数的一部分,包含地球物理信号。因此,要获得有意义的成果,必须能以百分之几毫米的精度测定 h_2,必须要能以比 12 小时的潮汐周期短得多的观测时间、以优于几毫米的精度测定基线长度。

潮汐信号的主周期集中在 12 小时和 24 小时左右。其中,前者更为重要,因为几乎没有具有半日项的地球物理或噪声信号(低纬度的大气压力例外)。另一方面,周日分潮特征很可能受到气象和仪器噪声(由环境因素和大气潮汐引起大气折射、电子延迟和天线畸变)的影响。对日分潮的改正不当,也可能通过与持续 24(太阳)小时观测时间相混而在延迟时间中引入长周期误差。例如,对 K_1 和 P_1 分潮的估计不当,将延迟时间中引入周期接近 12 个月的振荡,而 π_1 和 ψ_1 分潮的误差将引入周期为 6 个月左右的振荡。对 K_1 和 P_1 合成分潮产生的基线方位

振荡在纬度45°处约为0.005″,但由π_1和ψ_1合成分潮产生的振荡则要小40倍。因此勒夫数改正到约10%,基本上能满足VLBI测量结果潮汐改正的需要。把测站重力潮汐记录和海洋荷载效应的数值模拟结合起来可以达到这一目的,但测站不能距海岸线太近。

自1975年由Robert首次给出了h_2和l_2的解之后,有不少科学家先后给出略有差异的解。在这些解中,估计了h_2和l_2的全球值和单测站值,与潮汐形变的频率无关。h_2的全球值,按测站平均和按频率平均计算的结果在0.61至0.62之间,与弹性径向对称的无海洋的地球模型得出的理论值完全一致。但因这些估值准确度不够,不足以提取有关地球响应的有用信息。l_2的全球估值为0.07~0.08。在这些研究中均未发现与h_2和l_2相关性明显的测站,这主要是由于所得估值的准确度相对较低。

5.3.1.4 地球自转参数

卫星的运动方程是在一个惯性或准惯性坐标系中定义的,可通过坐标变换建立在地面坐标系中的表述。若在变换中略去地极运动项m_1和m_2,会导致实测的与计算的卫星位置之间的不符,因为计算的值将归算到一个坐标系X'^i中,而这个坐标系并不合乎于定义卫星轨道元素的惯性系$\boldsymbol{X}$。结果,轨道显示出振荡

$$\left.\begin{aligned}\Delta I &\approx m_0\sin(\Omega-\theta-A)\\ \Delta\omega &\approx m_0\cos(\Omega-\theta-A)\operatorname{cosec}I\\ \Delta\Omega &\approx \Delta\theta+m_0\cos(\Omega-\theta-A\operatorname{cotan}I)\end{aligned}\right\}\qquad(5.28)$$

其中:$m_0=(m_1^2+m_2^2)^{\frac{1}{2}}$为地极运动的幅度,$A=\mathrm{Arctan}(-m_1/m_2)$规定了转轴的方向,以$\theta_0$为恒星角的近似值,$\Delta\theta$为相应的改正数。因此,轨道的定向显示出近似以24小时为周期、幅度正比于地极运动幅度(约0.2″)的摄动。恒星角或世界时中的误差的影响直接正比于轨道交点的摄动。若要求结果与通常的天文观测相匹配,那么要求轨道的准确度至少为0.1″,或者说1 000km高度的卫星位置准确度约为30~40cm。

1970年,有人根据卫星轨道的分析得到了极移的首批估值,他们分析了多普勒跟踪的NAVSAT卫星轨道中沿轨迹(实质上是ω的摄动)和垂直于轨迹(I的摄动)的残差。1971年以来,地极的位置一直是与其他的大地测量和轨道参数一起,在卫星导航系统的参考轨道的日常计算中同时确定的。图5.1(a)是一些有代表性的结果,可将这些结果与BIH坐标比较,见图5.1(c)。多普勒解一般显示出有比天文解要低一些的频率振荡。根据2天的数据得到的多普勒地极位置的精度为0″.002,但由于重力场模型误差、大气阻力的不确定性和跟踪站坐标误差引起的系统误差,实际精度可能比所估计的参数的精度大一个数量级。

Smith et al.(1972)曾用早期激光观测结果证明根据卫星轨道分析测量极移的可行性,但一直到近20年才有可能真正求解。现在,根据LAGEOS激光观测得到站位置的全球解时,地极坐标是作为未知数包含在内的。Tapley et al.(1985)已对1976年5月至1984年1月的资料用这种方法计算每三天的地极坐标,见图5.1(b),Smith et al.(1985)得到了第五天的类似结果。这些极移的路径一般要比天文和多普勒卫星的方法所得到的相应结果光滑得多,现在几乎没有地球自转轴运动中有高频变化的证据。

恒星角$\Delta\theta$对世界进UT1改正的结果一直是比较棘手的,因为难以从升交点经度的动力学摄动中分离这个量的变化。要得到θ或TU1-UTC(其中UTC是世界协调时)中的长周期波动尤其困难,因为有重力场带谐函数、潮汐以及表面力所产生的未被模拟的长周期摄动。根据

NAVSAT 卫星多普勒跟踪已得到了某些结果,但这些结果一般不如用其他方法所能得到的好,特别是不如由长基线射电观测得到的结果好。

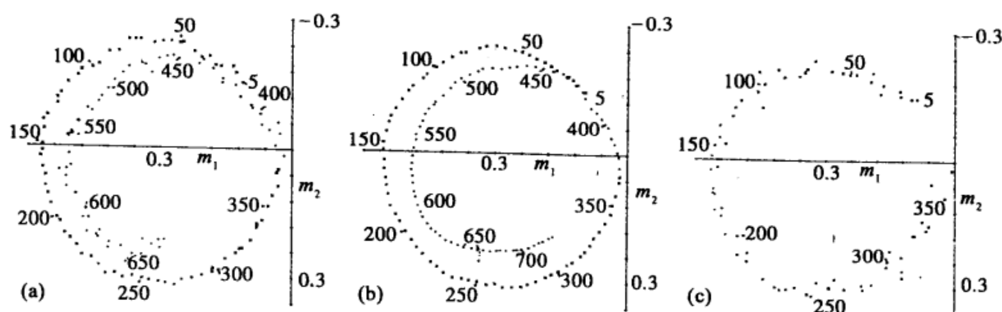


图 5.1 根据(a)NAVSAT 系统卫星的多普勒跟踪,(b)LAGEOS 卫星的激光跟踪,(c)按 BIH 的通常天文位置得到的极移估值。所有的结果都取于 BIH 年报。每 5 天给出一个地极位置,数号 5 相当于 1984 年 1 月 5 日(取自 Lambeck,1988)

§5.4 地球自转变化涉及的全球动力学过程

弹性地球上的海洋潮汐模型决定着海洋耗散速率,而潮汐参数的卫星观测结果决定着综合固体地球和海洋的耗散速率。因此,两估值之差使我们能对每一个潮汐分量分别估计固体地球的耗散,而且在原则上有可能研究某些已经提出的固体地球勒夫数随频率的变化。因此,可以把耗散参数的海洋、卫星和天文估值综合起来,来分离地月系统中海洋、固体地球和月球三种可能的能耗。

以前对这种区分所作的尝试(Lambeck, 1988)表明,海洋对总耗散速率的影响占 90% ~ 95%。为了获得固体地球内耗散的有用估值,要求把这种影响准确到优于百分之几的水平。

可能从地球拥有大洋开始或至少从 30 亿年前起至今,海洋就是使地月系统中潮汐能耗散的主要原因。这种耗散的机制仍不清楚,但很有可能受海洋深度、海岸线几何形状和力函数频率的控制,耗散的速率不会一直保持恒定。海平面大幅度的下降使浅海面积减少,而板块构造运动导致洋盆出现大的重新构形,这两种变化都会造成在过去的地质年代中耗散速率有所不同。

过去有人曾试图把地质年代的耗散定量化。Webb(1982)研究过在一个“平均”的海洋中,耗散是怎样随地月系统中引潮力的频率变化而变化的。他认为:过去的耗散速率很可能比现在的小得多。有的科学家曾模拟了中生代和古代重新构成的洋盆中的潮汐。他们也认为过去的耗散速率平均说来比现在低。

就过去地球的自转和潮汐频率曾提出过几种地质约束。某些生物体在它们被看做是生长增加的顺序层和重复层的骨骼部分留下了记录。这些序列似乎是由生物的生长受固有的内部节律和外部环境条件,比如对于生长在潮间的水域中动物的日周期或潮汐周期调节的结果。受天文现象控制的生长形态的特殊意义在于,如果能从化石中把它们辨别出来,就能增加确定过去的地球自转周期的可能性。为此讨论了三组生物体:珊瑚、软体动物和垫藻岩。日生长

物种有可能受白天和黑夜连续交替的控制，生长图像可能是由水温或食物供应的变化造成的，日变化形态受季节性调节。月光的变化会改变食物供应或触发产卵，从而影响某些生物的生长。周期性潮汐变化可以使生物体暴露于大气层或改变沉积状态或食物供应，从而使生物的生长发生变化。叠加在这些规则周期之上的是由风暴、降雨、温度过高或过低或其他干扰因素造成的不规则的间断。研究过的主要周期为一年中的若干朔望月（两次连续“新”月的时间段）及其中的若干天。

珊瑚化石是古生代一年中的天数比现代一年的天数要多的证据，泥盆纪的一年有400天。有人用月周期研究了日周期的变化，提出当时每月平均约有30.7天。根据珊瑚和软体动物化石已得出了其他一些估值，它们都支持古代日长较短、而朔望天数多的说法。

根据月球的非流体静力形状可给出一种不同的约束值。Jeffreys于1915年曾提出，月球目前的形状代表着月球在过去比现在距地球更近，潮汐力和离心力比现在更大时的流体静力形状。

古生物和月球观测结果的意义在于它们有助于约束月球轨道在整个地质年代的演化过程，因为如果把现在的轨道演化速率外推追溯到过去，这种变化变得极为显著。月球轨道的半主轴的长期变化可写成

$$\dot{a}_{月} = A a_{月}^{-11/2} \tag{5.29}$$

从现在的时刻 T_0 至过去的某个时刻 T 作积分

$$a_{月}^{13/2} = (a_{月}/T_0)^{13/2} + \frac{13}{2}A(T - T_0) \tag{5.30}$$

其中：A 与 $\sin\varepsilon_{2mpq}$ 成正比。如果仅考虑主要 M_2 分潮，且滞后角的平均值为4°，在大约20亿年前，月球距地球很近。根据角动量守恒，那时的日长可能约为5小时。一年中太阳日的天数 n_1、朔望月的天数 n_2 可用 n_1 和 n_2 的变化速率表示

$$n_1 = \omega(T)/N_{日} - 1, \quad \mathrm{d}n_1/\mathrm{d}T = \omega(T)/N_{日} \tag{5.31}$$

$$n_2 = [\omega(T) - N_{日}]/[N_{月}(T) - N_{日}], \mathrm{d}n_2/\mathrm{d}T = \omega(T)/(N_{月} - N_{日}) - N_{月}(\omega - n_{日})/(N_{月} - N_{日})^2 \tag{5.32}$$

其中：$N_{日}$ 和 $N_{月}$ 分别为太阳和月亮的平均运动，ω 为时刻 T 的自转速度。

如果假设 $N_{日}$ 为常数且除了潮汐转矩外没有其他转矩作用于该系统，那么这些量可根据开普勒定律和角动量方程求出。

月球与地球靠得很近也许意味着月球是在地月系统演化进程的某个相对晚期阶段，或是从地球分离出去，或是被地球俘获过来的，但这两种假设不能被地球化学家所接受。

§5.5 地球旋转角速度的变化

5.5.1 地球自转的监测

地球的自转实际上就是地球在准惯性系中的旋转，由旋转角速度来描述。旋转角速度有三个分量：自转角速度、进动角速度和章动角速度。通常所说的对地球自转的监测，即指对自转角速度的监测，也即对日长的监测。从客观上看，地球自转角速度本身并没有误差，但它存在随时间变化的部分。现在的问题是如何以较高的精度监测地球自转。

在地面上任意选取一点 A，只要它不在瞬时极上，同时假定它在几十个小时之内没有变

化（但由于固体潮作用，这实际上是不可能的），那么，一个恒星两次经过 A 的上中天所经历的时间就是一个恒星日。在没有精密时钟之前，在假定恒星在惯性系中不动、同时假定地球旋转角速度恒定的前提下，可以用一个恒星两次上中天之间的间隔（恒星日）作为时间标准。将恒星日划分为 24 等份，每一等份即为一个恒星时。若用恒星时为标准，当然无法监测出地球旋转角速度的变化。太阳属于一颗恒星。太阳两次上中天之间的间隔称为太阳日。由于地球绕太阳的公转轨迹是椭圆，再加上地球的公转速率并非恒定，因而太阳日与太阳日之间有差异。为了消除这种差异，引入平太阳日（天）：即365 个太阳日的平均值。将平太阳日分成 24 等份，便形成平太阳时。以恒星时监测太阳时，就会发现二者并不相同：地球环绕太阳一周（即一年）所经历的恒星时比太阳时要短 24 个恒星时。也就是说，一年需要 365 个平太阳日（确切地说是 365.25 个平太阳日），相当于 366 个恒星日。理想的平太阳日（即日长l. o. d）是恒定的。然而，实际的地球自转角速度并非恒定，这就导致了日长的变化。总体上来说，日长有缓慢增长的趋势（长期变化），大约每百年增长的量级为 1 ~ 2ms（盖宝民，1996），这相当于日长的变化率处于 5×10^{-10}量级。因此，任何分辨率低于 5×10^{-10}的观测结果都不足以说明日长的长期变化。

测定日长的基本方法就是通过天文观测并利用独立的时钟进行，所测定的日长的误差来源于天文观测误差、时钟本身的误差以及读数误差。在原子钟时代之前，守时系统先后采用重力摆钟和石英钟。如果不对重力摆钟进行校正，无法用来监测日长的变化。最重要的校正部分来源于重力强度 g 的变化。校正后的重力摆的守时精度可达到 0.4×10^{-8}，勉强可以监测出日长的变化。Stoyko(1951) 当初给出的日长变化结果比目前较普遍接受的结果大两倍。石英钟的出现并没有给监测日长变化带来多少改善，因为它的守时精度也只能达到 10^{-8}量级。原子频标出现之后，守时精度大幅度提高，已远远高于天文观测精度。

原子的能级跃迁（在基态与激发态之间）对应于非常稳定的光辐射频率。以此为基础可以定义时标——利用原子钟守时。原子钟的稳定性比重力摆钟或石英钟的稳定性要高得多。目前，原子钟的相对精度已达到 $10^{-15}\sim10^{-16}$。因此，采用原子钟，守时精度已不成问题。剩下的关键问题是天文观测精度。天文观测精度的提高主要受到三方面的限制：恒星对准误差、光路影响 以及测站的迁移（由于地球形变）。从目前的发展情况来看，天文观测精度难以突破 $10^{-8}\sim10^{-9}$量级。为此，自 20 世纪 70 年代初，人们便开始考虑新的监测技术，主要有：人卫观测，激光测月，甚长基线干涉测量。

总体来说，在假定恒星不动、地球没有公转的前提下，所测恒星日的变化即为旋转角速度的变化，也即地球自转的变化。对地球公转的影响以及恒星自行的影响加以改正，即可得到更为真实的地球旋转的变化。然而，地球表面的几乎每一个点 A 都处于相对于地球本体总质量的迁移之中，因而，又需要将这种由迁移效应引起的恒星日变化加以校正。但困难在于，A 点的迁移量是很难精确测定的。为了解决这一困境，需要采用分布在不同地区的多个台站对同一颗恒星的观测资料，通过联合平差以得到更为可靠的结果，所基于的基本假设就是：由各个台站所测定的恒星日变化（已加进各种改正）的误差是随机的（Lambeck，1988）。采用这种方法，即可得到地球自转（旋转角速度）的变化。

5.5.2 影响地球旋转角速度变化的因素

引起地球旋转角速度变化的原因有多种，这可以从描述地球旋转运动的 Liouville 方程(5.22）看出。激发函数是引起日长变化的重要原因。我们曾经指出，激发函数来源于三个

方面的贡献：物质的重新分布、物质的相对运动以及力矩。

物质的重新分布将导致惯量张量的变化，从而直接影响到角速度的三个分量，其中所论的重新分布包括：核幔物质对流（包括岩浆喷出），板块运动（包括大陆漂移），造山运动，冰雪消融及增长，降雨、降雪及蒸发，各种水源（湖泊、海洋及地下水）的变化，江河改道，沙漠推移，植被的生长及腐烂，动物、人类的繁衍及迁移，建筑物的新建及拆迁，等等。

由式(5.27)可以看出，物质相对于地球本体（地固坐标系）的运动也对激发函数有贡献，主要来源于核幔对流，板块运动，造山运动，江河流动，沙漠推移，降雨、降雪等。

力矩是影响激发函数的重要因素，而对力矩的贡献主要来自日月引潮力，行星引潮力，潮汐摩擦作用，风的影响，核幔耦合，等等。

5.5.3 地球自转参数的监测

粗略地说，利用某种特制的天文望远镜（中星仪）测定一颗恒星两次上中天的时间间隔，即得到地球的旋转周期，这也是通常所说的（恒星）日长。通常所说的一天与恒星日略有差异：366 个恒星日相当于 365 天。关于这一点，只要按如下方式设想一下即可清楚：假如地球绕太阳公转一周，地球正好也自转了一圈（相对于恒星），那么，地球就经历了一个恒星日，但没有经历太阳日。

如果在两极处连续监测并拍摄恒星，在底片上就会出现圆形弧段，揭示了瞬时地轴绕平均地轴的旋转：它们之间的交角大约为 0.3″，在两极处所画出的小圆半径大约为 10m，周期大约 14 个月。这实际上就是 Chandler 进动周期。不过，照相法精度不高，不能提供精确的极移参数。

更有效地确定极移参数的办法是采用天文测量手段，测定时角和赤纬，后者随瞬时极的变化而变。也就是说，赤纬是极移参数的函数。通过多组观测进行平差处理，即可得到极移参数。采用天文测量手段，测定极移的精度已达到 0.01″，而测定世界时的精度为 0.001s（胡明城和鲁福，1994）。

利用人卫观测技术（主要是多普勒跟踪以及激光测卫）也可确定极移参数。卫星轨道根数与极移参数密切相关。于是，多普勒跟踪或激光测卫的距离之中便包含极移参数。在选定了适当的模型之后，根据大量的观测资料可将极移参数作为未知数解出。这方面的工作最先由 Anderle 和 Beuglass（1970）完成，他们是根据美国海军导航卫星的多普勒跟踪资料实现的。Anderle（1973，1976）对如何处理 15 年的多普勒观测资料进行了详细说明（Lambeck，1988）。实际上，也可以将地球旋转角速度的三个分量作为未知数参与解算，再将精密守时系统对自转角速度的观测值作为附加条件，有望得到较为完整的地球旋转参数。不过，这还有待进一步研究。利用激光测月资料确定地球参数的努力也已有了很多尝试，但由于精度的限制，几乎没有可供独立使用的结果（最好的结果的精度也只是与普通天文观测的精度接近，Lambeck，1988）。无论是利用人卫观测资料还是激光测月观测资料确定地球自转参数，其精度水平仍然没有超越普通天文观测水平。

最初讨论利用 VLBI 技术测定地球自转参数的是 Shapiro and Knight（1970）。随后，Shapiro et al.（1974）发表了测定结果，其精度并没有什么改善（极移和世界时的精度分别为 0.01″和 0.001s）。Robertson et al.（1979）的研究则表明，利用 VLBI 技术有可能使监测地球自转参数的精度提高。20 世纪 70 年代末期的研究表明，利用 VLBI 技术可使测定世界时的精度达到 0.0001s 的数量级，但对极移监测的精度并不能彻底改善（基线对 y 分量不敏感）。

从 1983 年开始，科学家将激光测卫与 VLBI 技术联合起来，利用一年多时间的观测资料，求解出了自转参数，世界时和极移的精度分别为 0.0002s 和 0.002″，对监测日长变化的精度水平则达到了 2×10^{-9}。

GPS 定位精度高，观测周期短，可望利用 GPS 技术有效地确定地球自转参数（胡明城和鲁福，1994）。实际上，一系列的实验性研究已经初步表明，目前利用 GPS 技术测定地球自转参数，其精度水平与激光测卫联合 VLBI 技术所得到的结果的精度相当（胡明城和鲁福，1994）。不过，要充分论证用 GPS 技术测定地球自转参数的优越性还有待进一步的研究。

就测定地球自转参数而言，今后的发展趋势也许是联合天文测量、VLBI、激光测卫、GPS 以及多普勒测卫以及其他观测技术，将地球旋转参数作为未知数联合平差求解。就目前的情况来看，无论采用哪种方法，或采用两种或三种方法的组合，所得到的结果之间均有明显差异，这种差异已难以归于误差影响。为什么会有这种差异，有待于进一步探索。



第 6 章　板块构造学说与活动地块学说

20 世纪 60 年代末，以加拿大的 Wilson（1965）、英国的 Mekenzie（1967）、美国的 Morgan（1968）和哥伦比亚大学的 LePichon（1968）为代表的科学家根据已掌握的全球海岭、海沟、转换断层、地磁条带状图像和地震等方面的资料，对海底扩张学说以及岩石圈和软流圈的概念进行论证，从而提出全球岩石圈由漂浮在软流圈上的多个活动块体组成的板块构造学说。板块构造学说提供地球上层的运动模型，用于解释地球上层的构造运动和地震活动。20 世纪 90 年代末，中国科学家在断块说、波浪状块体镶嵌说、活动亚板块与构造块体等学说的基础上，提出了中国大陆活动块体的科学假说，用于研究大陆强震的机理与预测问题。

本章主要介绍板块构造学说与活动地块学说。

§6. 1　板块构造学说概述

关于板块构造学说的起源，可以追溯到德国的 Wegener 于 1912 年提出的大陆漂移说。其后英国的 Holmes 于 1931 年提出了地幔对流的设想。20 世纪 60 年代初美国的 Hess 和 Dietz 提出了海底扩张说，加拿大的 Wilson 综合地幔对流和海底扩张这两个概念，进一步发展了地幔对流学说。在此基础上，板块构造学说才于 1967 ~ 1968 年期间为一系列论文所确立（胡明城等，1994）。

板块构造学说的创立经历了约半个世纪的历史，大陆漂移、海底扩张和板块构造是板块构造学说历史的三部曲。

Wegener 的大陆漂移说最初是从南美洲和非洲的大西洋两岸吻合得到启发的。由此他提出了一个设想：大约 3 亿年以前，北美大陆同欧亚大陆相连，南美大陆和非洲大陆相连，这个巨大的块体称为泛古陆，南半球大陆也附在其上。泛古陆大约 2 亿年前开始分裂，各大陆开始漂移。为了阐明这种设想，他利用了古生物学、地质学和古气候学的各种“吻合”证据。这些证据还是没有充分说服力，特别是关于驱动大陆漂移的机制，Wegener 提不出令人信服的解释。大陆漂移说在当时的地球科学界产生了极为强烈的反响，支持和反对的人旗帜鲜明。Wegener 的假说一提出就招致许多地球学家的反对，其中不仅包括维护传统地质学观念的地质学家，同时还包括了以著名地球科学家 Jeffereys 为首的地球物理学家的反对。Jeffereys 针对 Wegener 假说中有关花岗岩漂浮在玄武岩之上的假想，严格地计算了地球自转不均匀产生的力，并证明这一力不可能克服两者之间的巨大摩擦而容许大陆漂移，从而从物理学上否定了 Wegener 的假说，在很大程度上暂时平息了有关大陆漂移的争议。而 Wegener 于 1929 年在一次格陵兰的探险中不幸遇难，大陆漂移学说逐渐地不被人们重视。

大陆漂移说的复活，从 20 世纪 50 年代开始。古地磁学的兴起和岩石绝对年龄测定法的

发现，在这里起到了关键性作用。古地磁学在20世纪50年代作了两大贡献：一是确定了地球磁场的倒转史，二是发现了磁极游动现象。根据测磁结果，发现一些岩石的磁化方向与现在的磁场方向正好相反；这表明当这些岩石磁化时，地球磁场的方向正好和现在的相反，即地球磁场发生过倒转。现已初步证明，这种倒转是周期性的，最近340万年有过3次主要倒转，正向期和反向期的持续时间大致相等，都是将近100万年。通过测定各种不同年龄岩石形成时的磁场方向，可追溯地球磁场史。英国的Rancorn由岩石磁性测定了欧洲大陆从前寒武纪以来每一地质时期古地磁北极的位置，画出其游动曲线。另外他也对北美大陆的岩石测出了同样的曲线。这两条曲线很相似，但并不一致。如果将北美大陆向东移动约30°，这两条曲线一致。这说明北美大陆和欧洲大陆原来是连在一起的，不存在大西洋，后来北美大陆向欧洲大陆以西移动了30°，留下的空白为海水所填充，形成了大西洋。

岩石绝对年龄测定法是利用岩石中所含的微量放射性元素铀、钍、钾等同位素的自然衰变规律计算岩石生成以来的年龄。已用这种方法测定了南美大陆东部和非洲大陆西部古地层的年代，证明这两个大陆能很好地连接。

英国的Bullard et al于1965年用计算机计算了全球海岸线吻合的区域，并发现在915m等深线处大陆的吻合性比较好。

以上从3个方面以比较可靠的科学证据支持了大陆漂移说。

第二次世界大战之后，20世纪50年代由于海洋地球物理勘探的发展，大量的观测资料表明在全球范围存在一个大洋中脊系统，一个垂直于大洋中脊的水平大破裂系统，一个海沟系统。特别是相对于大洋中脊的一个对称分布的条带状地磁异常的发现，使得一个继大陆漂移学说之后的新理论——海底扩张说得以发展。1962年Hess提出：地幔中存在大规模的对流运动，上升流涌向地表形成洋中脊，下降流则在某些大洋的边缘（如太平洋）造成巨大的海沟。洋壳在洋脊生成后，向两侧对称漂移，然后在海沟处消亡，这就是所谓的“海底扩张”。其实，海底扩张最早是由Dietz（1961）提出的，他指出，发生侧向漂移的力学单元不是洋壳而是比洋壳更厚的岩石层。与大陆漂移假说相比，海底扩张学说具有更广泛的现代观测数据的支持，特别是受到以观测资料为出发点的地球物理学家们的广泛的兴趣和关注，他们以无比的热情投入了大量的新的观测和解释工作。20世纪60年代，地学家们根据大量的观测资料，在古地磁学、地震学、地热学等方面积累了大量的大陆曾经和正在移动的证据，终于形成了著名的被誉为地球科学革命的“板块构造”或“全球构造”理论（傅容珊等，2001）。

Morgan（1968）提出了板块构造的基本概念，他指出板块在地幔热对流驱动下运动；每个刚性板块在球面上绕自己的旋转轴运动，大陆漂移仅仅是板块运动的一个组成部分；所有的大规模构造运动，如地震、火山、造山运动等均发生在板块的边界上。同时他还建立了以地幔热柱为框架的绝对坐标系，以描述板块绝对运动(图6.1)。

Isackse et al(1968)提出了全球构造理论。他们以各种证据论证了板块构造理论，划分了板块，给出了板块产生、消亡的统一模型(图6.2)。

地幔对流设想图见图6.3。

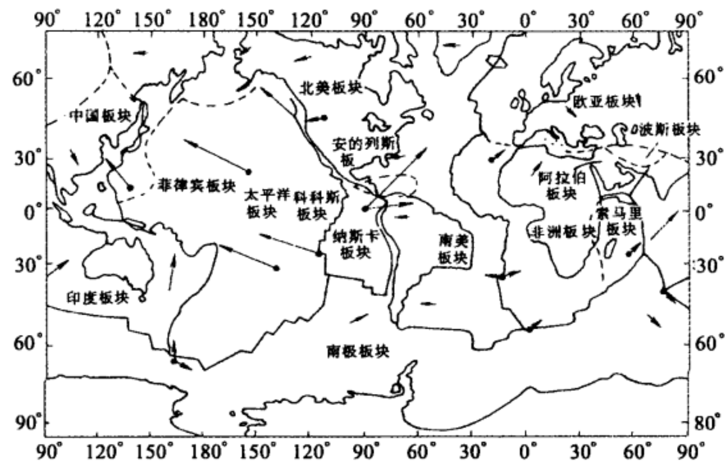


图 6.1　Morgan 描述的热点坐标系及板块绝对运动(引自傅容珊等,2001)

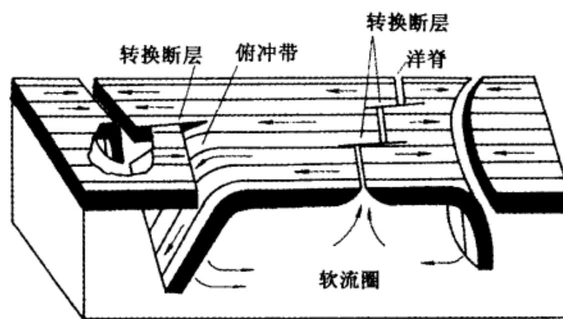


图 6.2　板块构造模型(引自傅容珊等,2001)

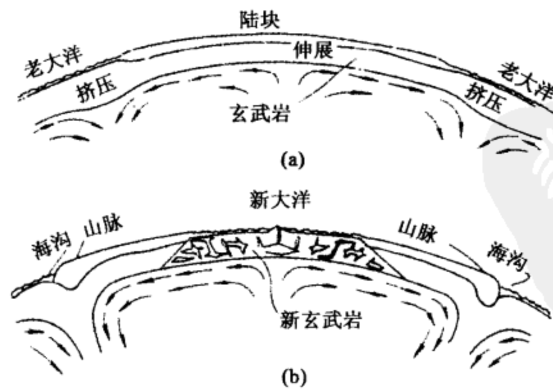


图 6.3　地幔对流设想图(Holmes,1945)(根据阿莱格尔,1987;傅容珊等,2001)

§6.2 板块构造的基本单元

板块构造的基本单元或是组成板块的一部分，或是板块构造中的关键地域，主要有：岩石圈，大洋中脊，消减带，转换断层，大陆碰撞带，三联点等，其中岩石圈是板块构造的最基本的单元。横向来看，岩石圈是漂浮在(地幔)软流层上坚硬的一层，相对于较为热的、软的地幔而言它是刚性的一个力学分层，它包括地壳和地幔的顶部，其厚度一般在70km到150km之间，平均厚度为100km左右；岩石圈板块既包括最古老的年龄达数十亿年的大陆，同时也包括最大年龄为2亿年左右的海洋；冷的坚硬的岩石圈漂浮在相对而言软而热的地幔之上，一个岩石圈板块可同时包括海洋和大陆；岩石圈的力学性质，在水平方向上具有很强的刚性，而在垂直加载的情况下，在冰川加载和卸载的时间尺度内，可呈现出弹性或粘弹性质。现代研究表明，在水平方向上，岩石圈在板块边界地区(特别是碰撞带)会发生强烈的变形，呈现出可流变性质(傅容珊等，2001)。

大洋中脊、消减带、转换断层、大陆碰撞带可认为是四种板块边界线(带)。1968年法国LePichon根据全球构造活动带、地震、火山的分布把整个地球岩石划分为六大板块：太平洋板块、欧亚板块、印度洋板块、非洲板块、美洲板块和南极洲板块。这些板块的边界线(带)就是由大洋中脊、俯冲带、转换断层、大陆碰撞带构成的。

6.2.1 大洋中脊

大洋中脊是板块发散边界之一，它是新生岩石层板块的地方。世界各大洋的中部都有一条海(洋)底山系，这些洋底山系在太平洋、印度洋、大西洋、北冰洋内连续延伸，成为全球裂谷系，总长度约80 000km。海岭顶部水深多为2 000～3 000m，它高出两侧洋盆底部的相对高度多在2～3km，宽一般可达1 000～2 000km，最宽可达4 000km，窄者不过数百公里。按不同的海底地貌，将有中轴而无中央裂谷、两麓比较平缓的海岭称为中隆，如太平洋中隆；有中央裂谷并分开两条脊峰、两麓崎岖的海岭称为中脊，如大西洋中脊。太平洋中隆偏居于大洋东南部，亦称东太平洋中隆。大西洋中脊、印度洋中脊均位于大洋中部，整个洋中脊形状歧分三支，成为倒置的Y形。

6.2.2 消减带

当洋壳板块向两侧移动，遇到大陆板块时即发生碰撞，由于洋壳板块的岩石密度大、位置低，便俯冲插入到大陆板块之下，形成俯冲带。俯冲带的板块向下进入地幔，被地幔的高温熔融同化，以至完全消失，所以也叫消减带、消亡带。俯冲带可分为岛弧型和安第斯型两类。岛弧型在岛弧与大陆间发育有弧后盆地或边缘海，海沟与岛弧相伴随，即成岛弧－海沟系，如西太平洋地区，自北而南，有阿留申海沟、千岛海沟、日本海沟，在日本本州附近又分为两支，一支向南，为伊豆－小笠原海沟、马里亚纳海沟等；另一支向西南，为西南日本海沟、琉球海沟、菲律宾海沟，再向南还有新不列颠海沟、新赫布里底海沟和汤加－克马德克海沟等。安第斯型为洋壳板块直接俯冲到大陆之下，海沟直接濒临大陆地块，如太平洋东缘的中美海沟、秘鲁智利海沟。海沟大多靠俯冲板块一侧，且平行板块边界延伸很远，深度大多超过4 000m。全世界的海沟最深处在马里亚纳海沟中，达11 033m，海沟主要分布在太平洋边缘，构成近于环形的海沟带，海沟内沉积层不厚，常为数百米，最厚的达500～1 500m。海沟区属低热流带，热流值不

到地面平均值的1/2,正表明它是由较冷岩层向下作俯冲运动所引起;在大陆板块一侧,距海沟轴(中心线)150～1 500m处分布有火山带;它开始为海底喷发,以后变为陆上喷发,在大陆边缘构成火山链。因其分布呈弧形,故称火山岛弧。对于喷出岩浆的成因,目前有多种看法,其中的一种看法认为,洋壳板块俯冲到大陆板块下面距地表150～200km深度时,由于与大陆板块之间的摩擦生热和逐渐进入地幔,温度也随之升高,并使其前缘岩石层部分熔融成岩浆,在距海沟中心线150～200km地带上升喷出地表。

消减带是板块边界之一,它是板块的汇聚、消亡的地区。一个完整而典型的消减带包括岩石层板块、海沟、火山和弧后扩张盆地等几个部分。

6.2.3 转换断层

转换断层与地质学中讨论过的断层不同,它是由加拿大学者Wilson提出来的新的断层概念。转换断层是板块边界的一种特殊形式,是联结发散边界和汇聚边界的一种板块边界。

大洋中脊在构造上并不连续,它被一系列与轴线相垂直的大断裂带所切割,断裂带之间的间距为50～300km。断裂带在地形表现上往往一侧是狭长的海脊,另一侧是深陷的槽谷,由脊至槽为陡峭的崖壁;或者有一系列脊槽沿断裂带呈雁行状排列。沿断裂带发育的槽谷颇深,经常超过毗邻裂谷的深度,如赤道大西洋罗曼奇断裂带上的罗曼奇深渊,深7 856m,是大西洋中除波多黎各海沟和南难桑德韦奇海沟外的最深处。这种横向断裂带把中脊和裂谷平错开来,错移幅度可达数十到数百公里。在太平洋和赤道大西洋的中脊上,这种平错最为显著,幅度大者可达上千公里。

这种横断中脊的断裂带看似一般的平移断层,实则并非如此;Wilson指出,这是自中脊轴部向两侧海底扩张的转换断层。平移断层是剪切应力造成的断裂两侧断块的相对错动,断层两侧的中脊之间的距离将越来越大,每一侧断块的运动方式是一致的,断裂的错动距离向两端逐渐减弱,慢慢消失(参见图6.4(a));而转换断层由于中脊两侧海底不断扩张,断裂两侧的中脊之间的距离并不加大,相互错动仅发生在两段中脊轴之间的BB'段上,至两个端点B和B',断裂的错动突然终止(参见图6.4(b))。转换断层中BB'段的错动方向与中脊的位错方向相反,中脊外侧的AB和$B'C$段、断层两侧块体间没有相互错动,位移方向相同。

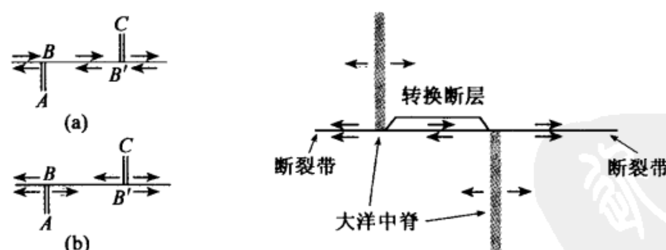


图6.4 转换断层图

转换断层是为了解释条带和中央海岭的相对错动而提出的。20世纪50年代海洋地磁测量提供了惊人的成果。海洋地磁异常显示了以下特征:

(1)它的图像呈现出非常整齐的南北向条带状。

(2)正磁向条带和反磁向条带交替出现,宽度约为20~30km。

(3)这些条带相对于中央海岭对称。

(4)这些条带和中央海岭发生相对错动,少则100km,多则达到1 000km的量级。这些条带正是地球磁场倒转的历史记录,条带宽度就是正向磁期或反向磁期持续的时间。

对于条带和中央海岭的相对错动,Wilson认为这种错动是图6.4(b)所示的转换断层引起的,它不同于图6.4(a)所示的平移断层。两者的区别在于,平移断层两侧的地块朝向箭头所示方向移动时,整个构造 AB、$B'C$ 等都错开了,即沿着整个断层发生相对运动,BB'错动随着时间而变大;转换断层两侧的海岭 AB、$B'C$ 按照图示的方向扩张,如果扩张速度和断层错动速度相等,则相对运动仅发生在 BB'这一段,范围不会扩大,断层两侧在 BB'以外的地块不产生相对运动。假定地震是由于断层的相对运动产生的,那么沿着整个平移断层都会发生地震,而在转换断层的情形则仅仅发生在 BB'这一段。Wilson认为中央海岭各处被切断而成的一些破碎带,只能是转换断层。

转换断层切穿整个岩石圈。沿洋底转换断层发育的槽谷及崖壁,其高差有的可达2km以上。在转换断层的错断带上,岩石破碎,表现出强烈的动力变质作用。转换断层可以有多种形式,如连接一个海沟的两段,或者是联结海沟和洋脊等,图6.5是一些可能的转换断层的形式。

6.2.4 大陆碰撞带

大陆碰撞地区同样属于板块的汇聚边界。当两个大陆相遇时由于大陆地壳比重小而阻止其深入地幔之中,结果两大陆产生碰撞。碰撞的直接结果为造山运动。两个大陆板块相碰撞,强烈挤压后被缝合在一起,其出露于地表的接触带称地缝合线(简称缝合线)。

板块的扩张和汇聚,带动其上的大陆漂来漂去。洋底的俯冲与板块的汇聚,终将导致两侧大陆相遇汇合,此时,大规模的俯冲作用停止,碰撞开始,俯冲带转化为缝合带。阿尔卑斯－喜马拉雅山以北150km处,沿雅鲁藏布江,并向西至象泉河、克什米尔长达一千公里的地带,即为印度板块与欧亚板块的缝合线。

板块间不同的相对运动方式,可将板块边界分成三种基本类型:

(1)分离型板块边界。相当于大洋中脊、中隆轴部,两侧板块相背离开,中央海岭轴部是海底扩张中心。当两侧板块分离拉开时,软流圈物质夺隙小涌,冷凝成新的洋底岩石圈,并添加到两侧板块的后缘上,故分离边界也是板块的增生边界,或称建设型板块边界。

(2)聚合型板块边界。相当于海沟及年轻造山带,两侧板块相对而行。汇聚型边界也可以与板块的运动方向斜交,是最复杂的板块边界。此类边界可进一步划分为两种亚型:

①俯冲边界。由于大洋板块厚度小、密度大、位置低,大陆板块厚度大、密度小、位置高,故一般总是大洋板块俯冲于大陆板块之下。俯冲边界主要分布在太平洋周缘,亦称太平洋型汇聚边界。沿这种边界大洋板块潜没消亡于地幔之中,所以也称消亡型边界。这种边界在不同地域因其不同特点又有岛弧-海沟系及安第斯型的不同之分。

②碰撞边界。相当于年轻造山带,为大洋闭合、大陆碰撞接触的地缝合线。现代碰撞边界主要见于欧亚板块南缘,亦称阿尔卑斯-喜马拉雅型汇聚边界。

(3)平错型板块边界。相当于转换断层,两侧板块互相滑动。通常既没有板块的生长,也没有板块的破坏。

从全球来看,岩石圈被海岭、海沟和转换断层所组成的连续体切断成为若干个板块。

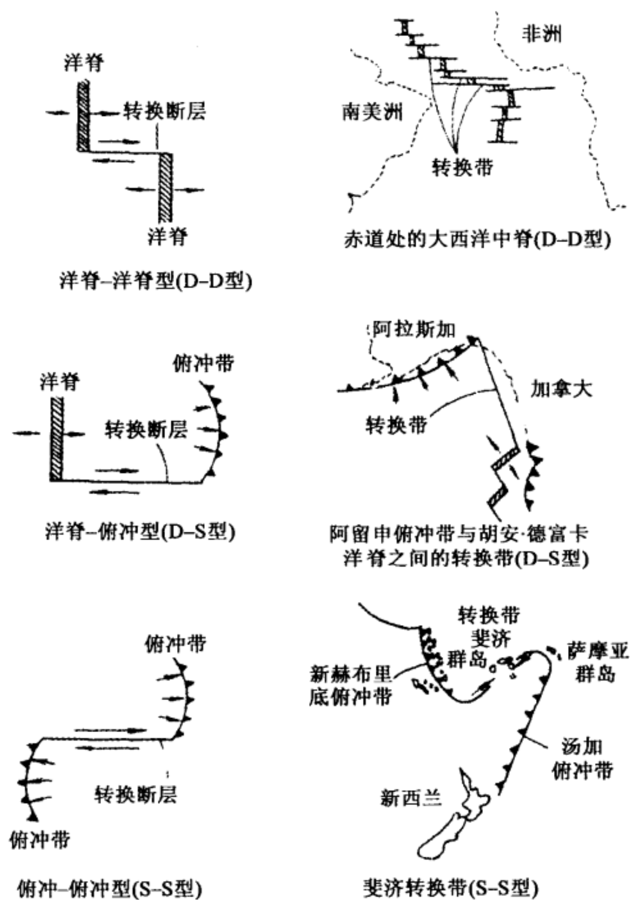


图 6.5　转换断层　左:模型;右:实例(根据阿莱格尔,1987;傅容珊等 2001)

6.2.5　三联点

三联点是一种特殊的板块边界,它描述了三个板块的边界的结合部(图 6.6)。通常的形式是洋脊—洋脊—洋脊(R-R-R)、洋脊—转换断层—转换断层(R-F-F)、洋脊—海沟—海沟(R-T-T)。例如太平洋板块、科科斯板块和纳斯卡板块汇合的北纬 2°11′,西经 102°10′,是三个洋脊的汇合点。每一种板块边界的相对速度有其规律:

(1) 洋脊。相对速度必定离散且垂直于洋脊。

(2) 转换断层。相对速度必定平行于断层。

(3) 海沟。相对速度必定会聚但没有特别优势方向。

所有的三联点的板块运动速度必须满足闭合回路条件:

$$V_{BA} + V_{CB} + V_{AC} = 0 \tag{6.1}$$

其中板块 A 是固定的。

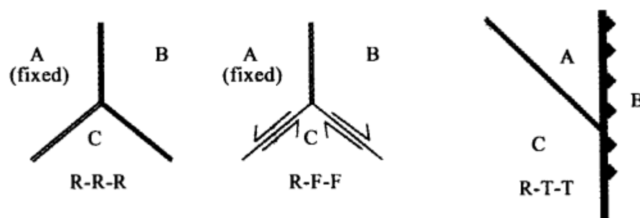


图 6.6　三联点

§6.3　板块构造运动

测定各板块相对于某一参考框架的运动，建立全球板块运动模型，是了解发生在板块边界上的各种构造现象和解释板块大地构造的基础。

板块构造学说认为相邻两板块之间的相对运动实际上是围绕通过地球中心的一个轴的旋转运动，通常用欧拉定理来表述。欧拉 1776 年证明了一个刚体绕固定点转动的定理：刚体绕某一固定点的转动可表示为绕过此固定点的某一瞬轴的转动。如果把地球看成一个球体，把球心看成强制在地球表面上运动的刚性板块运动的固定点，则这些刚体板块的运动可表示为绕过球心的某定轴的转动，这个轴即为欧拉极。根据欧拉定理，可以用一个简单的旋转来表示每一个刚体板块在地球表面的运动，其旋转轴称为板块运动的瞬时旋转轴，其轴与地球表面上的交点称为板块旋转极。

欧拉定理的数学描述为：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{6.2}$$

或

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{i}(\omega_y z - \omega_z y) - \boldsymbol{j}(\omega_x z - \omega_z x) + \boldsymbol{k}(\omega_x y - \omega_y x)$$

式中：$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是单位矢量，速度大小可表示为：

$$|\boldsymbol{V}| = |\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|\sin\Delta \tag{6.3}$$

式中：Δ 是位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 和角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 之间的夹角，它可以由下式确定：

$$\cos\Delta = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|} \tag{6.4}$$

6.3.1　板块相对运动

图 6.7 表示了板块 B 和 A 之间的相对运动，通常可以利用下面的方法确定板块运动的旋转极：

（1）大洋中脊的方向。

（2）磁异常条带的走向。

（3）转换断层和水平走向破裂带的垂线方向。

同时，可以利用磁条带异常离开大洋中脊的距离和洋底岩石的绝对年龄确定出旋转的速率。

以某一板块为参考的板块运动，称为板块相对运动，包括两个参数：速度和方向。图 6.8 是板块平面运动示意图，它描述两个板块的相对运动。

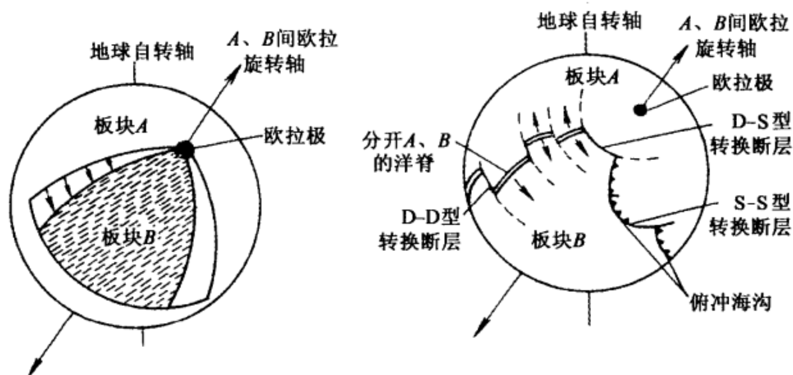


图 6.7　欧拉定理描述的刚性块体在球面上的相对运动(根据阿莱格尔 1987)

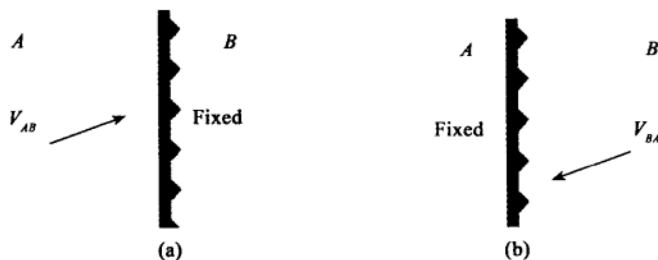


图 6.8　板块平面运动示意图

图(6.8)中,V_{AB}是板块 A 相对于板块 B 的运动速度,V_{BA}是板块 B 相对于板块 A 的运动速度,且有

$$V_{AB} = -V_{BA}$$

$$\boldsymbol{V}_{AB} = V_x\boldsymbol{i} + V_y\,\boldsymbol{j} \tag{6.5}$$

对于板块球面运动,已知两板块之间的相对运动的角速度 ω 和观测点相对于旋转极的角距离 Δ,则很容易计算两板块相对运动的速度:

$$u = \omega r \sin\Delta \tag{6.6}$$

式中:r 为地球半径。

若观测点的坐标为 $A(\varphi,\lambda)$,两板块相对运动的旋转极为 $P(\theta,\phi)$,则可得出其观测点相对于旋转极的角距离为:

$$\cos\Delta = \cos\phi\cos\varphi + \sin\varphi\sin\phi\cos(\phi - \varphi) \tag{6.7}$$

板块运动框架示意图如图 6.9 所示。

一般而言,板块运动的相对速度按以下方法确定。设 P 点是板块(块体)i 与板块(块体)j 边界上的点,P 点的经纬度坐标为(λ,φ),板块 i 的欧拉矢量参数为($\omega_i,\Lambda_i,\Phi_i$),和板块 j 的欧拉矢量参数为($\omega_j,\Lambda_j,\Phi_j$),则在 P 点断裂(层)相对运动的速度矢量等于作为板块(块体)i 的一盘的运动速度 $\boldsymbol{u}_i$ 与作为板块(块体)j 的另一盘的运动速度 $\boldsymbol{u}_j$ 的矢量差:

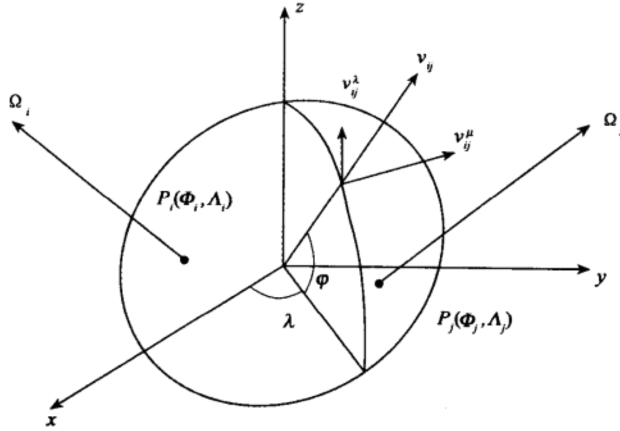


图 6.9 描述板块运动框架示意图

$$\boldsymbol{V}_{ji}=\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{u}_i \tag{6.8}$$

这样,对任一板块(块体)边界上的点相对运动速度矢量的纬向分量 V_{ji}^{n} 与经向分量 V_{ji}^{e},进一步可以根据该点的坐标以及所涉及的两相邻块体的欧拉矢量参数,推得如下公式

$$\boldsymbol{V}_{ji}=(\boldsymbol{\omega}_j-\boldsymbol{\omega}_i)\times\boldsymbol{r}$$

$$\begin{cases} V_{ji}^{n}=R\cos\Phi_j\sin(\lambda-\Lambda_j)\omega_j-R\cos\Phi_i\sin(\lambda-\Lambda_i)\omega_i \\ V_{ji}^{e}=R(\cos\varphi\sin\Phi_j-\sin\varphi\cos\Phi_j\cos(\lambda-\Lambda_j))\omega_j- \\ \qquad R(\cos\varphi\sin\Phi_i-\sin\varphi\cos\Phi_i\cos(\lambda-\Lambda_i))\omega_i \end{cases} \tag{6.9}$$

则很容易求出两个板块之间的相对运动速度的绝对值和方向值为

$$|V_{ij}|=\sqrt{V_{ji}^{n^2}+V_{ji}^{e^2}}$$

$$\alpha_{ji}=\arctan\frac{V_{ji}^{n}}{V_{ji}^{e}} \tag{6.10}$$

反之,若已知各边界点上板块运动的相对速度 $\boldsymbol{V}_{ji}$,则可以反过来求板块运动的旋转极及相对运动速度。

若有 m 个板块,有 n 个速度数据和 n 个方向数据,当把某一个板块看做是静止时,则有 $(3m-3)$ 个未知数 $\omega_j,\Lambda_j,\ \Phi_j,\ j=1,2,3,\cdots,m-1$。如果观测数据为 $(n_v+n_s)>(3m-3)$ 时,则可用最大拟然估计法(Maximum Likelihood)求得在误差最小时板块相对于静止板块运动速度参数。

板块相对运动模型已经历了如下发展过程:

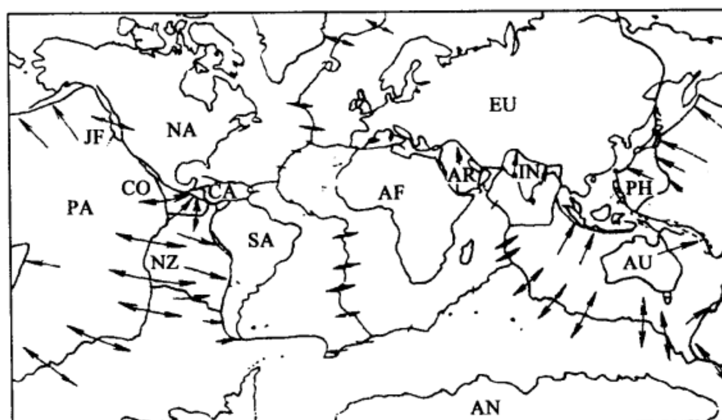
(1)第一代模型。第一个自恰的全球板块相对运动模型 LP68 ,LePichon 基于 Morgan 提出的板块全球模型,利用断裂层的扩展速率和方位进行拟合,得到 6 个板块运动的定量描述。

(2)第二代模型。Minster and Jordan 于 1974 年利用 68 个扩张速率,62 个断层方向和 106 个地震滑动矢量,建立 RM1 模型,主要包括 10 个板块的相对运动。由于随后几年的应用和研究表明:RM1 模型明显存在不足,预测南美—北美的相对运动误差较大,以及非洲—北美板块运动方位角偏差较大等不足。

(3)第三代模型。Chase 于 1972 年利用 176 个相对运动方向,59 个板块分离速率数据,拟合了全球 8 个板块相对运动,建立了 CH72 模型,之后 Chase 于 1978 年提出了 P071 模型。Minster and Jordan 等在 RM1 模型基础上于 1978 年利用更多数据,建立了 RM2 模型,其中 RM2 模型与 RM1 模型基本一致,只是 RM2 模型比 RM1 模型增加了一个加勒比板块。P071 模型和 RM2 模型称为第三代模型。

(4)第四代模型。DeMets et al. 分析当前板块运动数据,利用 12 个板块 1 122 个数据进行拟合,于 1990 年提出了假定刚性的 12 个现代板块运动的全球板块运动模型,称为 NUVEL-1 模型。此后 DeMets et al 对 NUVEL-1 所用的地磁倒转时间尺度进行改正(地磁倒转时间增长 4%),即乘以因子 $a=0.956\ 2$,得到 NUVEL-1A 模型,从而改善了模型估计值与计算值之间的偏差。

板块相对运动 NUVEL-1 模型如图 6.10 所示。



AF:非洲板块;AN:南极洲板块;AR:阿拉伯板块;AU:澳洲板块;CA:加勒比板块;CO:科科斯板块;EU:欧亚板块;ID:印度板块;JF:胡安德福加板块;NA:北美板块;NZ:纳兹卡板块;PA:太平洋板块;PH:菲律宾板块;SA:南美板块

图 6.10　板块相对运动 NUVEL-1 模型(根据傅征祥,1997)

6.3.2　板块绝对运动

相对于某一与板块无关的参考框架的板块运动,称为绝对板块运动。因为作为地球最外层的岩石圈板块在运动着,人们无法在地球的表面找到一个绝对意义上的不动点作为板块的绝对运动的参考点。一个具有特殊意义的框架是相对于上层地幔的平均位置(称为平均岩石圈 mean lithosphere)固定的框架,即假设下层地幔是固定的,或至少其内部运动相对于板块运动小得多。显然这就是人们要选择的绝对参考框架,称为平均岩石圈框架。这种参考框架可通过以下两种途径实现:

(1)Wilson-Morgan 的热点假设。在地幔中存在一系列热点,其位置相对于下层地幔固定,板块相对热点的运动即为板块的绝对运动,这可通过测量跨越热点的火山链的年龄和长度

得到。

(2)岩石圈无整体旋转(No-Net-Rotation)假设。如果岩石圈与软流圈的耦合是侧向均匀的,并且板块边界的力矩对称作用于两个相邻板块,则平均岩石圈无整体旋转参考架就是相对于下层地幔不动的绝对参考架,相对于该框架的运动即为板块的绝对运动。已知全球各主要板块的相对速度和板块边界,即可求出相对于该框架的绝对板块运动。

热点参考框架是基于 Wilson-Morgan 的热点假说而建立的一种平均岩石圈框架。Wilson (1965)认为,板块在固定于地幔中的热点之上运动,是形成火山海岭的起源。当岩石圈板块跨越于热点之上时,板块仿佛被烧穿了,形成火山中心,在热点处断续的喷溢形成火山,而板块则不停地移动跨过热点。先形成的火山随着板块运动移出热点,逐渐熄灭成为死火山,在后面热点处又形成新的火山。这样不断地推陈出新,便发育成由新到老的一串火山链。因此,火山链实际上标示出板块移过热点的轨迹,录下板块的运动方向。为解释热点的生成,Morgan (1972)提出地幔柱(mantle plumes)的概念。地幔柱是源于地幔深部的圆柱形上升流,它携带地幔物质和热能直到地幔上层,并在岩石圈和软流圈分界处四散分流,但是并没有形成补偿上升地幔柱的专门下降带。或许,反向流均匀散布于地幔中。他还强调,热点大体上固定于下地幔中,因此,板块相对于热点的运动,便是相对于下地幔固定部分的运动。这样,热点参考框架就是相对于下地幔固定的参考框架,也就是平均岩石圈参考框架的实现。

以热点为一端的那些火山海岭是板块越过热点留下的痕迹,它们代表板块相对于热点的运动方向,应该是地球表面上的一段圆弧,相当于板块旋转运动的欧拉纬线。根据这些火山海岭的走向,可以求出板块相对于这些热点的旋转极。从海岭上火山活动的年龄,以及已知的火山之间的距离,又可以求得当时板块运动的线速度,以此可以反算板块的旋转角速度。

由热点假说建立板块运动模型的方法为

$$\min = \chi^2 = \sum \left(\frac{d_i^{obs} - d_i^{pred}({}_{plate}\boldsymbol{\Omega}_{hs})}{\sigma_i} \right)^2 \tag{6.11}$$

其中:d_i^{obs} 是第 i 个火山传播速率或方位角,d_i^{pred} 是第 i 个数据的模型估计值,它是该板块相对于热点旋转的欧拉矢量(${}_{plate}\Omega_{hs}$)的函数,σ_i 是第 i 个数据的标准差。

使用热点构成一不动的参考框架,Minster et al(1974)得到了板块绝对运动的模型AM1-2。

美国的 Gripp 和 Gordon 于 1990 年提出了一个相对于热点的板块运动模型,称为 HS2 - NUVEL-1。这个新的绝对模型是把 Minster and Jordan 的热点数据求逆的同时使相对运动速度与 NUVEL-1 模型相等来求得的(Gripp et al. ,1990)。图 6.11 是用板块绝对运动模型计算得到的板块绝对运动 HS2-NUVEL-1 模型。

NNR(Not-Net-Rotation)参考框架是基于一种平衡条件,即所有岩石圈板块所受到的力矩总和等于零。也就是说,没有纯力矩作用于整个岩石圈。这个条件实际上包含着两个假设:一是岩石圈与软流圈的耦合是侧向一致的,二是涉及板块边界的力矩总是对称作用于两个相邻的板块。如果已知板块之间的相对运动欧拉矢量和板块边界的几何分布,则根据上述条件用一简单的数学模型就可以计算各板块相对于 NNR 参考架的绝对运动欧拉矢量。用该方法建立板块运动模型主要有两类观测量:

(1)相邻板块的相对运动速率观测值。包括海底扩张速率、汇聚速率和错动速率。

(2)板块相对运动方向的主要观测量。转换断层方位角和地震滑动矢量。

两个刚性板块 p 和 q 在球面的相对运动可以用一个角速度矢量 $\boldsymbol{\Omega}_{pq}$ 来表示。则在半径为 $\boldsymbol{r}$ 的一点两板块的当地分离速度为:

$$\boldsymbol{V}_{pq}=\boldsymbol{\Omega}_{pq}\times\boldsymbol{r} \tag{6.12}$$

由于板块是刚性的，所以板块间的相对欧拉矢量可以叠加，即

$$\boldsymbol{\Omega}_{pq}+\boldsymbol{\Omega}_{qr}=\boldsymbol{\Omega}_{pr} \tag{6.13}$$

设“板块”m 代表下地幔，相对它的速度为板块的绝对速度。如果假设板块受到的是线性拖曳力，则作用在岩石圈底部任意部分每单位面积上的拖曳力 $\boldsymbol{F}$ 为：

$$\boldsymbol{F}=-D\boldsymbol{\Omega}_{pm}\times\boldsymbol{r} \tag{6.14}$$

其中：D 是拖曳系数，可能随位置变化。在某点由 $\boldsymbol{r}$ 拖曳力引起的力矩为：

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=-D\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{6.15}$$

在整个板块 P 之下的拖曳力矩为：

$$\boldsymbol{T}=\int_{p}\mathrm{d}A(D\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\Omega}_{pm}\times\boldsymbol{r})) \tag{6.16}$$

如果 D 在单个板块上是常数，则在全球岩石圈上的平衡条件是：

$$\sum_{p}D_{p}\int_{p}\mathrm{d}A\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\Omega}_{pm}\times\boldsymbol{r})=0 \tag{6.17}$$

由矢量变换公式，可以设

$$\boldsymbol{L}\equiv\int\mathrm{d}A(\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\Omega}_{pm}\times\boldsymbol{r}))=\int\mathrm{d}A(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\Omega}-\int\mathrm{d}A(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{r} \tag{6.18}$$

设 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=1$，可以得到

$$\boldsymbol{L}_{p}=A_{p}\boldsymbol{\Omega}_{pm}-\int\mathrm{d}A(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega}_{pm})\boldsymbol{r} \tag{6.19}$$

设：

$$S_{ij}=\int_{p}\mathrm{d}\phi\int\mathrm{d}\theta X_{i}X_{j}\sin\theta \tag{6.20}$$

(6.19)式可以简写成

$$\boldsymbol{L}_{p}=A_{p}\boldsymbol{\Omega}_{pm}-S_{p}\boldsymbol{\Omega}_{pm} \tag{6.21}$$

定义：

$$Q_{p}=(A_{p}I-S_{p}) \tag{6.22}$$

I 为单位矩阵，式(6.17)可以改写成

$$\sum_{p}D_{p}Q_{p}\boldsymbol{\Omega}_{pm}=0 \tag{6.23}$$

式中：Q_p 完全取决于板块 Q 的几何分布，$\boldsymbol{\Omega}_{pm}$ 取决于两板块的相对旋转矢量。

对任一板块 0，由式(6.13)可知

$$\boldsymbol{\Omega}_{pm}=\boldsymbol{\Omega}_{po}+\boldsymbol{\Omega}_{om} \tag{6.24}$$

于是得到(将式(6.24)代入式(6.23))

$$\boldsymbol{\Omega}_{om}\sum_{p}D_{p}Q_{p}=-\sum_{p}D_{p}Q_{p}\boldsymbol{\Omega}_{po} \tag{6.25}$$

如果所有板块对应的 D 是相同的，则上式可进一步简化为

$$\boldsymbol{\Omega}_{om}\sum_{p}Q_{p}=-\sum_{p}Q_{p}\boldsymbol{\Omega}_{po} \tag{6.26}$$

又因为

$$\sum_{p}Q_{p}=\frac{8\pi}{3}I \tag{6.27}$$

式(6.26)可以简化为

$$\boldsymbol{\Omega}_{om} = -\frac{3}{8\pi}\sum_{p} Q_{p}\boldsymbol{\Omega}_{po} \tag{6.28}$$

根据岩石圈无整体旋转的条件得出的模型有 Minster 和 Jordon 由 RM2 导出的 AM0-2 以及由 Argus and Gordon 导出的 NNR-NUVEL-1A 模型。

上述都是用地质-地球物理方法建立的板块绝对运动模型，所采用的参考框架是地固坐标系的一种实现，它相对于地球整体应该是无相对运动的。

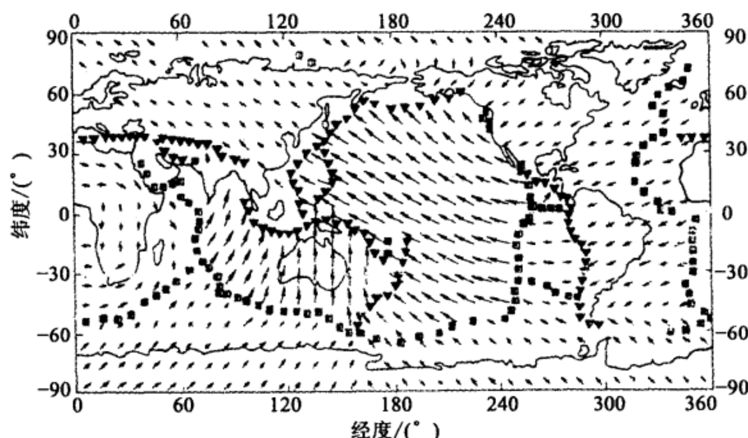


图 6.11　板块绝对运动 HS2-NUVEL-1 模型

6.3.3　板块运动模型建立的空间大地测量方法

随着 VLBI、SLR、GPS 和 DORIS 等空间观测技术迅猛发展，台站位移速度的测定精度达到 1mm/a，为毫米级高精度实测当今全球地壳运动提供了保证，由此基于空间技术的实测数据确定板块运动欧拉参数成为可能。ITRF 序列模型演变主要经历 ITRF88 ~ ITRF2000 。ITRF93 以前的 ITRF 序列速度场的精度和可靠性较差，而且基于许多地球物理模型的约束，因此建立的板块运动模型不能如实反映板块运动和内部特征。ITRF94 的速度场是实测的，但添加了百万年地质模型 NNR-NUVEL-1A 的约束，不能真正反映现今板块运动特征。ITRF96 以后的速度场是独立于板块构造理论，不受已有板块运动模型的约束，因此能建立现今板块运动模型 ITRF96VEL、ITRF97VEL 和 ITRF2000VEL，反映现今运动特征，但受精度和台站数量的限制以及存在整体性旋转等问题。

朱文耀、符养等(2003)针对 ITRF2000 相对于 NNR-NUVEL-1A 地质模型的整体旋转问题，结合实测速度场与地质板块模型，导出了产生 ITRF 地球协议参考架的无整体旋转的条件，建立了新的无整体旋转的全球板块运动模型 NNR-ITRF2000 VEL。

欧拉定理是现代板块运动定量描述的基本定理。如果把板块看成刚性的，把地球看成球体，球心看成强制在地球表面上运动的刚体板块运动的固定点，则地壳运动满足欧拉定理。空间大地测量方法建立现代板块运动模型正是通过测定地球表面上的测站速度 V，按照式(6.2)计算出板块的旋转参数。

在地心坐标系中，如果一个板块的绝对欧拉矢量为 $\Omega(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$，则该板块上矢径为

$r(x,y,z)$的某点 G 的运动速度 $V_G(V_x,V_y,V_z)$ 可表示为

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{6.29}$$

若把地球近似为球体,设该点经、纬度分别为 λ 和 φ,则上式可变为

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} 0 & r\sin\varphi & -r\cos\varphi\sin\lambda \\ -r\sin\varphi & 0 & r\cos\varphi\cos\lambda \\ r\cos\varphi\sin\lambda & -r\cos\varphi\cos\lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{6.30}$$

在式(6.29)和式(3.30)中,V_x,V_y,V_z 为地心参考系中的运动速度,若已知该点在站心参考系中的经向速度 V_e、纬向速度 V_n 和垂直方向上的速度 V_u,则可把 V_x、V_y、V_z 转换为 V_e、V_n、V_u:

$$\begin{bmatrix} V_e \\ V_n \\ V_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}_G \tag{6.31}$$

将式(6.30)代入式(6.31),若不考虑 V_u,则得到

$$\begin{bmatrix} V_e \\ V_n \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} -r\cos\lambda\sin\varphi & -r\sin\lambda\sin\varphi & r\cos\varphi \\ r\sin\lambda & -r\cos\lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{6.32}$$

式(6.30)或式(6.32)可确定板块的旋转参数分量 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$,从而欧拉矢量三参数为

$$\begin{cases} |\omega| = (\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)^{1/2} \\ \Phi = \arcsin(\omega_z/\omega) \\ \Lambda = \arctan(\omega_y/\omega_x) \end{cases} \tag{6.33}$$

式(6.30)或式(6.32)也可用来确定地壳上刚性块体的旋转运动模型。NNR-ITRF2000VEL 模型的具体确定可参考朱文耀、符养等的成果(2003)。

§6.4 板块运动的驱动力(傅容珊等,2001)

板块运动驱动力问题一直是悬而未决的问题。远在大陆漂移学说刚刚问世时这一问题就被提了出来。当时 Wegener 假定硅铝层的大陆漂浮在硅镁层之上,并认为是地球旋转得不均匀使得大陆发生漂移。但是,Jeffereys 用理论计算又证明旋转不均匀产生的力根本无法推动大陆漂移,因为硅镁层和硅铝层之间的摩擦力太大。后来以 Holmes 为首的地幔对流假说为大陆漂移提供了有力的力学基础。

有关板块驱动机制讨论有三个观测上和理论上的问题:

(1)这一机制是否可以提供板块运动的机械能的消耗,如地震释放的能量,地幔粘滞耗散的能量等?

(2)是否可以解释板块内部和边界上的应力分布?

(3)是否可以提供一个运动的模式,而这一模式将由海底扩张来验证?

现代关于板块运动驱动力的研究集中在两个方面:板块构造本身和热对流的研究,即板块主动驱动其自身运动论和地幔对流驱动运动论。

在此首先就板块构造本身驱动板块运动的研究作一讨论。

许多研究认为运动板块的本身对板块运动驱动起着主导的作用，因此首先对作用在板块上的力进行分析（图 6.12）。

有两个主要的驱动力：

（1）F_{SP}（slab pull force） 俯冲板块产生的拉力。当冷的板块俯冲到热的地幔中时，由于与热传导作用相比俯冲的速度很快，很难和周围地幔热交换，使得这一俯冲过程可以近似地看做为一绝热自压缩过程。研究表明，这一过程中下冲板块内部的绝热自压温度梯度小于周围地幔的介质温度梯度，因而与周围的地幔介质相比，下冲的板块内部仍保持低温和高密度状态，由此产生所谓的重力负浮力，这一力拖曳着板块继续运动和俯冲。这一过程犹如我们将一根链条放在桌子上，链条不断向下运动一样，而这根链条在某种程度上可以比拟运动俯冲的板块。

（2）F_{RP}（ridge push force） 洋中脊的推力。大洋中脊的地形产生了一种推动板块向前运动的推力，称重力滑移力，根据计算，这一力足以推动板块运动。

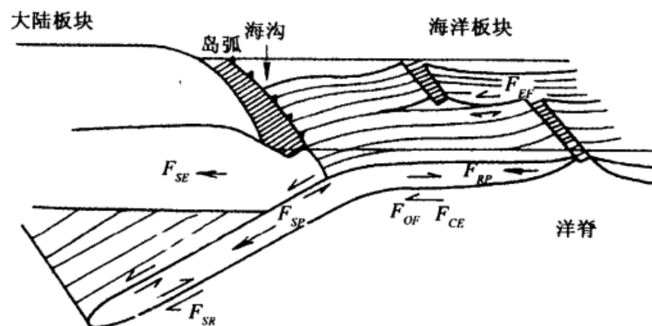


图 6.12 作用在岩石层板块上的力（根据拉姆贝克，1995；引自傅容珊等，2001）

除此之外，还有其他驱动力：

（1）F_{TC} （thermal constriction force） 热拉张应力。大洋中脊两侧洋底两边岩石层板块在向两侧扩张的过程中不断冷却，因而在距离大洋中脊不同的地方产生温度差异，如此而形成热拉张应力。

（2）F_{SU}（suction force） 消减吸力。该力作用在消减带。由于俯冲板块向下运动而形成物质的空隙，由此产生吸力。吸力将使板块向消减方向运动，比如它导致美洲板块和欧亚板块向海沟方向移动。

阻止板块运动的力（图 6.13）有：

（1）F_{SR} （slab resistance force） 俯冲板块所受的阻力。

（2）F_{CR} （collision resistance force） 大陆碰撞阻力。

（3）F_{TF} （transform fault resistance force） 转换断层阻力。

（4）F_{OF} （drag force from mantle） 海洋板块底部地幔拖曳力。

（5）F_{CF} 大陆板块底部地幔拖曳力。

有关来自地幔的拖曳力的问题是最难回答和最有争议的问题。通常，板块自身驱动其运动论认为，地幔拖曳力作为阻力存在而阻止板块运动或平衡推动力，但地幔对流推动论则将此力视为推动板块运动的主要驱动力。

板块主动驱动其运动的物理模型假定:每一个板块处于动力学平衡状态,也就是它的惯性或加速度项可以忽略不计。在这种情况下(即板块无加速度的情况下),所有板块对于通过地心轴转动的力矩之和等于零,因此可用以评估所有的驱动力中各项力所占的相对重要性。Forsyth(1976)假定所有板块处于平衡状态,因而对于12个板块而言,每个板块上有三个转动分量,将上面讲的各种力沿实际边界或面积积分,然后用力矩的形式表示出来。假定每个板块上所作用的每一种力有相同的强度系数,这样就可以获得含有9个未知数的36个方程,最后由最小二乘法求解而得出与现代板块运动模型最佳拟合的力的分配系数模型。计算结果发现:

(1)作用在下冲板块上的力控制了海洋板块的速度,其产生的速度绝对值比别的力大约大一个数量级。

(2)控制板块下冲的力为重力负浮力,它和下冲板块所受到的阻力差不多平衡。

(3)作用在板块底部的地幔拖曳力阻止板块运动,同时作用在大陆下的地幔拖曳力比作用在海洋板块下的拖曳力大。

(4)作用在消减板块上的摩擦力对平衡推动力起了主导作用。

Haper(1990)提出了一个新的模型,模型的拟合均方根误差仅有1.1%,而Forsyth的误差为4.2%。在Haper的模型中不仅包括了上述力矩平衡,还包括了岩石层对于深部地幔的净转动产生的力矩的平衡。他得出,对某些板块而言,大洋中脊的重力滑移力将在推动其运动中起主导作用。遗憾的是他们的工作首先假定了下伏地幔被动地起着阻止板块运动的作用,因而也很容易得出上述结论。

事实上我们也可以假定下部地幔起推动的作用,也许可以得出另外一种结论。最为关键的是这些被主动运动观点称之为主要运动的力必须是在形成中脊和俯冲带之后才能存在的,那么,在此之前是由什么样的力驱动板块呢?这也许落入了鸡和蛋谁为先之争的古老的怪圈。

地幔热对流理论将地幔热对流作为板块运动的驱动力,或认为板块运动是地幔对流的组成部分。地幔热对流理论认为:地幔是由内部的放射性热源产生的热量和由来自地核的热量加热而形成的热对流,板块不过是对流系统中的一个热边界层。根据这一理论,板块运动则是被动运动的,它是由地幔对流推动着运动的。有的研究者则希望建立联系以上两种驱动力的桥梁。

不过从动力学的观念来看,地幔对流和板块运动应当是地幔中统一的热动力学过程。我们必须承认这样一个事实,即刚性板块的存在,产生新的大洋岩石层的洋中脊的存在,海洋岩石层消亡的海沟的存在,一个有放射性热源分布的相对而言较为柔软的地幔的存在。因而,作用于俯冲板块上的负浮力既驱动板块自身的运动,又可能是驱动地幔对流的力学机制。刚性板块的运动并不直接地等于下部地幔对流的模式,它是运动着的刚性岩石层和对流的地幔相互作用和调节的结果,它既受地幔对流的影响又受板块之间的边界条件所制约。同时,地幔中放射性元素的衰变为地幔对流和板块运动提供了能源,而地幔对流又为地球内部热输运和地幔中温度分布保持长时期相对稳定起着调节的作用。

§6.5 活动地块假说

板块学说的建立为沿板块边界发生的地震找到了合理的解释。依据板块学说所提出的地震空区、特征地震和强震重复周期等理论,不仅为几次板缘地震在一定程度上的预测提供了指

导,也成为国际上现有地震预测理论的基础。然而,这种理论在用于分析大陆地震时却遇到了困难,其原因是由于大陆与海洋板块在结构、性质、演化历史、变形、地震活动、动力机制等方面都有根本的差别。在吸收和继承前人科学工作和科学积累(如张文佑的断块说,张伯声的波浪状块体镶嵌说,丁国瑜关于板块、亚板块、地块层次思想等)的基础上,从中国大陆地震的特点出发,马宗晋、张国民、张培震等(1999)提出了活动地块假说,用于描述中国大陆现今构造变形的特征和机制,探索大陆强震的发生机理和预测方法。在讨论活动块体假说前,我们首先介绍断块构造理论、活动亚板块、构造块体等概念。

6.5.1 断块构造学说

断块构造学说是由我国地质学家张文佑先生提出的。

简单地说,断块就是为断裂所围限的块体。直观地看,在中国大陆内,有菱形的塔里木盆地,矩形的鄂尔多斯黄土高原,斜方形的四川中生代红色盆地,三角形的松潘甘孜三叠纪地槽区,近于平行四边形的西藏高原等。所有这些单元都是被各种类型的断裂系统切割限定的深部断块的地表表现形式。岩石圈的各壳层都是由许多不同大小、不同形状、不同性质及不同年龄的断块拼合而成的。

地球沿着垂向可分为若干壳层,各壳层间的滑动面称层间滑动断裂,这些壳层沿着横向又被不同深度的断裂所分割。这两种断裂的结合所限定的地质构造单元就是断块。因而断块依其边界断裂的深度亦可分为相应的四类,即:为岩石圈断裂所围限的块体称岩石圈断块,为地壳断裂所围限的块体称地壳断裂,为基底断裂所围限的块体称基底断块,为盖层断裂所围限的块体称盖层断块。在岩石圈断块内部被各种地壳断裂所切割的块体就是地壳断块,或者说,岩石圈断块是由若干地壳断块拼合而成的。同样,在地壳断块内部又可分出基底断块,或者说地壳断块是由若干基底断块拼合而成的;在基底断块内部又可分出盖层断块,或者说基底断块是由若干盖层断块拼合而成的。从断块学说角度来看,"板块"是最大一级的断块即岩石圈断块,是被岩石圈断裂所围限的块体。

因此,断块学说与板块学说的一大区别是:断块是有厚度的。岩石圈断块以上地幔软流圈顶面为底界,在上地幔软流圈上发生水平滑动,大陆地区岩石圈厚度150km左右,大洋地区岩石圈厚度80km左右;地壳断块以莫霍面为底界,在莫霍面上发生水平滑动,大陆地区地壳厚度40km左右,大洋地区厚度小于15km;基底断块则以康拉德面为底界,在康拉德面上发生水平滑动,大陆地区花岗岩质层的厚度20km左右;盖层断块则以基底顶面为底界,在基底顶面上发生水平滑动,厚度更薄且各处不一,大陆地区盖层厚度可由几公里到十余公里,大洋地区的沉积盖层则要薄得多,仅0.5km左右。板块学说明确提出了板块是在上地幔软流圈上发生水平漂移的。20世纪70年代初期全球的岩石圈板块只有6个,之后发展到20多个,随着研究的深入,板块也越划越小,越分越细,板块复合体(collage)、超板块(super plate)、巨板块(mega plate)、次板块(sub plate)和微板块(micro plate)等概念也应运而生。这些大小不一、等级不同的板块都在软流圈上漂移吗?把板块细分,从而逐渐突破板块的刚体性和均一性的框架,这无疑是一种进步。但是,断块学说认为:如只考虑横向上的分级而忽略了垂向上的厚度和分层性,只注意在上地幔软流圈上发生的漂移而忽视了岩石圈各壳层之间发生滑移的可能性,是不能最终解决板块构造的运动学和动力学问题的。

岩石圈断块、地壳断块、基底断块和盖层断块都由许多波速不同、岩性不同、形状不同的薄层组成,这些薄层之间又均可发生层间滑动。因而这四种一级断块又可细分出若干次一级断

块，可暂名为次岩石圈断块、次地壳断块、次基底断块和次盖层断块，等等。

断块的活动方式主要有拉张、挤压、断隆、断陷、抬斜和掀斜。

断块的拉张或挤压活动，在大多数情况下都表现为剪切—拉张或剪切—挤压。拉张与挤压是对立统一的。对一个区域而言，一个时期表现为拉张，则另一个时期必表现为挤压，只是经历的时间长短不同罢了。对一个地史阶段而言，一个地区遭受拉张，其相邻地区必遭受挤压，只是看何者为主罢了。在总体的拉张阶段中可以有相对的稳定阶段和局部的暂时的挤压发生，或者说，剧烈的裂开或拉张实际上只集中发生在一个漫长拉张阶段内相对短暂的几个作用期内。

空间上的拉张—挤压关系亦如此。即：在一个整体的拉张区域内，可以有局部地区的挤压发生，而在一个整体的挤压区域内，却可有局部地区的拉张发生。

断块运动还常表现为断隆、断陷、抬斜和掀斜，它们一般不伴随褶皱变形，构造层与构造层之间也常不以角度不整合面为界。

关于断块构造运动的驱动力源涉及的是断块的动力学问题。任何一种大地构造假说，要在理论上站住脚，必须合理地解释驱动力来源问题，断块学说当然也不例外。科学在今天所积累的事实，还不足以使我们彻底解决这个问题。目前从现有的地质事实出发，所作一些初步的定性解释认为，断块的水平运动可能源于下列因素（张文佑，1984）：

（1）离极力（pole-fleeting force）。假定地球本质上为一粘滞性的变形体，地壳任何部分的密度均比地幔小并漂移其上，那么，由于地球的转动而产生的力使漂浮块体向赤道推移，此力即为离极力。

（2）科里奥利力（Coriolis Force）。如果质点对地球有相对运动，且令单位矢量 $\boldsymbol{I}$ 沿 $\overrightarrow{BA}$，单位矢量 $\boldsymbol{K}$ 平行地轴 $\overrightarrow{SN}$，另一组单位矢量 i、j、k 固定在地球表面上且分别水平向南，水平向东和竖直向上（图 6.13），则 x、y、z 三个方向上的运动方程为

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + 2m\Omega\dot{y}\sin\varphi \\ m\ddot{y} &= Y - 2m\Omega(\dot{x}\sin\varphi + \dot{z}\cos\varphi) \\ m\ddot{z} &= Z - mg + 2m\Omega\dot{y}\cos\varphi \end{aligned} \tag{6.34}$$

式中：Ω 为地球角速度，g 为重力加速度，m 为质点的质量，φ 为该质点的地理纬度。从式（6.34）可以看到，北半球的物体如自北向南运动（$\boldsymbol{i}$ 方向），则相对于地面有一个向西（$-\boldsymbol{j}$ 方向）的作用力，这个力就是科里奥利力，其大小为

$$f_K = 2m\dot{x}\Omega\sin\varphi \tag{6.35}$$

（3）“旋转速度不均一效应”。天文学的观测告诉我们，像太阳或木星这些流体状态的星球，它的赤道部分的自转速度比高纬度部分的自转速度要大，可称“旋转速度不均一效应”。一般认为，地球是固态的，不能像太阳和木星那样作流体旋扭。但是，我们不应忘记地球的外地核是流体的，地球上地幔的低速层在长期力作用下也表现出塑性。在这些圈层内，如果旋转速度不均一效应存在，那么将会对这些圈层内外的固体圈层起摩擦作用，而影响到固体圈层的运动。

（4）地球自转速率的变化。李四光曾提出，由于地球自转速率变化可引起岩石圈与水圈间相对扁率的变化，可引起全球应力场并控制海侵海退和全球性巨型构造带的分布。王仁、何国琦和王永法据地壳松弛时间长于 $10^8 \sim 10^{10}$ 年的估计，用简单的线性流变体缓变模型在轴对称情况下进行分析。分析结果表明，如果自转速率在 $10^6 \sim 10^7$ 年的长时期内有单方向变化，则由离心惯性力的变化就可在地壳中积累起 980Pa/cm^2 量级的东西向和南北向正应力，从而

认为推动全球构造运动的可能性是存在的(图6.14)。

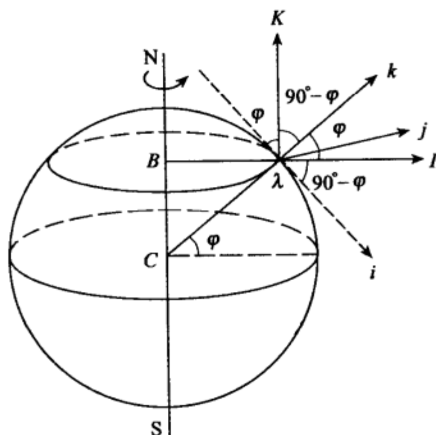


图6.13 科里奥利力

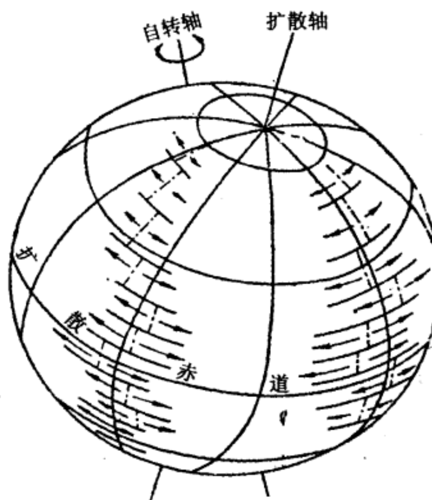


图6.14 大洋中脊上转换断层各小段扩展速度的变化(据J. R. Heirtzler)

断块学说强调深入研究断裂发生发展的历史及其在深度和广度上的变化,认为板块不是"铁板一块",而是由形形色色的次级断块拼合而成的,板块也不是只传递应力的刚体而是在其内部尤其在各次级断块的边界上还有复杂的应力应变情况,因而,在对于块缘和块内的应力场分析和形成机制的探讨上,不仅要分析块缘与块缘间应力场的不同,还要特别注意块内由于层间滑动和内部形变引起的应力场变化。

张文佑等认为,板块构造是活动论学派在当代的一个代表学说。板块学说的提出,无疑是近代地球科学的突出成就和巨大进步。但是,由于板块学说的研究区域侧重于海洋,研究方法偏重于地球物理,兼之许多板块构造论者对大陆地质构造的研究了解不够,未能充分地运用断块学说的已有成果,以致对某些地质问题作了过于简单的处理。

6.5.2 活动亚板块

活动亚板块与构造块体是在新构造时期至今仍在活动着的构造单元,不单纯是由断裂围限的断块,也不单纯是小板块。这里采用的亚板块一词,具有多重含义:一方面它对其所处的板块来说是次一级的,另一方面还有近似的涵义,并非大板块的单纯划小,因为它未必具有大板块的那些属性和条件。亚板块的变形不仅限于边缘,其内部也经历构造过程,所以还可以进一步划分出构造块体或简称块体。总之,它们都是具有构造活动统一性的构造实体。有人曾建议使用构造域一词,以示它们彼此间的不同(丁国瑜等,1991)。

据上述,划分亚板块的主要依据如下:

(1)能够反映深部过程的活动构造带。断裂作用是大陆岩石圈变形的主要形式之一,特别是深断裂更具有重要的意义。裂陷盆地(特别是大陆裂谷)是岩石圈变形和深部活动的敏感指示计,所以我国的亚板块之间往往是以深的活动断裂带及活动地堑系和裂谷系为边界的。

(2)地震活动带(特别是强震带)是划分板块、亚板块和块体边界的主要依据之一。

(3)地球物理场的变异带(如地壳、岩石圈厚度的突变带,航磁异常带,重力梯度带)等都反映沿此带有深部构造上的变异。

(4)亚板块内部构造活动的统一性。

至于构造块体的划分也可根据类似的原则,但它们对其所属的亚板块具有从属性。

按上述划分依据,将我国及邻区划分为8个活动亚板块和它们各自的内部活动构造块体,共计17个,如图6.15,它们是(丁国瑜等,1991):

Ⅰ. 黑龙江亚板块

$Ⅰ_1$长白块体

$Ⅰ_2$松辽兴安块体

Ⅱ. 华北亚板块

$Ⅱ_1$胶东—苏北—南黄海块体

$Ⅱ_2$河淮块体

$Ⅱ_3$鄂尔多斯块体

Ⅲ. 南华亚板块

$Ⅲ_1$华南—东海块体

$Ⅲ_2$台湾块体

Ⅳ. 南海亚板块

Ⅴ. 蒙古亚板块

Ⅵ. 新疆亚板块

$Ⅵ_1$准噶尔块体

$Ⅵ_2$天山块体

$Ⅵ_3$塔里木块体

$Ⅵ_4$阿拉善块体

$Ⅵ_5$费尔干纳块体

Ⅶ. 青—藏亚板块

$Ⅶ_1$甘—青块体

$Ⅶ_2$西藏块体

$Ⅶ_3$川—滇块体

$Ⅶ_4$喜马拉雅块体

$Ⅶ_5$帕米尔块体

$Ⅶ_6$塔吉克块体

Ⅷ. 东南亚亚板块

蒙古亚板块、东南亚亚板块和青藏亚板块中的帕米尔块体、塔吉克块体,新疆亚板块中的费尔干纳块体的主要部分已位于国外。

利用对晚第三纪以来的活动断裂积累的丰富资料,为探讨我国大陆内部各个块体的相对运动和总的变形情况提供了重要的基础(丁国瑜,1982)。我国主要的活动断裂多数是继承性地分布于一些刚性或准刚性块体和巨型褶皱带的边缘,是板内的主要活动边界。活断裂两盘的相对运动是在三维空间里进行的。为了直观地反映新构造期(尤其是近几万年来)块体水平相对运动状况,可以采用断裂两盘在水平面上相对运动的平均速率矢量(即两盘相对滑动的平均速率矢量)的水平投影值(V)来表示

$$V = V_1 + V_2 \tag{6.36}$$

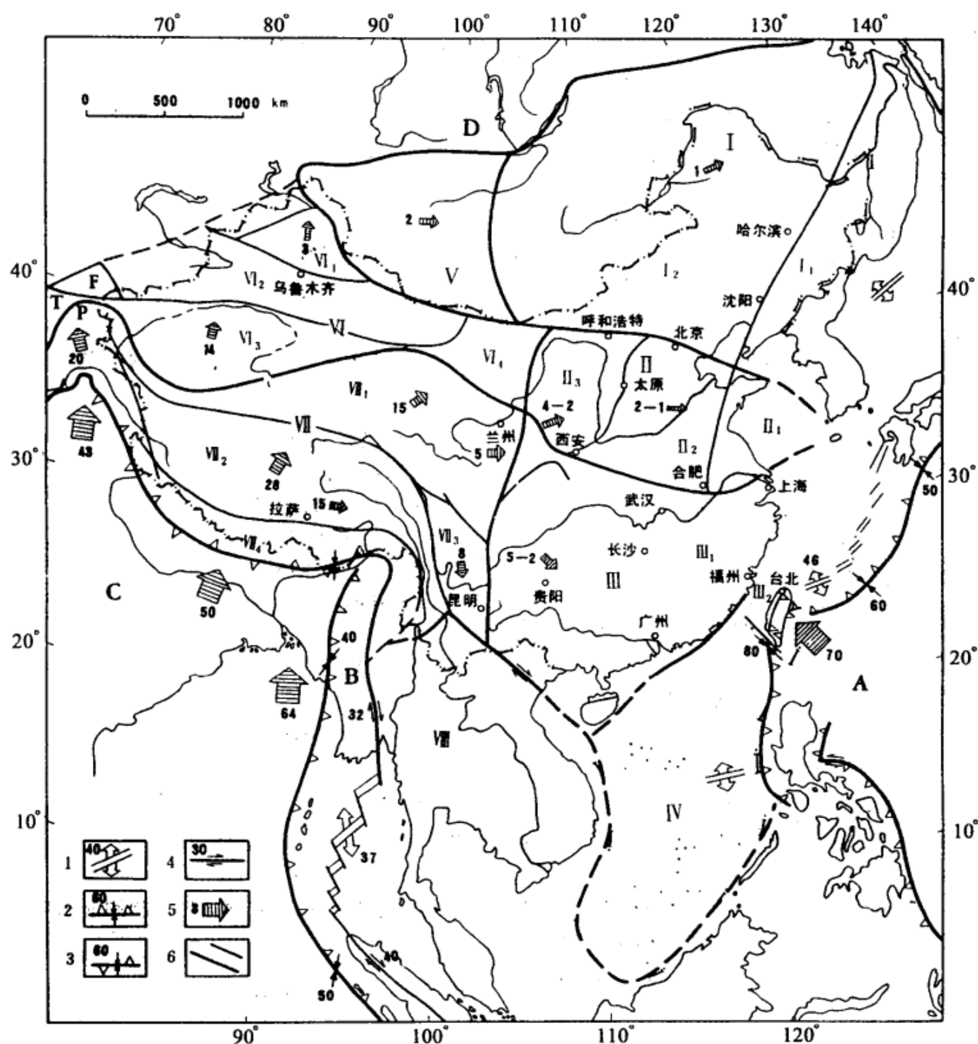
这里 V_1 和 V_2 分别为平行于和垂直于断裂线的平均滑动速率矢量。它们的量值关系为:

$$\left.\begin{aligned} |V| &= \left|\sqrt{V_1^2 + V_2^2}\right| \\ V_1 &= u_1/t \\ V_2 &= u_2/t = h \cdot \cot\alpha/t \\ \theta &= \arctan V_2/V_1 \end{aligned}\right\} \tag{6.37}$$

式中:u_1 和 u_2 分别表示为 t 时间里平行于和垂直于断层线的总错距,h 为 t 时间内两盘铅垂落差(即两盘差异性升降幅度),α 为断裂面倾角,θ 为水平面内断裂两盘错动方向与断层线的夹角。

确定我国西部各亚板块与块体相对欧亚板块的运动矢量,采用以下原则和方法进行估算:

(1)各块体运动方向是根据各块体前缘新褶皱轴向和逆冲断裂走向来判定的,即块体运



1-4：活动板块相对运动方向及速率（mm/a）：1. 分离边界、扩张脊；2. 俯冲边界；3. 碰撞边界；4. 走滑转换边界；5. 板块的绝对运动和亚板块、块体相对欧亚板块（西伯利亚）的运动方向和速率（mm/a）；6. 亚板块、块体边界（A. 菲律宾板块 B. 缅甸板块 C. 印度板块 D. 欧亚板块）

（据《中国岩石圈动力学概论》，丁国瑜主编，1991）

图 6.15 中国及邻区活动板块、亚板块与块体划分

动总体方向与新褶皱轴或新逆冲断裂走向垂直。

（2）块体运动速率估算系数假定：

①印度板块以平均 50mm/a 的速率向北运动（Minster and Jordan，1978），推动我国西部各块体及褶皱带的变形和运动。

②各块体和褶皱带均为弹塑性体，但各有不同的刚度，具有传递力和速率的性能，并按图

6.16 模型传递，公式如下：

$$V_i = V_{i-1,i} - D_i/2$$
$$V_{i,i+1} = V_{i-1,i} - D_i \qquad (i = 1,2,3,\cdots,n) \tag{6.38}$$

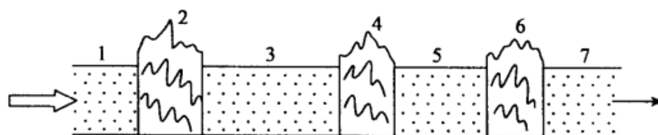


图 6.16

式中：V_i 为第 i 块体中部向前移动速率；D_i 为第 i 块体横向缩短速率；$V_{i-1,i}$ 和 $V_{i,i+1}$ 为第 i 块体后缘和前缘的移动速率。

当第 1 块体为印度板块时，$V_{1,2}$ = 50mm/a。

③若忽略各块体向前运动时其底部界面的摩擦，各块体横向缩短速率和向前运动速率的总和为 50mm/a。这样通过估算各块体（包括褶皱带）的横向缩短率就可按上式估算出各块体运动速率。若各块体压缩变形时忽略其体积变化，各块体横向缩短率可由下式作初步估算：

缩短速率 = 垂直形变速率 × 块体横向宽度/块体垂直厚度（地壳厚度）

这里垂直形变平均速率系根据上新世末夷平面平均上升速率、平均剥蚀速率和倒山根增长速率估算的。对于喜马拉雅山、昆仑山等，其平均剥蚀速率均为夷平面上升速率的 0.5～0.7倍；对于西藏高原、塔里木和柴达木等块体，则可忽略不计。由重力均衡产生的倒山根增长量一般为山体抬升量的 4.3 倍。但由于横向缩短使块体向下挤入的量可能要小得多，故这里初步设想块体向下的挤入量大致相当于向上的抬升量。

中国大陆主要活动断裂图如图 6.17 所示。

活动亚板块、构造块体的相对运动状况主要是利用了西部各块体和褶皱带晚第三纪夷平面变形抬升幅度及褶皱带两侧断裂逆冲速率的资料，来大体估算各个块体和褶皱带的缩短变形速率（即印度板块向北运动速率因块体变形而被吸收的部分）。所得结果列于图 6.18 上，其中各个块体的运动方向是根据新褶皱轴和活动逆冲断层走向的水平垂直方向的展布状况而确定的。

6.5.3 活动地块假说

中国大陆活动块体的假说主要包括：

（1）活动块体的学术定义和科学内涵，即活动块体是现今正在活动的岩石圈块体，亦即被大型第四纪活动构造分割和围限、具有相对统一运动方式的地质构造单元。块体内部构造活动相对稳定，块体边界活动强烈。因而，强震大多数都发生在活动块体的边界带上。

（2）活动块体的基本特点。活动块体具有新生性（亦即现今活动性）、层次性（即活动块体可分成不同级别，高层次块体可含有次级块体）、整体性（即块体自身具有运动的相对统一性和稳定性）、立体性（即活动块体具有纵向的深度结构，其底边界可能位于深部不同层位的拆离带或耦合带）。

（3）活动块体运动和相互作用的驱动机制。认为活动块体一方面受板块边界动力作用驱动，应力通过块体间相互作用（挤压、拉张、剪切或联合作用）而传导，从而驱动地块运动，同时

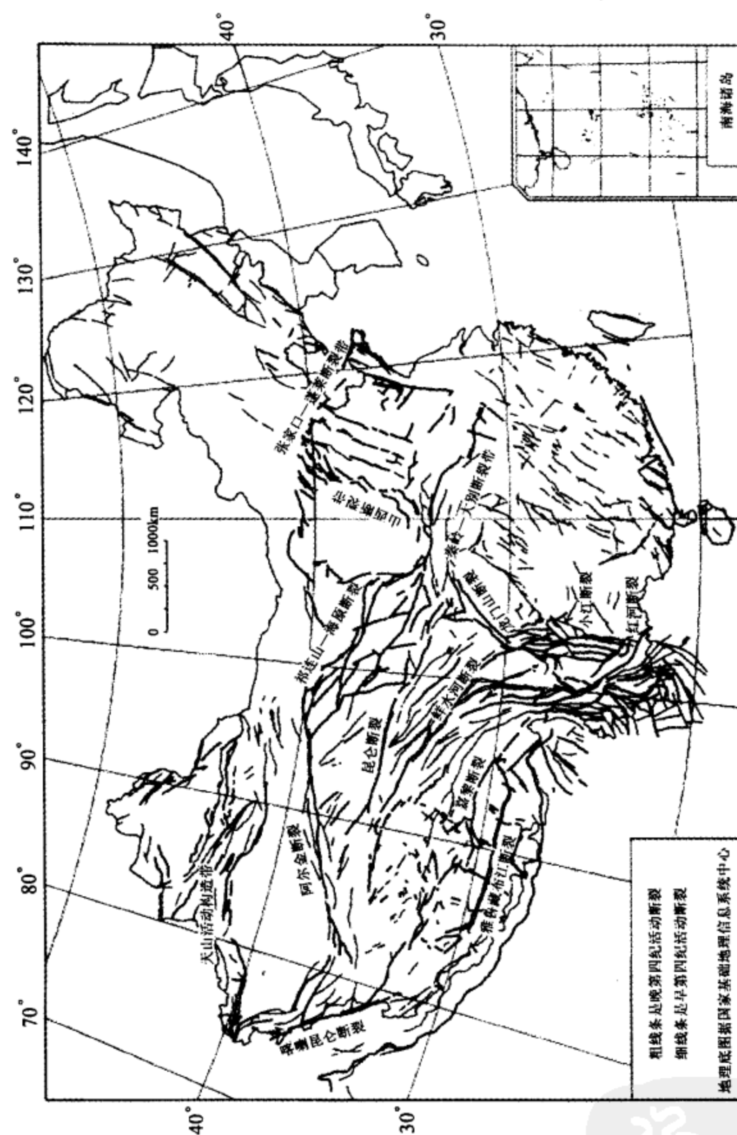
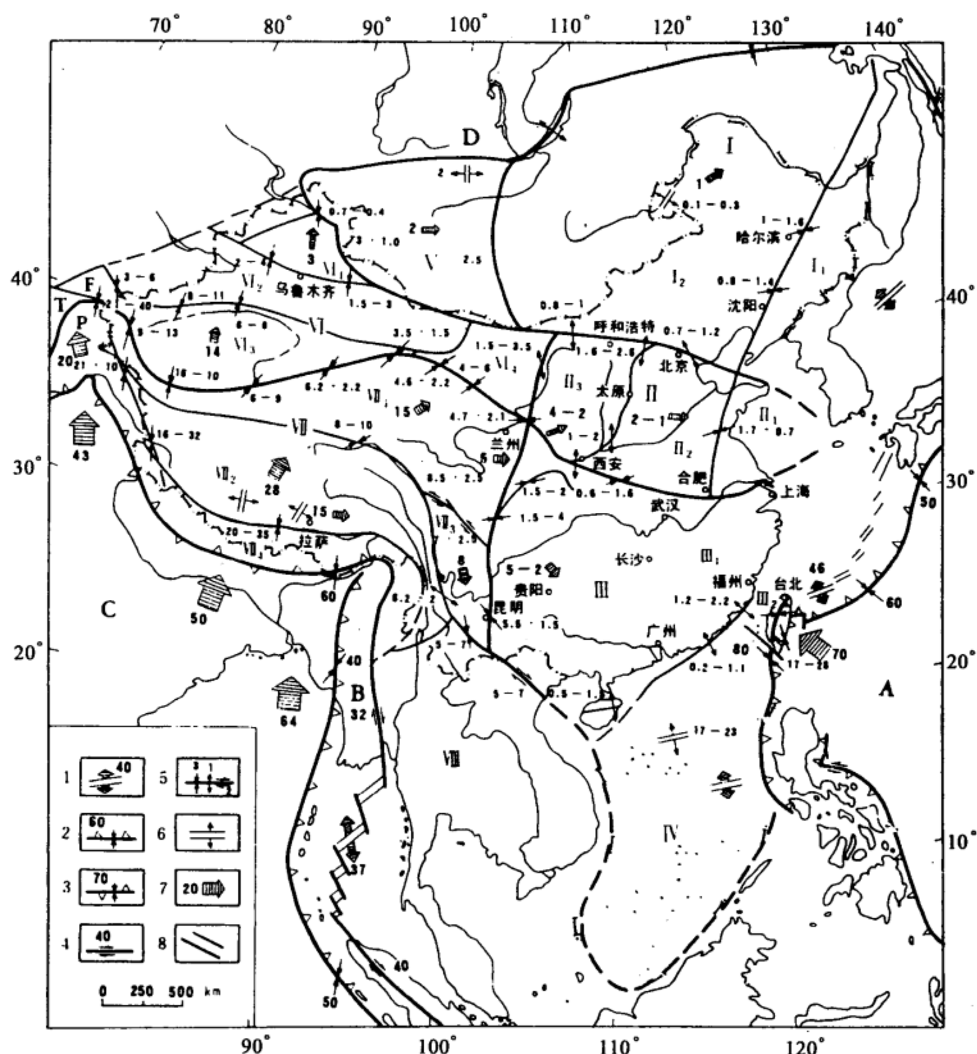


图 6.17　中国大陆主要活动断裂带图(据邓起东,张培震,2003)

还受深部动力作用。地块底边界受不同层次的拆离带或滑脱带的控制,下地壳和上地幔的粘塑性流变影响并驱动活动块体的相对运动。

上述 3 点也是中国大陆活动块体假说的 3 个主要科学问题。具体地说,活动地块是被形成于晚新生代、晚第四纪(10~12 万年)至现今强烈活动的构造带所分割和围限、具有相对统一运动方式的地质单元。

活动地块边界可以与地质历史上的块体相一致,也可以具有新生性,与老块体边界不一



1-4. 活动板块边界及其相对运动方向及速率(mm/a):1. 分离边界;2. 俯冲边界;3. 碰撞边界;4. 走滑边界;5. 亚板块块体边界断裂带相对滑动的平均速率和方向的水平投影;6. 板内地堑裂谷;7. 板块绝对运动和亚板块、块体相对欧亚板块(西伯利亚)的运动方向及速率(mm/a);8. 亚板块块体边界

(据《中国岩石圈动力学概论》,丁国瑜主编,1991)

图 6.18 中国及邻区活动板块、亚板块与块体的运动矢量

致。活动地块具有分级性,1 级地块内部可能存在次级地块,但不同地块之间或不同级别地块之间的构造变形在更大区域框架下具有协调性。活动地块边界带构造活动强烈,绝大多数强震都发生在边界的活动构造带上。地块内部的变形有两种形式:一种是相对稳定,不发生大幅度构造变形;另一种是内部次级块体之间发生相对运动,具有一定的构造活动性,但不论是其

活动强度还是频度都远小于边界活动构造带。活动地块的运动不仅受到板块边界的驱动作用,还可能受到深部动力作用,地块的底边界受不同层次的拆离带或滑脱带所控制,因深部动力作用不同,所表现在浅表的脆性构造变形和强震活动也不同。

与张文佑(1984)的断块构造学说和马杏垣(1989)、丁国瑜(1989)提出的活动亚板块、构造块体相比较,活动地块有如下特点:从时间尺度上是研究形成于晚新生代、晚第四纪强烈活动的地质构造,着重强调与未来强震活动密切相关的现今时段;从状态上是指现今仍在活动、并且与未来强震有关的块体运动及相关的构造变形(张国民等,1999)。

具体来说,活动地块具有以下4个特性(张国民等,1999):

(1)活动性。活动块体主要是指现今活动的地质单元。一些活动块体与地质历史上老的构造单元重合,构造变形沿不同时间形成的老的地块边界发生,反映了构造活动的继承性,如天山活动块体、鄂尔多斯活动块体等;另外一些活动块体与地质历史上形成的构造单元不同,地块边界带切割老的地块,反映了活动块体的新生性,如川滇菱形地块、青藏高原的东边界等。正是晚第四纪开始形成、至今仍活动着的这些活动块体间的相互作用和相对运动不断地刻画着今日的山川地貌,控制着强烈地震的发生。

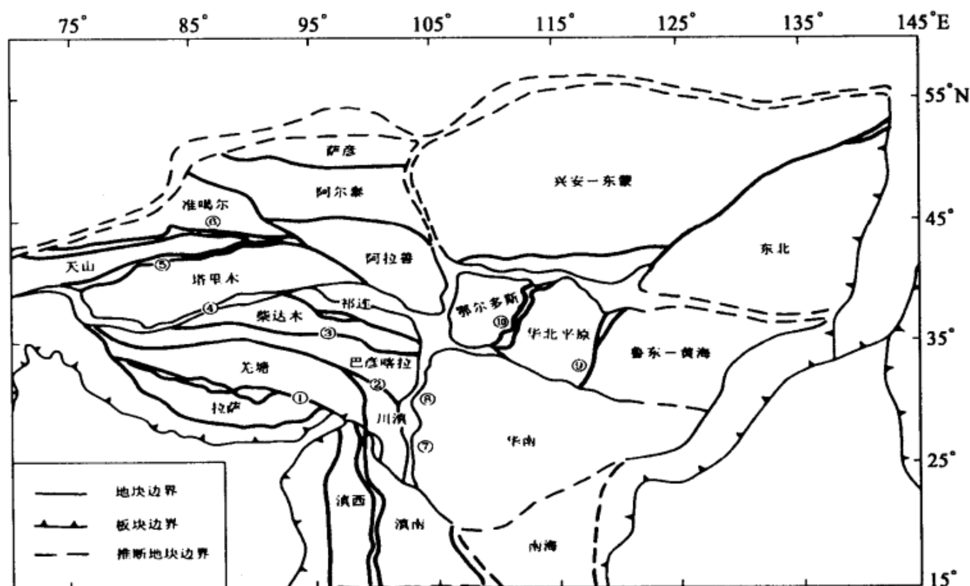
(2)整体性。一般地说,活动块体内部相对稳定,主要构造变形和强烈地震发生在活动块体的边界带上,地块的运动具有较好的整体性。但活动块体的内部变形可能有两种形式:一种是相对稳定、内部不发生大幅度构造变形,鄂尔多斯地块就是最典型的一例;另一种由于受各种局部因素影响,内部稳定性稍弱,地块内还可以划分出次级活动块体,次级块体发生一定程度的相对运动,并控制着一些中强地震的发生,但块体的活动强度和频度都小于边界活动构造带。例如川滇活动块体,虽然内部次级活动块体的边界带上也发生过一些历史强震,但不论地震数量和震级都不及边界带。

(3)层次性。活动块体具有不同的级别,大的活动块体可以由次级地块组成,也可以不包含次级地块。但从研究强震发生规律的角度上考虑,活动块体的级别划分不宜过多,尺度太小的活动块体在区域强震孕育系统中没有地震学意义。因而,从区域构造变形的一致性和成组强震孕育的系统性来看,中国大陆可能由三个层次的活动块体所组成,一级活动块体相当于青藏高原这一级别,二级活动块体相当于天山、鄂尔多斯这一级别。在一些二级活动块体中也许还可以进一步划分出更次一级的活动块体,如华北活动块体中可以划分出华北平原和太行山活动块体。8级以上的强震主要分布在一、二级活动块体的边界带上;7级以上地震除了受一、二级活动块体控制外,有些还与三级活动块体有关;5~6级地震除了发生在活动块体边界带上以外,还有一定的空间随机性。

(4)立体性。活动块体的运动和变形不仅受到板块边界的驱动作用,还受到来自大陆深部的动力作用,这是活动块体与板块构造的根本区别之一。地块侧边界的中上地壳部分以脆性变形为主,形成一系列逆冲、拉张、走滑、旋转等性质的活动构造带,地块之间沿这些构造带发生相互运动,并控制着地震的发生。下部地壳和上地幔以韧性变形和塑性流动为特征,从底部驱动上部地壳的脆性变形,控制着活动块体的运动方式和变形特性。活动块体的底边界可能位于深部不同层位的拆离带或解耦带,如脆-韧性转换带、壳内低速层、活动的壳幔过渡带、软流层等。活动块体底边界所处的深部位置、岩石圈内部各圈层之间的耦合和解耦程度可能决定着地块内部构造活动和地块的完整性。

活动块体划分的是以边界构造变形的新生性和局部性,以及内部构造变形的整体性和协调性为基本原则。由地面垂直和水平变形特征、地壳构造特征、地壳和上地幔的纵向分层结

构、速度、电性、磁性结构等多学科、多因子组成活动块体划分的综合判别标志。活动块体的划分主要由地震地质方法并结合现代大地测量方法进行。中国大陆及其邻区的活动地块可作两级划分：Ⅰ级为活动地块区（active crustal-block region）（简称地块区），Ⅱ级为活动地块（active crustal-block）（简称地块）。中国大陆及邻区可以划分出6个Ⅰ级活动地块区，它们是：青藏、西域、华南、滇缅、华北和东北。还可以进一步划分出拉萨、羌塘、巴颜喀拉、柴达木、祁连、川滇、滇西、滇南、塔里木、天山、准噶尔、萨彦、阿尔泰、阿拉善、中蒙、中朝、鄂尔多斯、燕山、华北平原、鲁东—黄海、华南、南海等22个Ⅱ级活动地块。地块的边界是几何构造各异、宽度变化不同的变形带或活动构造带（张培震等，2003）。图6.19显示出中国大陆及周边地区活动地块划分情况。



①黎嘉断裂带；②玉树-鲜水河断裂带；③东昆仑断裂带；④阿尔金断裂带；⑤南天山断裂带；⑥北天山断裂带；⑦安宁河-则木河断裂带；⑧龙门山断裂带；⑨郯庐断裂带；⑩山西断裂带

图6.19 中国大陆及周边地区活动地块划分图（据张培震等，2003，引自王辉等2003）

通过对主要活动块体边界断裂带晚第四纪滑动速率的研究，可以获取长期平均运动速率，通过GPS观测可以获取活动块体现今运动的高分辨速度场。研究表明，利用GPS观测到的中国大陆现今地壳运动速度场描述的主要活动块体的运动方式如下（张国民等，2003）：

GPS观测的运动矢量分布揭示了中国大陆相对于稳定的欧亚大陆（欧洲和西伯利亚部分）整体向东和向北运动的趋势，例如位于尼泊尔境内喜马拉雅活动块体上的GPS站显示，中国大陆相对于欧亚板块以向北运动为主，略具向东的分量，运动速率在35～42mm/a。

青藏高原南部拉萨活动块体的优势运动方向为NE 12°～30°，平均速率为25～30 mm/a。拉萨站和西部狮泉河站之间的东西向拉张速率为14.48 mm/a，大于Armi Jo等（1986）根据活动断裂研究获得的长期平均速率（10±5）mm/a，小于Molnar和Lyon Caon（1988）根据20多年地震记录所获得的（18±9）mm/a东西向拉张速率。虽然GPS拉张速率只是根据几年的观测

数据,不一定能反映长期平均运动,但至少反映了东西向拉张速率可能在 10 ~ 18 mm/a 之间变化的事实。

羌塘地块和昆仑地块构成了青藏高原中部,仅有的 5 个 GPS 观测点均分布于羌塘地块。5 个测点显示出向 60°优势方向的运动,速率平均在(28.0 ±0.5)mm/a,运动方式显然与其以南的拉萨地块不同。昆仑地块以北的柴达木活动块体运动方向与羌塘地块没有太大的差别,但平均运动速度骤减到 12 ~ 14 mm/a。而再向北到祁连山活动块体,优势运动方向变为 70° ~ 90°,速度则减小为 14 ~7 mm/a。GPS 速度场清晰地揭示了青藏高原内部活动块体的不同运动方式。

天山活动块体是大陆内部典型的复活或再生造山带,在两侧稳定地块的挤压下缩短。GPS 观测结果显示,位于塔里木盆地的 ARAL 站相对于稳定西伯利亚的运动速度为(20.67 ± 2.02)mm /a;北部的位于南天山山前褶皱带内的 KEZI 站点的速度为(17.28 ± 1.8)mm/a;位于天山山体内部山间盆地的 NANA 站点的速度只有(10.25 ± 1.97)mm/a;跨过北天山褶皱带之后,准噶尔地块上的 KYUT 站的运动速度为(11.9 ± 1.89)mm/a,天山在这一纬度上的地壳缩短速率约为 8.8mm/a。

川滇活动块体位于青藏高原的东南隅,即川滇菱形块体,是中国大陆地震活动最强烈的地区之一。GPS 观测显示该块体的运动具有两个特点:

(1)川滇活动块体上的 GPS 观测点位移矢量主要表现为向 SE150° ~ 160°方向的运动,在北部的鲜水河一带运动方向为 SE120°左右,而到南部的昆明一带方向变为 SE165°,既反映了鲜水河—小江断裂的左旋走滑运动,又反映了川滇菱形地块向南南东方向的总体运动和顺时针旋转。King et al. (1997)获得了同样的结果。

(2)地块的变形确实是不均匀的,小箐河断裂以西 GPS 站点的运动速度平均为 19 mm/a 左右,而以东站点的平均运动速度只有 13 ~ 14 mm/a。

鄂尔多斯活动块体位于中国中北部,除西南角受青藏高原东北边缘的强烈挤压作用外,其他各边均被断陷盆地带所围限。鄂尔多斯地块内部构造活动微弱,没有发育大规模的活动断层。GPS 观测结果表明,地块周边盆地带的运动比较复杂,西边界向北北东方向运动,北边界向东运动,东边界和南边界总体上向南东东方向运动。

华北活动块体在新生代早期遭受强烈的拉张和裂陷作用,形成了一系列北北东走向的正断裂和地垒地堑;上新世以来华北活动块体停止了裂陷作用,华北平原开始整体下沉,并在北北东向正断层的基础上形成右旋走滑断裂。但 GPS 观测结果显示,整个华北活动块体正在经历着 SEE 方向的拉张作用,除山西断陷带具有比较明显的拉张位移和张家口—渤海断裂带有明显左旋走滑位移外,横跨其他主要活动断裂和地震带都没有明显位移。

华南和东南沿海地区在新构造运动上属于比较稳定的地块,内部不发育明显的活动断裂和褶皱,地震活动性与华北和西部比相对较弱,惟东南沿海发育一些晚更新世活动断裂和地震。GPS 观测结果显示,华南和东南沿海整体向东和南南东方向的运动,其中东部的上海向东运动速率为 9.45 mm/a,与甚长基线干涉(VLBI)的结果和 Shen et al. (2000)对华北地区 GPS 的研究结果基本一致。

活动地块与强震发生有内在的关系。中国大陆绝大部分 7 级以上地震都发生在活动地块边界的事实表明,地块的运动和地块间的相互作用是地震孕育和发生的直接控制因素。地震过程包含着两个相互关联的根本环节,即构造背景和孕震环境。构造背景实际上是指地震发生所需能量的大尺度动力学背景,包括板块边界驱动力、地幔或软流圈对上部脆性岩石圈的拖

曳力、应变的传递,以及岩石圈不同层次之间与不同活动地块之间的相互作用等。孕震环境是指强震发生的局部条件,它取决于地震发生所在地段的介质物性特点、构造活动习性、应变积累程度、地震复发规律等条件。地震实际上是在构造背景所提供的区域构造应力作用下,应变在变形非连续地段的不断积累并达到极限状态后而突发失稳破裂的结果。因而,强震往往发生在非连续构造变形最强烈的地方,这些地方就是切割地壳表层的断裂系统。特别是构成活动地块边界的断裂带,由于其切割地壳深度大,所以非连续性更强,更有利于应变的高度积累而孕育大地震。这可能就是为什么绝大部分强震发生在活动地块边界带的重要原因。

大陆构造变形与海洋板块的构造变形有着本质的区别,大陆上地壳以脆性变形为主,一系列活动褶皱和断裂带把上地壳切割成不同级别的活动地块,下地壳和上地幔则以韧性变形和塑性流动为特征从底部驱动上部地壳变形。活动地块的运动和变形不仅受到板块边界的驱动作用,还受到深部的动力作用,中上地壳可能与下地壳和上地幔通过不同类型的拆离带或滑脱带解耦,但下部的韧性变形和塑性流动仍然通过不同的方式作用于上部的脆性活动地块,影响着上部活动地块的运动和变形。地块的侧边界和底边界因深部结构不同和动力作用的不同而具有不同的活动习性。地块侧边界的中上地壳部分以脆性变形为主,形成一系列逆冲、拉张、走滑和旋转等性质的活动构造带,地块之间沿这些构造带发生相互运动,导致应变在这些活动地块边界活动构造带上的积累和释放,控制着强震的发生。

活动块体假说,主要用于描述中国大陆现今构造变形的特征和机制,探索大陆强震的发生机理和预测方法,对它的研究还需要进一步深入。

§6.6 活动地块的大地测量划分方法

通常用构造块体相对运动的运动学参数来描述大尺度的地壳运动,高精度的 GPS 测量是获取这种运动信息的重要手段。现代观测结果证明,作为一级近似,板块或板内的主要构造块体可以看做是刚体或均匀变形体。变形主要发生在板块或主要构造单元的边界带上,主要表现为构造块体的相对位移(错动和转动)和强烈的剪切变形。因此,位于同一构造块体内的各观测点间的相对位置将发生变化。因此,通过定期复测位于地球表面各观测点间的相对位置,根据这些相对位置的变化,以及这些观测点所处的构造位置,就可以得出所需的运动信息。这里包含了两个条件:一是从观测结果获取点位变化信息,二是必须知道这些观测点所处的构造位置。只要保持两次测量之间坐标参数的一致性,前一个条件很容易实现。第二个条件通常通过实地考察和许多地质学和地球物理学的方法来满足,但这类方法至少存在两方面的缺陷:一方面在时间尺度上显得与构造活动的需要不相适应;另一方面,在空间域上,一些地表观测点究竟处于哪一个构造单元上并不总是可以清楚区分的。另外,位于同一构造单元上的某些可能受到局部干扰的观测点必须剔除出去。因此,直接用观测来验证或判别处于同一块体上的观测点是必要的。这种根据直接大地测量观测结果判别一组点是否属于同一构造单元的方法,可以用来划分活动地块。通常被判别属于同一构造单元的一组点称作相对稳定点组,这组点是被认为不包含“不合群”位移观测点的所有其他点的集合。相对稳定点组也可以认为是相对不动的点组,或者说是一组几何关系不变的点组。而用这种方法确定的相对稳定点组来划分地块的方法称活动地块的大地测量划分方法。相对稳定点组确定的方法主要有构造位置的统计检验法、粗差的拟准检定法以及均匀应变分析法。

6.6.1 相对稳定点组确定的构造位置的统计检验法

该方法由黄立人等提出(黄立人,2002),主要应用方差分析理论,基于有约束和无约束平差的统计特征,给出一种根据复测结果判别一组测站是否位于同一构造块体上的假设检验方法。

把地球表面简化为一个具有单位半径的球,而将块体在球面上的运动用一个转动向量 $\boldsymbol{\Omega}$ 来描述(如图6.9),把这个转动向量分解成绕三个坐标轴 x、y、z 转动的分量 ω_x、ω_y、ω_z 来表示。因为地球上的构造单元的转动量一般为微小量,略去二次和三次以上的微小量,可以得出:

$$\begin{cases}\omega_x = \omega\cos\varphi\cos\lambda \\ \omega_y = \omega\cos\varphi\sin\lambda \\ \omega_z = \omega\sin\varphi\end{cases} \tag{6.39}$$

在刚性块体的情况下,板块 A 上任何一点 p 在经过一段时间后,位置将发生变化,这种变化相当于数学上的坐标系旋转造成的坐标变化。考虑到 ω_x、ω_y、ω_z 均为微小量,可得

$$\begin{cases}x'_p = x_p + 0 + z_p\omega_y - y_p\omega_z \\ y'_p = y_p - z_p\omega_x + 0 + x_p\omega_z \\ z'_p = z_p + y_p\omega_x - x_p\omega_y + 0\end{cases} \tag{6.40}$$

对于板块 A 内另一点 o,同样可以写出

$$\begin{cases}x'_o = x_o + 0 + z_o\omega_y - y_o\omega_z \\ y'_o = y_o - z_o\omega_x + 0 + x_o\omega_z \\ z'_o = z_o + y_o\omega_x - x_o\omega_y + 0\end{cases} \tag{6.41}$$

于是,板块运动后,同一板块上的两点间的坐标差为

$$\begin{cases}x'_p - x'_o = (x_p - x_o) + 0 + (z_p - z_o)\omega_y - (y_p - y_o)\omega_z \\ y'_p - y'_o = (y_p - y_o) - (z_p - z_o)\omega_x + 0 + (x_p - x_o)\omega_z \\ z'_p - z'_o = (z_p - z_o) + (y_p - y_o)\omega_x - (x_p - x_o)\omega_y + 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\Delta x'_{p,o} = \Delta x_{p,o} + 0 + \Delta z_{p,o}\omega_y - \Delta y_{p,o}\omega_z \\ \Delta y'_{p,o} = \Delta y_{p,o} - \Delta z_{p,o}\omega_x + 0 + \Delta x_{p,o}\omega_z \\ \Delta z'_{p,o} = \Delta z_{p,o} + \Delta y_{p,o}\omega_x - \Delta x_{p,o}\omega_y + 0\end{cases} \tag{6.42}$$

在式(6.40)、(6.41)、(6.42)中,(x_p, y_p, z_p) 和 (x_o, y_o, z_o) 分别表示板块 A 转动前(即起始位置)p 点和 o 点的空间直角坐标,而 (x'_p, y'_p, z'_p) 和 (x'_o, y'_o, z'_o) 分别表示板块转动后 p 点和 o 点的空间直角坐标。如果该块体是一个均匀应变体(体应变),则式(6.42)需要增加一项均匀应变 e 引起的坐标差的变化,即

$$\begin{cases}\Delta x'_{p,o} = \Delta x_{p,o} + 0 + \Delta z_{p,o}\omega_y - \Delta y_{p,o}\omega_z + \Delta x_{p,o}e \\ \Delta y'_{p,o} = \Delta y_{p,o} - \Delta z_{p,o}\omega_x + 0 + \Delta x_{p,o}\omega_z + \Delta y_{p,o}e \\ \Delta z'_{p,o} = \Delta z_{p,o} + \Delta y_{p,o}\omega_x - \Delta x_{p,o}\omega_y + 0 + \Delta z_{p,o}e\end{cases} \tag{6.43}$$

式(6.43)就是位于同一刚性或均匀应变块体上观测点的运动模型,即相对稳定点的运动模型。由式(6.42)、(6.43)可以看出,构造块体在球面上的运动造成的同一块体内的两点间坐标差的变化,与坐标参考系的放置附加或不附加尺度因子的变化对坐标差产生的影响在形式上是相同的。下面将根据复测资料对位于同一块体上的点做统计检验,即检验相对稳定点组。

在实际测量中,由于各种原因,两次测量所依据的坐标参考框架不可能完全一致。因此,即使所有的观测点实际上没有运动,测量也没有误差,那么根据两次观测结果求得的坐标差也可能发生变化,其变化量可由式(6.42)或式(6.43)求出,而这种变化是由于两次测量的坐标参考框架间的相对放置和尺度因子不同引起的。反过来说,如果两次测量中间,这个板块确实在球面上按上面所研究的形式运动,那么它将被"融合"在坐标框架的转动之中。而坐标参考框架之间的平移参数,对于任意两点间(无论它们是否位于同一构造单元内)坐标差的变化没有影响。基于这样一个特征,可以设计出 F 检验方法,来判别一组点是否位于同一构造体上。

为了下面的讨论方便,我们假定两次测量所有的点都进行了复测(但在实际,对于两次测量只有部分点进行了复测的情况,下面所述的方法也适用),无论这些点是否在同一个块体上,我们总可以对这些点构成的基线向量或坐标观测值分别对两期资料进行自由网平差,得到两次测量的两个单位权方差的估值 $\dot{\sigma}_1^2 = V_1^{\mathrm{T}} P_1 V_1 / f_1$ 及 $\dot{\sigma}_2^2 = V_2^{\mathrm{T}} P_2 V_2 / f_2$。

由于每期测量都是在一个比较短的时间内完成的,地壳运动的影响可以忽略不计,因而上面对两期资料进行自由网平差所得到的单位权方差的估值可以看做是纯测量精度的量度。我们可以求这两次测量精度的平均估值 $\dot{\sigma}^2$,即 $\dot{\sigma}^2 = \dfrac{f_1 \dot{\sigma}_1^2 + f_2 \dot{\sigma}_2^2}{f_1 + f_2}$ 称为单位权方差的无约束平差估值。

如果这些点确实位于同一个构造块体上,尽管在两次测量之间的这段时间内构造块体可能有运动,两次测量所依据的坐标参考框架可能有所变化,但它们都将会综合反映在一组转动参数 ω_x、ω_y、ω_z 和比例缩放因子 e 中(如果有的话)。因此,对于这两期资料可以列出观测方程如下:

$$
\text{第一次测量的观测方程:}\begin{cases}
\Delta x_{1,0} + V_{\Delta x_{1,0}} = \dot{x}_1 - \dot{x}_0 \\
\Delta y_{1,0} + V_{\Delta y_{1,0}} = \dot{y}_1 - \dot{y}_0 \\
\Delta z_{1,0} + V_{\Delta z_{1,0}} = \dot{z}_1 - \dot{z}_0 \\
\cdots\cdots \\
\Delta x_{m,0} + V_{\Delta x_{m,0}} = \dot{x}_m - \dot{x}_0 \\
\Delta y_{m,0} + V_{\Delta y_{m,0}} = \dot{y}_m - \dot{y}_0 \\
\Delta z_{m,0} + V_{\Delta z_{m,0}} = \dot{z}_m - \dot{z}_0
\end{cases} \tag{6.44}
$$

$$
\text{第二次测量的观测方程:}\begin{cases}
\Delta x'_{1,0} + V'_{\Delta x_{1,0}} = \dot{x}_1 - \dot{x}_0 + \Delta_{1,0,x} \\
\Delta y'_{1,0} + V'_{\Delta y_{1,0}} = \dot{y}_1 - \dot{y}_0 + \Delta_{1,0,y} \\
\Delta z'_{1,0} + V'_{\Delta z_{1,0}} = \dot{z}_1 - \dot{z}_0 + \Delta_{1,0,z} \\
\cdots\cdots \\
\Delta x'_{m,0} + V'_{\Delta x_{m,0}} = \dot{x}_m - \dot{x}_0 + \Delta_{m,0,x} \\
\Delta y'_{m,0} + V'_{\Delta y_{m,0}} = \dot{y}_m - \dot{y}_0 + \Delta_{m,0,y} \\
\Delta z'_{m,0} + V'_{\Delta z_{m,0}} = \dot{z}_m - \dot{z}_0 + \Delta_{m,0,z}
\end{cases} \tag{6.45}
$$

其中：

$$\Delta_{1,0,x}=0+\Delta z_{1,0}\varpi_y-\Delta y_{1,0}\varpi_z+(\Delta x_{1,0}e);$$
$$\Delta_{1,0,y}=-\Delta z_{1,0}\varpi_x+0+\Delta x_{1,0}\varpi_z+(\Delta y_{1,0}e);$$
$$\Delta_{1,0,z}=-\Delta y_{1,0}\varpi_x-\Delta x_{1,0}\varpi_y+0+(\Delta z_{1,0}e);$$
$$\Delta_{m,0,x}=0+\Delta z_{m,0}\varpi_y-\Delta y_{m,0}\varpi_z+(\Delta x_{m,0}e);$$
$$\Delta_{m,0,y}=-\Delta z_{m,0}\varpi_x+0+\Delta x_{m,0}\varpi_z+(\Delta y_{m,0}e);$$
$$\Delta_{m,0,z}=-\Delta y_{m,0}\varpi_x-\Delta x_{m,0}\varpi_z+0+(\Delta z_{m,0}e)。$$

由观测方程(6.44)和(6.45)组成法方程求解，可得约束平差下的单位权方差估值：

$$\dot{\sigma}^2=\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{f} \tag{6.46}$$

其中：$P=\begin{bmatrix}P_1 & 0\\0 & P_2\end{bmatrix}$；$f$为约束平差下的自由度。

由统计检验公式，有 F 检验的统计量如下：

$$F=\frac{R_1-R}{R}\cdot\frac{(f_1+f_2)}{f-(f_1+f_2)} \tag{6.47}$$

其中：f_1、f_2 分别为第一次、第二次观测方程在无约束平差下的自由度，并有$\begin{cases}f_1=3m-3\\f_2=3m-3\end{cases}$；F 检验的统计量中 R、R_1、R_2 分别为

$R=V_1^{\mathrm{T}}P_1V_1+V_2^{\mathrm{T}}P_2V_2$，自由度为$(f_1+f_2)$；

$R_1=V^{\mathrm{T}}PV$，自由度为f；

$R_1-R=V^{\mathrm{T}}PV-V_1^{\mathrm{T}}P_1V_1-V_2^{\mathrm{T}}P_2V_2$，自由度为$f-(f_1+f_2)$。

若 $\mathrm{F}\leqslant\mathrm{F}(\alpha,f-(f_1+f_2),(f_1+f_2))$ (6.48)

则表明在置信水平 α 下，这一组点间的确只有因为坐标框架的不一致或整个块体的运动引起的变化，这一组点间的相对位置在两次测量之间没有变化，而位于同一构造块体内。

若式(6.48)不成立，则其中必定有若干点不在同一构造块体上，或者有局部干扰，造成这些点的异常运动。

式(6.48)不成立时，需要进一步分析，逐一剔除最可能不在同一构造块体上的点，剔除的点的判别主要依据改正数 V，剔除 V 中最大的一组数据，然后重新对余下的点做统计检验，直到式(6.48)成立，即所得点为一组相对稳定点组。

6.6.2 相对稳定点组确定的粗差的拟准检定法

在变形分析中，往往需要对一组观测值来确定运动模型中的各个参数。但是由于各种原因(如某个点因局部干扰引起位移，或原始观测值中真正存在粗差等)，有些观测点上的位移可能“不合群”，即可以用来描述大部分观测点的一组运动参数不能恰当地描述这些观测点的运动。反过来说，如果在求取模型参数时，采用了这些“不合群”的观测值，得到的模型参数会受到“污染”。因此，我们可以将这些“不合群”的位移观测值看做是某种粗差观测值，从而采用适当的方法将它们判别筛选出来。粗差的拟准检定法(QUAD 法)(欧吉坤，1999)是基于真误差与观测值之间的解析关系建立起来的用于探测观测值中的粗差。如果在相对稳定点组上，即是确定一组没有发生相对位移(或者对位移在观测误差允许范围内)的点。

"粗差的拟准检定法"是在"拟稳平差理论"基础上发展起来的，拟稳平差贯穿一种辩证思想，突出选群拟合而非强制。

设有线性化观测方程可表示为

$$\underset{nm}{\overset{m}{A}} X_0 = L + \Delta \tag{6.49}$$

通常是讨论式(6.49)的估值形 $A\hat{X}_0 = L + V$。这里，A 是系数阵，X_0 是 m 维向量，代表未知参数的真值，$\hat{X}_0$ 为其估值；L 是 n 维观测值向量；Δ 是观测值向量的真误差，V 是观测值 L 的余差 。为讨论方便，设观测权阵为单位阵。

令 $J = A(A^{T}A)^{-1}A^{T}$，称 J 为平差因子阵（周江文等，1997），它是投影矩阵，有 $JJ = J$（幂等），$JA = A$，J 的秩为 m，它的正交补投影记为 R，$R = I - J$（I 是 n 阶单位阵），R 亦幂等，且有 $A^{T}R = 0$，$RA = 0$，R 的秩为 $n - m$。

因为 $JAX_0 = AX_0 = L + \Delta = J(L + \Delta)$，有 $(I - J)\Delta = -(I - J)L$，故进一步可得真误差与观测值之间存在确定的解析关系：

$$\underset{nn}{\overset{n-m}{R}} \Delta = -RL \tag{6.50}$$

这也可看成关于 Δ 的线性方程组。方程组(6.50)是秩亏的，秩亏数 $d = n - (n - m) = m$。从数学上讲，解这类秩亏方程组并不困难。但从客观实际的角度，应当强调所采用的解法要有明确合理的物理意义。大量观测数据的统计分析表明，粗差在数据中出现的是少数。一般情况下，含粗差的观测数占总数据量的 1% ~ 10%，因此有理由相信观测数据的大部分是正常的。我们把基本正常但尚待确认的观测称为拟准观测。显然，相应的真误差数值相对较小是辨识拟准观测的必要条件。

设选择了 r 个拟准观测，$r > d = m$，相应的真误差为 Δ_r，非拟准观测的真误差为 Δ_l。在如下条件下，求解秩亏方程(6.50)，有

$$\| \Delta_r \|^2 = \Delta_r^{T}\Delta_r = \min \tag{6.51}$$

为了说明求解由式(6.50)和式(6.51)组成的联合方程组的意义，先讨论一般情况，即在式(6.51)基础上，附加适当要求的条件，得到如下方程组：

$$\begin{cases} \underset{nn}{\overset{n-m}{R}} \Delta = -RL + \varepsilon \\ \underset{mn}{\overset{m}{G}} \Delta = w \end{cases} \tag{6.52}$$

其中：$\varepsilon = R\Delta + RL = R(\Delta + L)$ 是拟合残差，G 是系数阵，w 是 m 维常数向量。式(6.52)是 Δ 需要满足的 m 个独立条件，假设 R 和 G 的行向量是线性无关的。构造拉格朗日函数并求条件极值，得法方程：

$$\begin{bmatrix} R & G^{T} \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Delta} \\ \hat{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -RL \\ w \end{bmatrix}$$

解得：

$$\begin{bmatrix} \hat{\Delta} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & G^{T} \\ G & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -RL \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & A(GA)^{-1} \\ (A^{T}G^{T})^{-1}A^{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -RL \\ w \end{bmatrix} \tag{6.53}$$

其中：$M = (R + G^{T}G)^{-1} - A(A^{T}G^{T}GA)^{-1}A^{T}$，展开式(6.53)，得

$$\hat{\Delta} = -MRL + A(GA)^{-1}w = -(R + G^{T}G)^{-1}RL + A(GA)^{-1}w$$

$\hat{\Delta}$的权逆阵（或称协因数阵）为

$$Q_{\dot{\Delta}} = (R + G^{\mathrm{T}}G)^{-1}R(R + G^{\mathrm{T}}G)^{-1} \tag{6.54}$$

存在两种特殊情况：

(1)如果取 $G = A^{\mathrm{T}}, w = 0$，这时式(6.52)变成

$$\begin{cases} R\Delta = -RL + \varepsilon \\ A^{\mathrm{T}}\Delta = 0 \end{cases} \tag{6.55}$$

可以证明(欧吉坤,1999)，当存在粗差时，限制 $\| \dot{\Delta}_+ \|^2 = \dot{\Delta}_+^{\mathrm{T}} \dot{\Delta}_+ = \min$，是一种强制性约束条件，如果用这种条件求解，会使结果歪曲。

(2) 如果选定了 $r > m$ 个拟准观测，附加条件表示成

$$G_Q \Delta_Q = (0 \quad A_r^{\mathrm{T}}) \begin{vmatrix} \Delta_l \\ \Delta_r \end{vmatrix} = A_r^{\mathrm{T}} \Delta_r = 0 \tag{6.56}$$

其中：A_{Tr}是系数阵 A 的转置 A_T 中相应于 r 个拟准观测的那部分分块矩阵，$G_Q = (0 \ A_r^{\mathrm{T}})$，可得到

$$M_Q = (R + G_Q^{\mathrm{T}} G_Q)^{-1} - A(G_Q A)^{-1}(A^{\mathrm{T}} G_Q^{\mathrm{T}})^{-1} A^{\mathrm{T}} \tag{6.57}$$

真误差的拟准解为：

$$\dot{\Delta}_Q = \begin{vmatrix} \dot{\Delta}_l \\ \dot{\Delta}_r \end{vmatrix} = -M_Q RL = -(R + G_Q^{\mathrm{T}} G_Q)^{-1} RL \tag{6.58}$$

$\dot{\Delta}_Q$ 的权逆阵为：

$$Q_{\dot{\Delta}_Q} = M_Q R M_Q^{\mathrm{T}} = M_Q = (R + G_Q^{\mathrm{T}} G_Q)^{-1} R (R + G_Q^{\mathrm{T}} G_Q)^{-1} \tag{6.59}$$

可以证明$\dot{\Delta}_r^{\mathrm{T}} \dot{\Delta}_r = \min$，这就是说真误差的拟准解$\dot{\Delta}_Q$ 是在附加拟准观测真误差范数极小的条件下得到的。如果拟准观测选择正确，附加的条件是符合客观实际的，因而$\dot{\Delta}_Q$ 反映的实际意义也是准确的。当观测值中含有粗差时，真误差的拟准解$\dot{\Delta}_Q$ 的分布特征呈现明显分群现象，相应于拟准观测的真误差估值$\dot{\Delta}_r$ 明显小于非拟准观测的真误差估值$\dot{\Delta}_l$，这就为辨识和定位含粗差的观测提供了可靠的依据。根据一定的标准，可将那些真误差估值明显大的观测判定为含粗差观测。

实际工作中利用下面公式确定粗差和参数的估值。将观测方程式(6.49)改写为如下形式：

$$AX_0 = L + \Delta = L - G_b \nabla_b + N \tag{6.60}$$

其中：∇_b 是代表粗差的 b 维参数向量，G_b 是其系数阵，$n \times b$ 阶，N 代表分离了粗差的真误差，其他符号同式(6.49)。

通过拟准检测，假设第 j 个观测被判为含粗差，可用一个 n 维单位向量 $e_j = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$(第 j 个分量为 1，其余为 0)将它标记出来。如果找到 b 个粗差，得到 b 个这种单位向量，可构成 $C_b = (e_1, \cdots, e_b)$。

平差后得到粗差估值

$$\begin{cases} \hat{\nabla}_b = (C_b^{\mathrm{T}} R C_b)^{-1} C_b^{\mathrm{T}} RL \\ Q_{\hat{\nabla}_b} = (C_b^{\mathrm{T}} R C_b)^{-1} \end{cases} \tag{6.61}$$

参数估值：

$$\begin{cases} \hat{X}_\Delta = (A^{\mathrm{T}} A)^{-1} A^{\mathrm{T}} (L - C_b \Delta_b) \\ Q_{\hat{X}_\nabla} = (A^{\mathrm{T}} A)^{-1} + (A^{\mathrm{T}} A)^{-1} A^{\mathrm{T}} C_b Q_{\hat{\Delta}} C_b^{\mathrm{T}} A (A^{\mathrm{T}} A)^{-1} \end{cases} \tag{6.62}$$

真误差 N 的估值：

$$\begin{cases} V_{\Delta} = A\dot{X}_{\Delta} + C_b\dot{\Delta} - L = -(RL - C_b\dot{\Delta}_b) \\ Q_{v_{\nabla}} = R - RC_bQ_{\dot{\Delta}_b}C_b^{\mathrm{T}}R \\ \varphi = V_{\Delta}^{\mathrm{T}}V_{\Delta} = L^{\mathrm{T}}RL - L^{\mathrm{T}}RC_bQ_{\dot{\Delta}_b}C_b^{\mathrm{T}}RL \end{cases} \tag{6.63}$$

单位权方差估值为：

$$\dot{\sigma}_{\Delta}^2 = \varphi/(n - m - b) \tag{6.64}$$

如何正确选择拟准观测，这是拟准检定法的关键。通常可分两阶段选择：初选和复选。

设有观测方程

$$V\left\{\begin{bmatrix} V_n \\ V_e \end{bmatrix}\right\} + L\left\{\begin{bmatrix} L_n \\ L_e \end{bmatrix}\right\} = A\dot{X} \tag{6.65}$$

其中，$\dot{X}$为运动模型参数估值（在这里可认为是地壳运动参数）；A 为表征模型参数与观测值之间线性化后的函数关系的系数矩阵，即设计矩阵。按照下列步骤（12 步）进行相对稳定点组的判别。

（1）计算参数估值

$$\dot{X} = (X^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}PL$$

（2）算平差因子矩阵

$$J = A(A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}P$$

（3）计算 J 的正交投影补矩阵

$$R = I - J$$

（4）计算（1）式的改正数

$$V_i = \begin{bmatrix} V_{d_{n_i}} \\ V_{d_{e_i}} \end{bmatrix}$$

（5）求出全部改正数 V_i 的中位值 $\sigma_0 = \mathrm{med}|V_i|$，并以之作为单位权中误差的估计$\dot{\sigma}_0$

（6）计算初选指标 u_i

$$u_i = \frac{|V_i|}{\dot{\sigma}_0\sqrt{R_{ii}}}$$

其中：R_{ii}是投影矩阵的第 i 个对角元素 。

（7）初选相对稳定点组。对于 2 维的位移矢量，如果

$$V_{d_{n_i}} \leqslant U_{n_i} * f_1$$

$$V_{d_{e_i}} \leqslant U_{e_i} * f_1$$

则此点被初步选入“相对稳定点组”，f_1 为我们选定的一个判别准则（因子），否则被初步判定为“不合群”的点。

（8）由选出的“相对稳定点组”重新计算模型参数估计

$$\dot{X}_0 = (A_0^{\mathrm{T}}P_0A_0)^{-1}A_0^{\mathrm{T}}P_0L_0$$

式中：A_0、P_0、L_0 为 A、P、L 中仅与选出的“相对稳定点组”有关的部分。

（9）由选出的“相对稳定点组”按下式计算真误差的估计值

$$\dot{\Delta} = \begin{vmatrix} \dot{\Delta}_0 \\ \dot{\Delta}_r \end{vmatrix} = -(R^{\mathrm{T}}R + P_0G^{\mathrm{T}}GP_0)^{-1}R^{\mathrm{T}}RL$$

式中：$G^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_0 \end{bmatrix}$。

(10)计算指标

$$w_i = \frac{|\dot{\Delta}_i|}{C}$$

其中：$C = \left|\frac{\dot{\Delta}_0^{\mathrm{T}} P_0 \dot{\Delta}_0}{r-1}\right|^{\frac{1}{2}}$；$\dot{\Delta}_0$ 是根据选出的“相对稳定点组”各点求得的真误差估计值；P_0 为相应的观测值的权矩阵 。

(11)复选。若 $w_i \leqslant f_2$，则将此点归入“相对稳定点组”，否则归入“不合群”的点。

(12)返回第(8)步，重复(8)～(11)步，直到与上次选出的“相对稳定点组”相同。

没有再找到新的“稳定点”，结束。

§6.7 现今板块(地块)运动和地壳形变模型的确定方法

空间大地测量方法建立现今板块运动是基于欧拉定理，通过测定地表测站的运动速度利用公式(6.2)可以确定刚性板块运动的欧拉参数。

Hermann Drewes(2000)对不同的现今空间大地测量技术(GPS、SLR 和 VLBI)观测到的站速率解进行了组合，用以估算岩石圈板块旋转矢量，并模拟局部的地壳形变。在组合中对每种技术估算了运动学基本参数(三维旋转矢量)和相对权。整体的运动学基础是采用“非整体旋转”条件来实现，结果得到了一个现今板块运动学模型(APKIM)，它包括 12 个主板块(仅忽略科科斯板块)和 4 个板块边界带(地中海、日本、加利福尼亚和南美安第斯)的局部形变图像。

大地测量地面站速率反映了各种地壳运动，即刚性岩石圈板块运动、区域形变(板块内或板间的)和局部位错。因此，观测速率的比较和解释应包括所有的影响。依此，根据前段所述还考虑了观测基准影响。具有位置矢量 $\underline{X}$，来自大地测量观测站的站速 $\underline{V}$ 估算地壳运动的全观测方程可以写为(Drewes，1998)如下形式：

$$\underline{V}_k = \underline{\Omega}_n \times \underline{X}_k + \underline{S}^{-1}\underline{f} + \underline{\Omega}_{\mathrm{obs}} \times \underline{X}_k \tag{6.66}$$

其中：$\underline{\Omega}_n$ 为刚性板块 n 的地心转动矢量，$\underline{S}$ 是变形地壳的刚性矩阵(从流变学得出，例如岩石密度、弹性、速度等)，$\underline{f}$ 是活动构造力，$\underline{\Omega}_{\mathrm{obs}}$ 则是和观测资料组有关的技术获得的转动矢量(基准)。

鉴于空间大地测量确定的位置的垂直分量精度较低，一般仅用经向速度 V_e，纬向速度 V_n 确定板块运动参数。至少需要在同一板块的 2 个测站速率来估算旋转矢量的 3 个分量。现代板块模型的 12 个主板块中有 11 个主板块如今已覆盖了最低限度数量的观测站，仅科科斯板块例外(DeMets 等，1990)。此外，整个欧亚大陆从大西洋到太平洋，在地球物理模型中被看做一刚性板块。然而，大地测量观测分析表明，在其西部(欧洲)和东部(东亚)，存在明显不同的板块旋转。因此，把欧亚板块分成西欧亚和东欧，获得 12 个板块转动矢量并将它们列于表 6.1。

区域板块边界形变的模拟使用两种不同的方法，即有限元方法和最小二乘矢量预测。第一种有限元方法(FEM)，使用流变地球物理学模型和作用来描述连续形变。FEM 用于大地测量目的已见于各有关文献(Drewes，1993)，在此处使用均匀的、各向同性的弹性物质。第二种方法是最小二乘矢量预测，使用纬度方向和经度方向速率的经验自协方差函数和相互之间的互协方差函数，可以证明自协方差函数和互协方差函数起到和弹性线性及剪切模量(杨氏模量和泊松比)相同的作用。最小二乘预测的结果与 FEM 模拟结果彼此间很接近。计算中模拟

了沿 Gordon(1995)给出的板块边界并覆盖了大地测量观测站的4条形变带:地中海地区、日本、加利福尼亚和南美安德斯,例如其中根据最小二乘预测的地中海形变场已被 Drewes (1997)所证明。

组合方法的共同基准由非整体旋转条件定义:

$$\int \underline{V} d\sigma = O \quad (\sigma \text{ 为地球表面}) \tag{6.67}$$

通过全球1°×1°等面积格网(与采用纬度的余弦加权的1°×1°地理网格相等)速度求和并通过一个共同的整体旋转使其和等于零来实现。

表6.1 直接比较和组合模型的单一技术数据组的基准参数(°/Ma)(Drewes,1998)

被比较的技术	直接比较			组合比较		
	Ω_x	Ω_y	Ω_z	Ω_x	Ω_y	Ω_z
VLBI vs. SLR	-0.0430	-0.0165	0.0254	-0.0452	-0.0248	0.0259
SLR vs. GPS	-0.0624	-0.0159	-0.0148	-0.0678	-0.0122	-0.0076
VLBI vs. GPS	-0.0232	-0.0027	-0.0354	-0.0226	-0.0106	-0.0335

表6.2中为使用不同的空间大地测量技术的组合得到的测值估算的现今板块运动学模型(APKIM)的旋转矢量与相应的地球物理模型 NNR NUVEL-1A(Argus 与 Gordon 1991)。二者之间具有较好的一致(具有95 %的置信区间),但某些矢量明显不同(例如:南极洲、欧亚、亚洲和太平洋)。虽然在站点运动中,偏差仅为几毫米/年,然而由于模型的高精确度,这个值将变得显著重要。

表6.2 根据空间大地测量观测得到的现今板块运动学模型(APKIM)的旋转矢量,和地球物理模型 NNR NUVEL-1A 的旋转矢量(Drewes,1998)

板块名	APKIM			NNR NUVEL-1A		
	Φ[°]	Λ[°]	ω[°/Ma]	Φ[°]	Λ[°]	ω[°/Ma]
Africa	53.1±1.8	269.6±3.6	0.283±0.006	50.6	286.0	0.291
Antarctica	50.1±4.2	220.5±4.3	0.250±0.023	63.0	244.2	0.238
Arabia	55.5±19.3	359.5±65.3	0.505±0.551	45.2	355.5	0.546
Australia	33.8±0.6	36.8±1.2	0.633±0.005	33.8	33.2	0.646
Caribbea	30.0±5.9	274.7±13.4	0.426±0.235	25.0	267.0	0.214
Eurasia	57.9±1.2	258.4±1.9	0.270±0.004	50.6	247.7	0.234
Asia	11.9±6.3	258.2±2.7	0.522±0.072	50.6	247.7	0.234
India	43.5±18.0	43.2±33.2	0.702±0.405	45.5	0.3	0.545
Nazca	28.7±28.4	255.3±2.7	0.736±0.257	47.8	259.9	0.743
N. America	-2.6±1.0	273.7±0.4	0.187±0.003	-2.4	274.1	0.207
Paciffic	-62.7±0.3	93.9±1.4	0.699±0.006	-63.0	107.3	0.641
S. America	-19.4±5.1	210.1±12.3	0.127±0.010	-25.3	235.6	0.116

尽管全部空间大地测量坐标和速率解通常使用相同的地球参考系（ITRF 和 NNR NUVEL-1A），但还是看到根据不同技术求得的站速度场中存在着值得注意的基准差异。同样，在使用相同技术的不同解中也存在差异。当在地壳形变研究中对不同数据组进行组合时，需对这些基准影响进行归算。

目前，几乎全部主要构造板块上至少覆盖了两个空间大地测量观测站提供站速率（科科斯板块例外）。根据空间大地测量数据估算的板块旋转矢量一般都与地球物理模型相近，但是（由于它们的很高的精确性）有时也出现显著的不同。沿板块边界的形变带比形式上认定的更广阔，可作为连续形变来模拟。由于地球物理模型并不包括形变带，所以大地测量的“非整体旋转”基准不同于 NNR NUVEL-1A。



第7章　地壳运动监测与数据处理

地壳运动，是指在地球内部构造应力作用下所引起的地壳介质（或元素）的相对运动。它们可以是垂直运动、水平运动或倾斜运动，综合表现为大面积的地壳形变（胡明城等，1994）。地壳运动可分为长期运动和瞬变运动。前者是在地质时间尺度内的运动，由几千年到几百万年，它与板块运动有关；后者是与地震和火山活动相联系的。瞬变运动干扰人类活动，受到人们更多的关心。但也必须研究长期运动，因为它为描述瞬变运动和了解其驱动机制提供运动框架。监测地壳运动的目的主要有：测定板块运动参数，测定大陆板块和海洋板块的内部形变，测定板块边界与大地震有关的区域形变和局部形变，测定其他地震活动区的区域形变和局部形变。地壳运动监测主要通过建立全球测定板块运动监测网、区域地壳运动监测网和局部地壳运动监测网来实现。全球板块运动监测网，主要用于测定板块运动参数和板内形变，一般要求在每一大板块上的稳定地区布设3个以上测站。空间尺度由几百公里到1 000公里的瞬变运动，一般称区域地壳运动。板块运动监测网和区域地壳运动监测网现在都采用空间大地测量技术建立，包括甚长基线干涉测量（VLBI）、卫星激光测距（SLR）和GPS测量。局部地壳运动监测网用于测定活动构造区或地震活动区的局部形变，其中构造块体边界及其附近的地壳形变监测称为近场形变测量（陈鑫连等，1994）。在这个网中，需要在各种不同的距离上（由几百米到几十公里）测定各点的相对水平位置和高差，通常综合利用GPS测量、激光测距、水准测量和重力测量进行定期复测，以获取监测点的水平和垂直位移速率。监测断层活动是局部地壳运动监测网的主要功能之一，从这种局部网的监测结果，可以看出哪些地区的应变能量正沿着断层的某一闭锁地段在积累，哪些地区的能量可能正在以蠕动或微震形式释放。区域地壳运动监测网和局部地壳运动监测网对于了解区域应变积累情况有着重要意义。

把全球网、区域网和局部网组合起来，就构成一个全面的地壳运动监测网。这样的网对于评价板块构造学说，对于深化应变积累的认识，对于地震的震前、同震和震后运动的认识以及地震预测预报具有重大作用（胡明城等，1994）。

§7.1　全球板块运动监测

科学技术的发展，使得利用空间大地测量系统监测全球板块运动成为可能。美国宇航局从1964年起开始实施《国家卫星大地测量大纲》，直到1979年末。该局于1978年开始实施《地球动力学大纲》，其中包括3个计划：地球动力学计划、地壳动力学计划（CDP）和地球位研究计划（GRP）。地球动力学计划的科学目标是：确定和研究极移和地球自转，最后建立它们的模型；研究全球板块运动与地球内部动力过程之间的关系。地壳动力学计划的科学目标是：研究美国西部板块边界地区与大地震有关的区域形变和应变积累；研究北美、太平洋、纳斯卡、南美、欧亚和印奥等板块当前的相对运动；研究大陆和海洋岩石圈板块的内部形变，特别强调北美和太平洋板块内部形变的研究；研究地球自转动力现象及其与地震、板块运动和其他地球

物理现象可能的相关性;研究位于板块消失边界和走滑边界上的若干地震高发区的区域断层运动和应变积累。地球位研究计划的科学目标是:建立全球地球重力场模型和磁场模型。以上各项计划的科学目标的研究地区遍及全球。这些计划虽然由美国宇航局主持,但都是通过国际合作来实施的。

全球板块运动和区域地壳运动的监测,是按地壳动力学计划(CDP)通过广泛国际合作来实施的。板块运动及其稳定性的监测主要依靠 VLBI 和激光测卫固定站,为了监测板块边界形变所需要的较高空间分辨率是利用 VLBI 和激光测卫流动站来实现的。这两种空间大地测量技术在 20 世纪 60 年代末已开始应用。自 1980 年起,全球已建立了一个逐渐扩充的全球板块运动监测网。随着 GPS 的发展以及自 20 世纪 90 年代开始 IGS 跟踪站的建立,GPS 已成为监测全球板块运动的主角。2000 年 IERS 发布了 365 个并置站在 ITRF97 框架下的 532 个站速度,其中 198 个 GPS 站,134 个 SLR 站,129 个 VLBI 站,71 个 DORIS 站。2001 年 IERS 又公布了 ITRF2000 的初步结果,ITRF2000 则大约由 500 个并置站的 800 个站速度来确定(Altamimi, Sillard, and Boucher, 2002),并通过 ITRF2000 速度场建立了全球板块绝对运动模型 ITRF2000NNR。

§7.2 高精度的国家 GPS 观测网

GPS 定位技术以其精度高、速度快、费用省、操作简便等优良特性被广泛应用于大地控制测量中。时至今日,可以说 GPS 定位技术已完全取代了用常规测角、测距手段建立的大地控制网。我们一般将应用 GPS 卫星定位技术建立的控制网叫 GPS 网。归纳起来大致可以将 GPS 网分为两大类:

(1)全球或全国性的高精度 GPS 网,这类 GPS 网中相邻点的距离在数千公里至上万公里,其主要任务是作为全球高精度坐标框架或全国高精度坐标框架,为全球性地球动力学和空间科学方面的科学研究工作服务,或用以研究地区性的板块运动或地壳形变规律等问题。

(2)区域性的 GPS 网,包括城市或矿区 GPS 网、GPS 工程网等,这类网中的相邻点间的距离为几公里至几十公里,其主要任务是直接为国民经济建设服务。

7.2.1 美国 CORS 系统和南加州的永久 GPS 大地测量阵列

美国大地测量局(NGS)已建立了国家连续运作的基准站(Continuously Operating Reference Station, CORS)系统,其目的在于提高人们利用 GPS 数据,以厘米级精度,在整个美国及其领地测定点位的能力。他们也用 CORS 数据发展 GIS,监测地壳形变,测定大气层水汽分布,支持 GPS 的遥感应用,以及监测电离层自由电子的分布。为了增强 CORS 系统,NGS 不断地扩充该系统的空间覆盖,平均每月增加 3 个新的 CORS 站。到 1998 年 12 月,该系统已包括了 145 个站,而且还在继续增加着。NGS 还计划提高称为“用户之友”的 CORS 信息服务人员的素质,使用户通过互联网更易于得到 CORS 数据和有关信息(包括叙事文本、站位置、速度、GPS 卫星星历和有选择的气象数据,等等)。NGS 负责建立关于天线相位中心变化、地壳运动、电离层全电子含量和大地水准面高等方面的数学模型;支持能减少多路径的 GPS 天线的研制工作;研究提供关于气象数据的全国数字地图的可能性,以使更为严密的 GPS 数据处理成为可能;力求更快地生产和提供精密的 GPS 星历和数字模型,以使用户能及时地精确测定点位。此外,NGS 还在继续研究如何强化 CORS 系统对定位精度的影响,定位精度对于最接近的 CORS

站的距离具有相依性,对于观测期持续时间具有相依性。美国地壳运动的监测主要由地质调查局负责。目前现代 GPS 接收机可以测量 1~2mm/a 的地面运动,使得地学工作者有可能用改进的廉价 GPS 接收机在广大地区监测和认识与地震灾害有联系的细微地面运动,于是兴起了建立常设的 GPS 大地测量阵列(PGGA)。在美国西北部的广阔地区,已建立 PGGA(包括加州南部的整体 GPS 网、海湾区的区域形变阵列、北部盆地和山脉区阵列、东部盆地和山脉区阵列以及太平洋西北部的 PGGA)站 250 个。美国把这些分散的 PGGA 联系起来,以得出美国西部各州和北美细微构造活动的无间隙景象。只有建立连续观测的大规模 PGGA,才能得出美国西北部整个板块边界的更为完全的景象。它可以提供板块构造荷载的景象,而这种荷载正是引起地震灾害的原动力。它还可以显示板块边界上的地壳是如何运动的,于是可对地震模式的内蕴得到某种启示。

在震后跟踪震间运动和了解地壳性质时,GPS 数据是有价值的。PGGA 除了有助于科学研究工作之外,还将建立大地测量控制,为加州今后的普通测量和工程测量提供基础。太平洋西北部的 PGGA 将增加与胡安德富卡微板块和北美板块之间的消减运动有联系的地壳形变数据。墨西哥的 PGGA 将提供更南的沿北美板块边界上的主形变,从圣安德烈斯断层系到加利福尼亚湾的延伸体系的平移运动,以及到沿中美海沟的压缩运动。PGGA 的长期目标是对地震的地球物理过程有一个基本认识,并为地震灾害分析提供先进模型,重点在于获得具有密集时间分辨率的大范围空间覆盖,以便对应力演化过程、断层机制、断层带结构和应力触发等方面有深刻的认识。许多新型 GPS 接收机与地震站的同震观测将有助于研究构造运动、板块边界形变、地震物理和地震灾害。美国的地震监测网主要建立在加州南部。2003 年美国国家科学基金会(NSF)、美国地质调查所(USGS)和美国国家航空和航天局(NASA)一道,联合发起了一项新的、雄心勃勃的开创计划,称之为"地球透镜"(Earthscope)计划并已经开始实施。该计划目的是拓展地球科学的观测能力,采集实时数据,并将其输入电脑中。这些数据与新的和现有的信息相结合,为揭示北美大陆结构、演化和动力学特征,深入认识地震和断层系统、火山和岩浆作用过程以及将构造作用与地表过程联系起来,提供前所未有的良机。

"地球透镜"是一套分布式、多用途仪器和观测台网的组合,它使我们能够大大加深对北美大陆结构、演化和动力学特征的理解。该计划包括以下四个部分:

(1) USArray(美国地震阵列)。大陆规模的地震阵列将提供岩石圈和地球深部的相关三维图像。

(2) SAFOD(圣安德列斯断裂深部观测站)。横穿圣安德列斯断裂的钻孔观测站直接测量板块边界地震发生的物理条件。

(3) PBO(板块边界观测站)。固定排列的应变仪和 GPS 接收机可测量板块边界规模的实时变形。

(4) InSAR(合成孔径干涉雷达)。构造活动区合成孔径干涉雷达图像可进行大范围的空间连续应变测量。

PBO 为大地测量观测台站(见图 7.1),用于研究板块边界变形引起的三维应变场。为了解决板块边界动力学、活动构造、地震和岩浆活动等各种科学问题,沿太平洋/北美板块边界将布设连续记录、遥测应变台,以显著增强 SCIGN、BARD、EBAR、NBAR、SBAR、PANGA 和 AKDA 特别台站的数据采集能力。PBO 由两个部分组成:一是 GPS 接收机组成的骨干网,提供整个板块边界地带的长波长、长周期概要图。该网从阿拉斯加伸展到墨西哥,从西海岸延伸到北美科迪勒拉的东部边缘。GPS 接收机的间距约为 100km,并将采集的数据与 InSAR 数据结合,以

确定应变场的区域成分。二是在活动构造现象发生的地区（例如沿圣安德列斯断裂系和年轻的岩浆系周围）布设密集的台站。要求这些地区具有最高的时间分辨率，在其周围布设钻孔应变仪和 GPS 接收机综合台站，仪器间距 5 ~ 10km。为覆盖美国本土西部大部分构造活动区和阿拉斯加南部，需要 1 000 多个观测站（应变仪加 GPS 接收机），完成骨干网需要大约 300 台 GPS 接收机。PBO 计划布设 875 个连续运行 GPS 站，100 个流动 GPS 站，175 个钻孔应变仪和 5 个激光应变仪 。

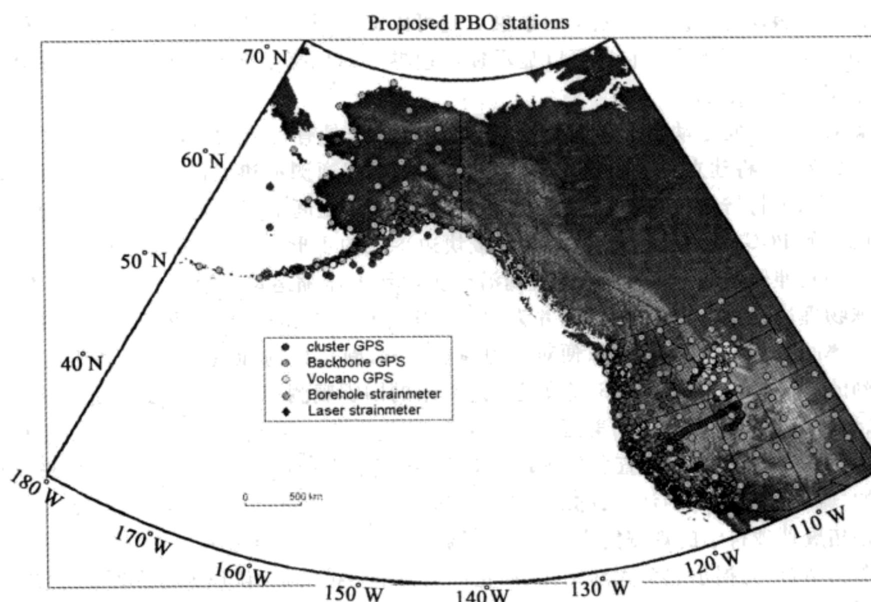


图 7.1　PBO 计划布设测站情况（据 William Prescott，2003）

7.2.2　日本的 GPS 连续观测系统

日本是一个多地震的国家，过去已完成的三角网和水准网仍然有使用价值，因为它们保持着地壳运动的历史记录。日本地理测量院（GSI）还在进行三角网和水准网的重复测量。对于一、二等三角网和总长约 2 万公里的一等水准网，原则上每 5 年重测一次，以检测地壳形变和垂直运动，以及更新水准点高程。三等三角点的修测主要是在受地壳形变和地层沉降影响的地区。GSI 还为地籍测量施测四等三角点。在某些有异常地壳形变的地区，例如关东南部和东海地区，其重复水准测量的周期为 3 个月至 2.5 年，视形变率的大小而定。由伊豆半岛最近测量结果发现，半岛东部有异常隆升，推测是因该地区周围火山活动引起的。一度作为水平控制测量主要工具的电子测距仪，几乎完全被 GPS 代替了。日本的跨海水准测量是很著名的，继本州和北海道之间的跨海水准测量之后，20 世纪 90 年代初 GSI 又完成了四国和九州之间长达 14km 的跨海水准测量，采用 4 台经纬仪同时观测的方法。GSI 一直在继续 26 个验潮站上的工作，发布每日、每月和每年的平均海面数据。自 1990 年以来，一直在研究监测伴随温室效应的海面上升的方法，这就是利用 VLBI、GPS 和验潮仪的组合方法。GSI 完成了利用 VLBI

观测数据重新平差日本大地控制网的研究,结果揭示了现有大地控制网的扭曲,研制出了大地控制网与 WGS84 之间的精密坐标转换软件。

日本拥有两个 SLR 固定站和一台流动站。鹿岛 VLBI 站的 26m 天线自 1984 年起参与了美国宇航局的地壳动力学(CDP)计划和随后的固体地球动力学(DOSE)计划的实施。此后鹿岛站建立了 34m 的新天线,参加西太平洋 VLBI 网,以监测围绕日本的板块运动(包括菲律宾海板块)。由日本通信研究所运作的鹿岛站的 34m 天线,自 1988 年起参加了国际射电干涉测量组织(IRIS)太平洋网(IRIS-P 网)的地球自转观测。SLR 在测定地心位置、地球参考框架和构造运动中起着重要作用,它将为海面水位监测提供绝对参考。连续 SLR 观测将改进地球重力场模型,测定其变化,并为固体地球—大气圈—海洋体系的研究作出贡献。SLR 测定卫星轨道的能力是突出的,特别是测高卫星的 SLR 跟踪起着关键性作用,这是由于它测定绝对海面水位的能力所决定的。为了评价和比较各种空间大地测量技术,需要进行共站观测。曾在通信研究所东京总部所在处安置了 VLBI 天线、SLR 观测仪和 GPS 接收机作共站观测,这里的一条基线的两端是鹿岛 VLBI 站的旧 26m 天线和 34m 的新天线。为了监测东京市地区的地壳形变,把这个共同观测站扩展为包括 4 个共同观测站(信息研究所东京总部、鹿岛、筑波和千叶)的密集网,任意两站间的最长距离为 135km。这个网既可比较三种空间大地测量技术,又是地壳形变监测系统,被称为 KeyStoneProject(KSP)。有些 GSI 的 GPS 站位于 KSP 站的附近,使得 KSP 成为比较 VLBI、GPS 和 SLR 观测结果的理想场地。比较了由 VLBI 和 GPS 所得的站运动,两者一天观测结果的离散度,水平运动和垂直运动分别为 2mm 和 10mm。在长于一个月的观测期中,VLBI 和 GPS 所得的站运动的变化,水平运动和垂直运动分别为 0.5 ~ 1mm 和 2 ~ 5mm。这说明两者的可靠性大致相同,所得的站速度是一致的。鹿岛站 VLBI 基线长的重现度为 2mm 的量级,但夏季趋于增大。通过观测的基线长之间的相关分析和地面气象数据分析,结果表明,随着天气条件的变化,鹿岛站有视位置变化,这是由大气梯度引起的。

为建立监测日本列岛地壳形变的新三维测地网,日本国土地理院从 1993 年便开始了 GPS 连续观测网的筹建工作。1994 年日本列岛 GPS 连续观测站总数已达 210 个,构成了覆盖全国的 GPS 连续观测系统。该网于 1994 年 10 月 1 日正式启用,10 月 4 日监测到北海道东部近海 8.1 级大地震,清晰地记录了地震前后的地壳形变。由日本全国 GPS 连续观测系统对该震的定量分析表明,整个北海道地区向震源方向位移了几厘米至几十厘米。距震源 170km 以西的根室向东水平位移 44cm,下沉 10cm。其他地区均有不同程度的位移。地震前一周没有观测到明显的前兆现象。此后又成功地捕捉到三陆远海地震及兵库县南部地震的地壳形变。在上述 GPS 连续观测系统的基础上,日本国土地理院又增设了 400 个 GPS 观测站(电子基准点),并增加了各种性能的 GPS 连续观测系统,其测站数达 610 个,站间距平均为 30km,强化区站距为 15km,阪神周围地区为 20km,北海道地区为 50km,构成高密度的电子基准网,以便更有效地监测日本的地壳形变,故将此观测系统包括原系统在内称为新的 GPS 连续观测系统。新系统是为建立 GPS 高精度大地网和监测地壳形变而设立的,由 GPS 固定站、观测数据的中央处理站以及东海基地站构成。新系统的特点是全自动、高速度、高度可靠性,且功能可扩展。在地震来临时可迅速地提供精密数据,能以 1s 的间隔进行观测数据的高速采样,极大地提高了系统的性能。

1996 年日美合作地震科学研究协定生效之后,GSI 负责建立了目前全球规模最大的和最密集的区域 PGGA,包括 1000 个站,站间距离为 15 ~ 30km。这样的 PGGA,其功能不只是用于地震研究,它所提供的大气水汽信息也可用于改进日本灾难性天气的预报。另一方面,日本也

发展了现代化的数值天气预报系统。两者的结合,使得日本的大地测量学者、气象学者和地球动力学者之间发生了前所未有的联系。

图 7.2 是日本的电子基准点示意图。

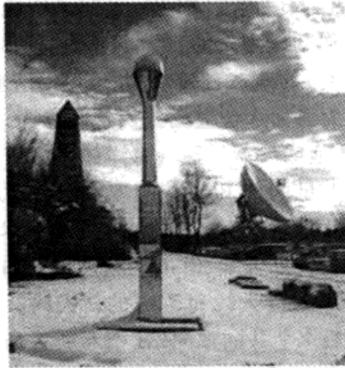


图 7.2 电子基准点示意图

7.2.3 欧洲常设 GPS 网

欧洲的参考框架(EUREF)网是 1991 年开始建立的,当时德国的联邦制图和大地测量局(BKG)曾起了重要作用,组织了第一次 GPS 会测,覆盖了欧洲西部,建立了一个一致的 EUREF。此后通过相继的 GPS 会测,把该网向欧洲西部延伸,同时欧洲各国也进行了网的加密会测。这一欧洲范围内的国际合作,其结果是建立了一个高精度的三维大地网,并与全球参考框架和欧洲各国的参考系统发生了联系,为网的加密、观测方法和数据分析制定了策略和指导路线。这样就建立了欧洲常设 GPS 网、12 个数据分析中心和一个数据处理服务机构。这个一致网的水平分量和高程分量的精度分别为 3mm 和 6mm。

1995 年以来,重点转移到高程分量,欧洲的统一水准网有了扩充,改进了平差,建立了欧洲 GPS 垂直参考网。目前 EUREF 网为多学科活动服务,例如估计气象参数并与验潮站发生联系。欧洲地学界与东南亚国家地学协会合作,自 1991 年开始执行一项称为亚洲南部和东南亚地球动力学计划(GEODYSSEA),参加者有来自欧洲的大批地学工作者。他们研究了由东南亚大陆到菲律宾、澳大利亚北部的地球动力过程和自然灾害,包括地震、火山喷发、海啸和滑坡。造成这些灾害的构造活动是欧亚板块、菲律宾海板块和澳大利亚板块的会合和碰撞。这些地球动力研究提供了关于这一地区活动板块边界的位置、印度尼西亚苏拉威西地区的形变过程和菲律宾群岛构造活动的重要信息,也证实了所谓其他地块的存在。

德国波茨坦地学研究中心(GFZ)除了参加上述 GEODYSSEA 计划之外,还在南美、中亚和欧洲与东道国有关单位合作,建立了一些区域的 GPS 网,供地球动力学研究之用。这些区域网的数据采用 GFZ 软件 EPOS 连同 IGS 站网的数据一起处理。为了解释 GFZ 网的结果,他们着重于区域构造和相对板块运动。为此,他们在区域标架中定义了站速度的基准。1991 年欧洲宇航局发射的第一颗遥感卫星 ERS-1 载有 SLR 跟踪系统和德国研制的双向和双频微波测距及多普勒测量(PRARE)系统,不料 PRARE 在开始时就失效,使 ERS-1 的轨道精度发生问

题。由于 SLR 具有跟踪的优势,采用较好的重力场模型,使 ERS-1 的轨道精度仍然达到了 15cm。PRARE 第一次失败后,又安置在俄罗斯气象卫星 METEOR-3 上继续试验。1995 年欧洲宇航局发射第二颗遥感卫星 ERS-2 时,按原计划载有 SLR 和 PRARE 两种跟踪系统,另外还有法国研制的 DORIS 系统。目前德国 GFZ 负责 ERS-1 和 ERS-2 工作轨道和测高成果的产生。为了联合处理 ERS-1 和 ERS-2,所需要的高分辨率和高质量的平均海面由 GFZ 提供。PRARE 定轨的质量,将由 SLR 定轨结果和卫星轨道交叉弧数据比较来评价。

为了精密定轨和测定绝对站位置,法国国家宇航研究中心(CNES)研制了 DORIS 系统,它用星载接收机测量多普勒效应,在全球设有均匀分布的大约 50 个常设信标站。DORIS 先后被安置在 SPOT-2、SPOT-3、T/P 和 ERS-2 卫星上,除了为 T/P 卫星精密定轨之外,还可用于 DORIS全球网中各地面信标站的精密定位。法国国家地理院利用 GIPSY/CASIS 软件在 IERS 框架中监测全球 DORIS 信标网的位置和估计地球自转参数,使得 DORIS 成为 IERS 目前采用的 5 种空间大地测量技术之一。法国在格拉斯(Grasse)附近设有一个地球动力学站,安装有激光测月和激光测卫等设备。20 多年来,该站参加了许多卫星的跟踪(包括地球动力卫星、大地测量卫星和海洋卫星)。在 20 世纪 90 年代期间,特别致力于把各种不同的空间大地测量技术(如 GPS、DORIS、GLONASS、LASER 和 VLBI)和重力测量(包括绝对重力测量)组合起来,以探求观测结果和定位的系统性及不稳定性,以提高各种不同跟踪系统的精度,并对大地测量卫星(特别是 LAGEOS-1 和 LAGEOS-2)、GPS 和 GLONASS 星座所作的激光观测作了交叉分析,提出了数据比较方法和轨道质量控制技术。

英国连续运作的 GPS 接收机(Continuously Operating GPS Receivers,COGRS)网是一个国家网,由英国兵械测量局(Ordnance Survey of Great Britain)负责维护。它可以提供连续 GPS 数据的时间和空间加密,以使 IGS 数据的潜在应用大大扩充。例如,国家范围的防洪监测可以与全球范围所实施的平均海面水位监测发生联系。同样,利用来自 COGRS 国家网的数据,辅之以来自 IGS 全球网的数据,就可详细研究对流层和电离层活动。COGRS 国家网的优势,已为英国的 4 个政府机构所认同,它们是环保局、气象局、农业渔业和食品工业部以及 Proudman 海洋学实验所。1998 年末,英国已建成了 COGRS 国家网的 13 个站,其中若干个站将是测量基准站。到 1999 年这个网已包括约 30 个站。为了让环境部门最佳地利用 COGRS 数据,正在建立一个 COGRS 网国家中心,以负责 COGRS 网数据的传送、建档、处理和分析。

瑞典陆地测量局建立了常设 GPS 网,称为参考站网(SWEPOS)。该网包括站间距离为 200 ~ 250km 的 21 个站,1993 年开始运作。每一站上安置了 2 台高精度双频 GPS 接收机,某些站上还安置 GPS/GLONASS 联合双频接收机。GPS 数据从各站传送到一个中心控制站,每秒传送一次,然后转送到各个实时分配站存储,以供测后处理。SWEPOS 既为科研服务(如研究地壳运动和探测大气层水汽),又为生产服务(如测量和导航)。SWEPOS 也是全球参考标架在瑞典的体现。瑞典陆地测量局还与翁萨拉航天观测站(VLBI 站)合作,发展厘米级精度的实时动态(Real Time Kinematic,RTK)业务,覆盖全瑞典。SWEPOS 数据也将用于计算瑞典水汽含量。SWEPOS 网还扩展到覆盖芬兰斯堪的纳维亚和波罗的海地区,大约包括 30 个附加站。在美国航天局固体地球动力学(DOSE)计划之内,每年至少观测一次。此外,瑞典还提出了一个 R/X95 计划,目的在于为利用全球参考框架(WGS94/ITRF/EUREF)作准备,提高国家网的易接近性,使许多局部大地网与国家和全球参考框架发生联系。为此,建立了一个新网,它包括国家水平网中所有的点和区域网中的主点,也包括一等水准网中的若干水准点。此新

网与体现全球参考框架的 SWEPOS 网中的 21 个常设 GPS 站发生联系。发起这一计划的目的,在于利用由于卫星大地测量的迅速发展所需的以高效率进行测量工作的可行性,诸如长距离上的高精度,以连续运作的参考站构成新的测量基础,致力于厘米级精度的实时定位等,促进了这种可行性。

瑞士的联邦地形测量局(Federal Office of Topography)于 1985—1994 年间利用 GPS 建立了一个称为 LV95 的高精度大地控制网,是欧洲参考系统的一个组成部分。该网包括 104 个主点,大约有 60 个加密点,成为瑞士新的国家大地测量参考系统 CHTRS95。该网相对于 Zimmerwald SLR站的全国坐标精度(1σ)水平位置好于 1cm,高程好于 3cm。但是,现代的高精度大地网再也不能看成是静态的。该局正在建立常设 GPS 跟踪站网,称为瑞士自动 GPS 网(Automated GPS Network for Switzerland,AGNES)。该网将为多种目的服务,诸如国家测量、导航、气象学和科学研究。目前已有 9 个 AGNES 站在运作,该网将根据实时动态(RTK)应用的需要来加密。在 RTK 应用中,一般多采用相位观测的广域差分 GPS 方法。CHTRS95 的动态模型(称为 CHTRM95)包括 AGNES 的连续观测和 LV95 的周期重复观测。1998 年利用 9 个 AGNES 常设站和 14 台流动 GPS 接收机,第一次对该网进行了重复观测,共收集了 15 个夜间观测期的观测结果,用伯尔尼 GPS 软件 4.1 进行处理,并对观测结果作了动态分析。当利用 AGNES的一个或多个参考站进行广域差分 GPS 定位,特别是利用 GPS 相位数据进行精密实时定位时,大气层折射就起着关键性的作用。由于瑞士参考站间的距离比较远,一般是 50 ~ 100km,在每 11 年一次的太阳风暴高峰期,电离层折射就可能是严重的误差源,特别是对求解初始载波相位整周数的影响。目前可供利用的全球和区域总电子含量图(例如欧洲定轨中心生产的)可用来建立平均电离层折射模型。但在几分钟的时间尺度上,整周数不定性解通常会受到这种总电子含量图所未顾及的短期电离层波动的影响。也可能发生相对于最接近的参考站的明显偏差,特别是在瑞士的山区,这就意味着模型不正确的对流层折射也会引起偏差。因此,必须监测电离层偏差,研究它们对广域差分 GPS 结果的影响,并研究是否可以从 AGNES 网提取大气层信息,来改正流动 GPS 接收机近实时的数据。

芬兰的常设 GPS 网(FinRef)是芬兰大地测量院(FGI)建立的,主要用于研究芬兰的地壳形变。1996 ~ 1997 年间,FGI 利用 12 个常设 GPS 站为起始站,建立了包括遍布芬兰的 100 个站的加密网,起始站中有 4 个属于欧洲参考框架(EUREF)的常设网,加密网中的测站主要是过去的一等三角点。为了使 GPS 网与国家高程系统发生联系,把某些验潮站和精密水准点也包括在该网中一并观测。网的 GPS 解多用伯尔尼软件 V4.0。最后平差中根据不同观测期间的不符值来计算坐标中误差,其南北分量、东西分量和高程分量分别是 2mm,2mm 和 6mm。1998 年仍继续该网的加密,位于芬兰南部的 190 个站已与 1996 ~ 1997 年观测的 GPS 网连接了起来。由芬兰常设 GPS 网的观测结果发现,未建立模型的最大误差源是天线相位中心变化。这种变化包括两部分:相位中心偏移和相位中心变化,并已用野外检定法求定了 9 个 FinRef站上与天顶角相依的相位中心变化和相位中心垂直偏移。

7.2.4 中国 A、B 级网和中国地壳运动观测网络

大地测量的科研任务之一是研究地球的形状及其随时间的变化,因此建立全球覆盖的坐标系统一的高精度大地控制网是大地测量工作者多年来一直梦寐以求的。直到空间技术和射电天文技术高度发达,才得以建立跨洲际的全球大地网,但由于 VLBI、SLR 技术的设备昂贵且

非常笨重，因此在全球也只有少数高精度大地点，直到 GPS 技术逐步完善的今天才使全球覆盖的高精度 GPS 网得以实现，从而建立起了高精度的（在 1～2cm）全球统一的动态坐标框架，为大地测量的科学研究及相关地学研究打下了坚实的基础。

1991 年国际大地测量协会（IAG）决定在全球范围内建立一个 IGS（国际 GPS 地球动力学服务）观测网，并于 1992 年 6～9 月间实施了第一期会战联测，我国借此机会由多家单位合作，在全国范围内组织了一次盛况空前的“中国’92 GPS 会战”，目的是在全国范围内确定精确的地心坐标，建立起我国新一代的地心参考框架及其与国家坐标系的转换参数；以优于 10^{-8} 量级的相对精度确定站间基线向量，布设成国家高精度卫星大地网的骨架，并奠定地壳运动及地球动力学研究的基础。

作为我国高精度坐标框架的补充以及为满足国家建设的需要，在国家 A 级网的基础上建立了国家 B 级网（又称国家高精度 GPS 网）。布测工作从 1991 年开始，经过 5 年努力完成外业工作，内业计算已基本完成，不日将公布使用。全网基本均匀布点，覆盖全国，共布测 730 个点左右，总独立基线数 2 200 多条，平均边长在我国东部地区为 50km，中部地区为 100km，西部地区为 150km，经整体平差后，点位地心坐标精度达 ±0.1m，GPS 基线边长相对中误差可达 2.0×10^{-8}，高程分量相对中误差为 3.0×10^{-8}。

新布成的国家 A、B 级网已成为我国现代大地测量和基础测绘的基本框架，将在国民经济建设中发挥越来越重要的作用。国家 A、B 级网以其特有的高精度把我国传统天文大地网进行了全面改善和加强，从而克服了传统天文大地网的精度不均匀、系统误差较大等传统测量手段不可避免的缺点。通过求定国家 A、B 级 GPS 网与天文大地网之间的转换参数，建立起了地心参考框架和我国国家坐标的转换关系，从而使国家大地点的服务应用领域更宽广。利用 A、B 级 GPS 网的高精度三维大地坐标，并结合高精度水准联测，大大提高了确定我国大地水准面的精度，特别是克服我国西部大地水准面存在较大系统误差的缺陷。

中国地壳运动观测网络（Crustal Movement Observation Network of China，CMONOC）（http://www.neis.gov.cn/item2/introduction/）是以全球卫星定位系统（GPS）观测技术为主，辅之已有的甚长基线射电干涉测量（VLBI）和人卫激光测距（SLR）等空间技术，结合精密重力和精密水准测量构成的大范围、高精度、高时空分辨率的地壳运动观测网络。中国地壳运动观测网络是一个综合性、多用途、开放型、数据资源共享、全国统一的观测网络，具有连续动态监测功能。网络从根本上改善了地球表层固、液、气三个圈层的动态监测方式。网络的科学目标以地震预测预报为主，兼顾大地测量和国防建设的需要，同时可服务于广域差分 GPS，气象和星载干涉合成孔径雷达等领域。网络的关键技术是：高精度和高稳定性的观测技术，大信息量的获取技术，快速准实时的处理技术。网络由基准网、基本网、区域网和数据传输与分析处理系统四大部分组成。基准网占 25 个 GPS 连续观测站组成，具有绝对重力、相对重力、水准等多种观测手段，其中部分站具有包括 VLBI 和 SLR 等观测技术手段，每个站配备卫星通信和有线通信设备。基本网由 56 个定期复测的 GPS 站组成，西部大约两年复测一次，东部大约四年一次。区域网由 1 000 个不定期复测的 GPS 站组成，其中 300 个左右均匀布设，700 个左右密集布设于断裂带及地震危险监视区。

基准站相邻站间 GPS 基线长度年变化率测定精度优于 2mm；GPS 卫星精密定轨精度，与 IGS 联网优于 0.5m，独立定轨优于 2m；VLBI 相邻站间基准年变化率测定精度 2～3mm；固定 SLR 绝对坐标测定精度优于 3cm；流动 SLR 绝对坐标测定精度优于 5cm；绝对重力测定精度优

于 $5\times10^{-8}m/s^2$。基本站与区域站相邻站间 GPS 基线每期测定精度，水平分量 3 ~ 5mm，垂直分量 10 ~ 15mm，相对重力测定精度 $(15\sim20)\times10^{-8}m/s^2$。

网络给出的大范围和时空密集的地壳运动高精度观测数据，将成为地球科学定量研究的基础，为我国 21 世纪可能发生的若干次 7 级以上大地震的预报提供关键性科学依据，同时还将成为当今世界地球动力学研究的重要野外实验基地，尤其对青藏高原的隆起成因的研究起到决定性的作用，从而确立我国在这一领域研究中的主导地位。网络的建成将使我国在大陆地震研究方面居国际领先水平。网络的建立对中国未来的科学、军事、社会和经济发展有极其重要的影响，为我国众多领域在国际上占有重要地位提供支持。网络还将推进诸如大地测量学、地球动力学、气象学、海洋学、天文学、高空物理学以及其他灾害预测学和地球环境监测学等学科的发展，为未来现代化战争提供 GPS 实时定位技术保障，为第二代战略武器试验和进一步加强重点方向战场建设提供高精度的大地控制。网络所取得的各种基本信息及附带产品将为我国国民经济众多方面（如交通、公安、消防、保险、油气田开发、矿业、农业等）带来可观的社会与经济效益。网络的建立将为以后我国广域差分 GPS 导航提供基准并打下良好基础，加速推动和发展中国 GPS 产业。

图 7.3 为中国地壳运动观测网络分布图。图 7.4 为我国 25 个 GPS 连续观测站永久 GPS 站分布状况。图 7.5 为我国 56 个定期复测的 GPS 站分布状况。图 7.6 为 1000 个不定期复测的 GPS 站分布状况。图 7.7 展示了我国地壳运动观测网络数据传输与分析处理系统。

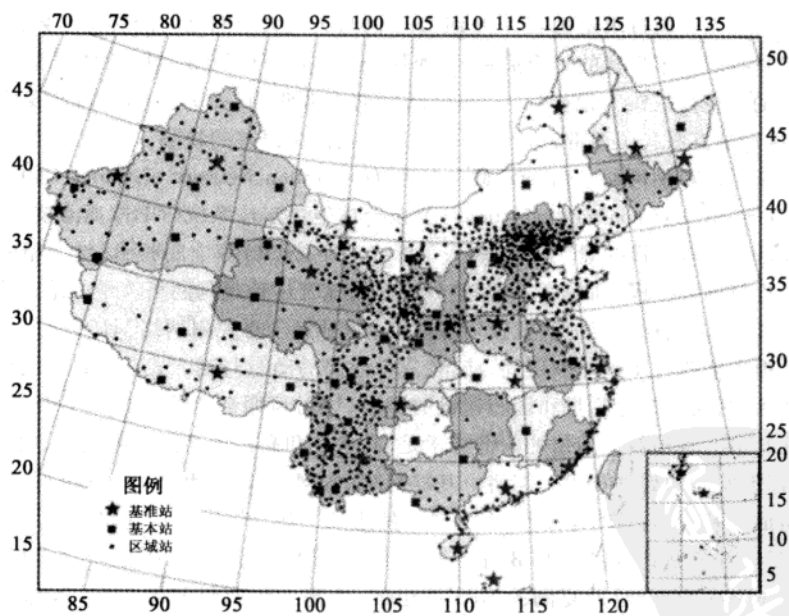


图 7.3　中国地壳运动观测网络总体图

（http://www.neis.gov.cn/item2/introduction/）

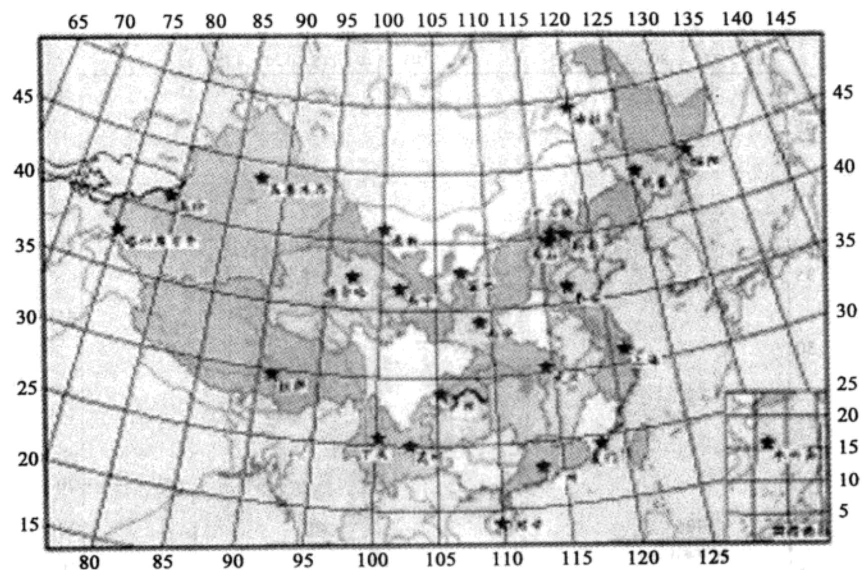


图 7.4　25 个 GPS 连续观测站永久 GPS 站分布情况

(http://www.neis.gov.cn/item2/introduction/)

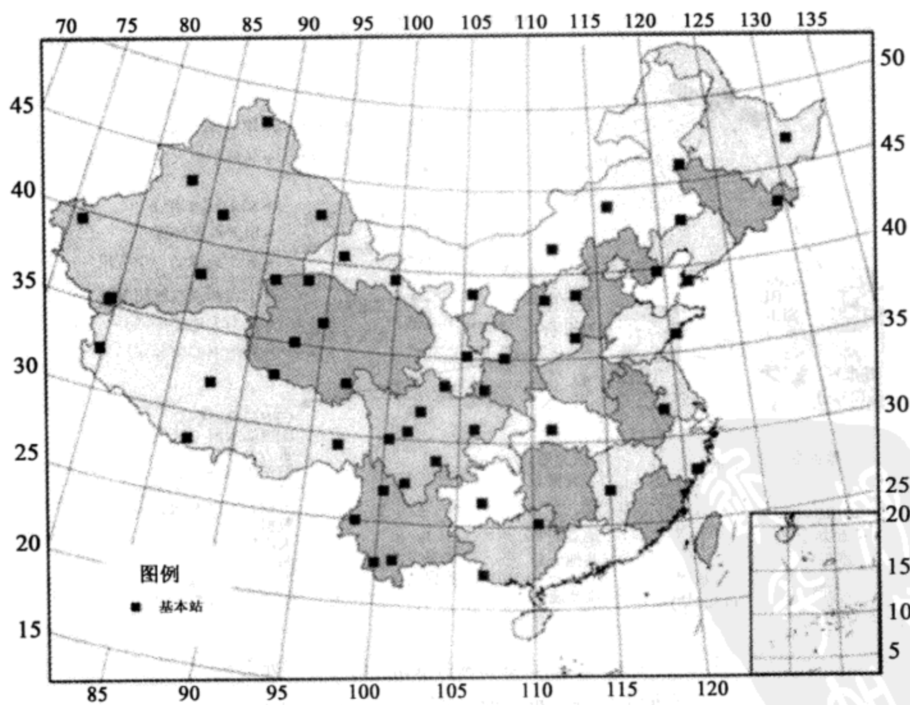


图 7.5　56 个定期复测的 GPS 站

(http://www.neis.gov.cn/item2/introduction/)

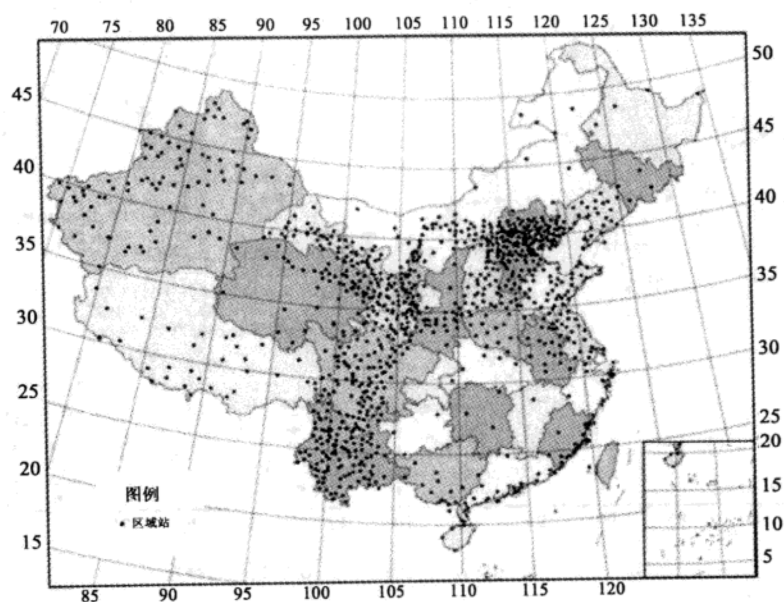


图 7.6　1000 个不定期复测的 GPS 站

（http://www.neis.gov.cn/item2/introduction/）

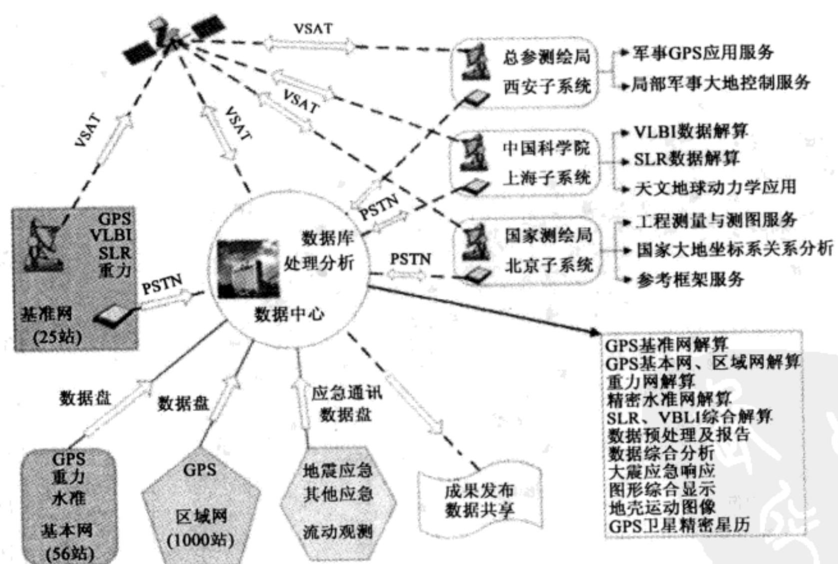


图 7.7　中国地壳运动观测网络数据传输与分析处理系统

（http://www.neis.gov.cn/item2/introduction/）

§7.3 区域及局部地壳运动的监测

刚性板块的假设是近似的。板块内部可能存在形变。在板块边缘地带上，在两个或多个板块的相互作用下，所引起的应变非常复杂，特别是在板块相互碰撞的地带，如阿尔卑斯造山带、喜马拉雅造山带和地中海构造活动区。显然，理想的刚性板块模型不足以描述构造运动的复杂性。

大地测量不仅是测定板块运动的有力工具，也是了解板块边缘地带、板块内部应变模式的重要手段。它可以提供区域及局部地壳运动特别是活动断层运动速度和碰撞地带地块运动数据，并间接地对地壳流变性、地震过程和地质构造的演变提供制约。

为了测定板块边缘地带的区域形变，需要较高的空间分辨率。为此，采取固定站与流动站相结合的方式，利用后者在形变区进行流动观测。美国采用这种方式监测三个地区的形变：一是沿着加利福尼亚州的圣安德烈斯断层，以监测太平洋板块和北美板块在边界上的相互作用引起的形变；二是在阿拉斯加南部，以研究太平洋板块俯冲到北美板块之下所产生的影响；三是美国西部广阔的盆地和山岭区。自1982年以来，美国仅在加利福尼亚州就设置了4个VLBI固定站、15个VLBI流动站。2003年美国开始实施地球透镜计划，主要也是围绕板块边缘地带区域的地壳运动的监测开展工作。为了满足板块边缘地带地壳运动监测所需要的高空间分辨率，地球透镜计划的第4部分即是利用INSAR在构造活动区进行大范围的空间连续应变测量。InSAR将有助于PBO研究，其原因在于空间上连续但时断时续的InSAR图像可以作为连续GPS点测量结果的补充。专用InSAR卫星将大大提高PBO的科学目标。此计划将对北美地区和太平洋板块提供一个空间间隔30~100米、时间间隔8天的INSAR测量数据。这些数据将揭示各种地形上精度达1mm的水平和垂直运动，配合GPS和应变观测数据将能够勾画地震和火山爆发前后地面位移分布图，从而进一步了解断层破裂和地震的机制。

在印澳板块与欧亚板块的碰撞地带，中外科学家布设了若干GPS监测点并进行了复测，获得了地壳运动的三维运动学图像，加深了人们对碰撞地带地壳运动的动力学机制的认识。

此外，我国的华北地区、川滇地区等一些典型地壳运动区域都布设有区域GPS监测网。

目前，高精度的GPS监测网已成为各国区域及局部地壳运动监测的主要手段。

局部地壳运动监测中断层形变监测是重点。对于断层形变的监测工作，随着大地测量技术的发展而不断推进，如美国的圣安德烈斯断层系的监测工作，从20世纪20年代开始，沿该断层进行每隔10年重复一次水平和高程控制测量。1959年开始了重复三边测量，而且将监测范围延伸到内华达州。1964~1967年沿该断层的各不同地段建立了30个小三角网和三边网，每个网的点数5~8个，边长200~500m，重测周期1~2a。到了20世纪70年代，以高精度导线作为监测整个断层系地壳运动的骨干。目前则布设了多功能的地壳运动监测网，主要采用空间技术并配以蠕变仪、倾斜仪、应变仪进行监测。

我国的断层形变研究起步于1966年的邢台地震，断层形变监测台网布设是空间上二维展布、平面铺开，着眼于监测某既定地区内多条断层或断层网络的形变，且偏重于垂直形变，主要以短基线、台站水准、流动水准测量为主，并结合倾斜仪、应变仪进行监测。目前GPS监测已成为监测的主要手段之一。

局部地壳运动监测另一个重点是陆地表层沉降的监测。全球许多地方都发生陆地表层沉降现象，其原因有人为的，也有非人为的。在大量抽取地下水供工业之用的地区，以及在采油、

采气和其他矿藏的地区，往往发生表层沉降，这是人为原因引起的。沉积物在水的作用下被压实，有机沉积物的氧化和收缩，以及喀斯特地形出现的塌陷，也会引起表层沉降，这是非人为的（胡明城等，1994）。

由于大量抽水引起的表层沉降，情况如图 7.8 所示：1-1′和 2-2′分别是抽水前的地面和地下水的水面，3-3′是耐水层面。当从钻井长期大量抽水时，地下水位下降，其下降量 h 随着离开钻井而逐渐减少，直到钻井影响半径 R 时，h 为零，这样地下就形成了漏斗形洼坑 5-5′，以抽水时钻井内的水位 4-4′为其底部，从而引起地面下沉，形成下沉曲线 6-6′。表层下沉的程度，取决于土壤的性质，在尚未压实的新表层，会发生最大的表层沉降。

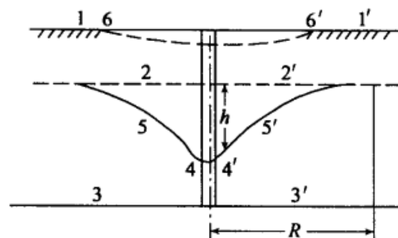


图 7.8 （胡明城等，1994）

目前全球已知的重要表层沉降地区有 150 个以上，美国、日本和墨西哥分布较多，东京某些地区最近几十年来的最大沉降达到了 4.3m。最严重的沉降区达到了 10m。估计在今后几十年，为了满足许多国家工业发展和人口不断增加的需要，必然加速自然资源的开发，全球会出现新沉降区，已有的沉降区将更趋严重。

表层沉降会引起严重的环境问题。例如，沿海的海面相对上升，沿海低洼地区潮水倒灌，沿湖低地泛滥，防洪系统效益降低，城市地下管道被破坏，建筑物的安全受到威胁，等等。对于从事工业总体规划、城市发展、自然资源开发、管道工程（特别是供水系统）等方面的科技工作者来说，必须了解陆地表层沉降带来的危险性及其对于社会环境的影响。对于大地测量工作者来说，需要在沉降区进行经常性的监测工作，提供精密数据以建立环境资料档案，以便有关部门随时掌握地面动态，及时采取措施，防患于未然。

由于陆地表层沉降的全球性，从 1969 年起，由国际水文学协会和联合国教科文组织联合主办了几次讨论会。教科文组织主持的国际水文学十年（从 1965 年开始）和国际水文学计划（1975 年开始）都推荐了陆地表层沉降研究计划。第一次国际讨论会是 1969 年在日本东京举行的，第二次国际讨论会于 1977 年在美国加利福尼亚州的阿纳海姆举行，第三次国际会议于 1984 年在意大利的威尼斯举行，第四次国际会议于 1991 年在美国的休斯敦举行。这四次会议的地点都选择在有严重沉降的地方，其用意在于使与会者有机会目睹陆地沉降引起的社会环境问题。以休斯敦为例，由于大量抽水引起的沉降约 2m；一个油田由于过度采油引起的沉降也约 2m。还有一个地区沉降了 3m，不得不围绕有几百户人家的一个居民区建筑一道高堤，在堤顶行车。1987 年的一场飓风中，风暴潮摧毁了该区一百多户人家的住宅。

由于大量开采地下水和高大建筑群的成片开发建设，北京市地面沉降呈现加速趋势。北京供水三分之二来自地下水，近年来，由于地下水的超量开采，北京平原地面沉降呈快速增加趋势。到目前为止，在东郊八里庄一大郊亭、东北郊来广营、昌平沙河一八仙庄、大兴榆垡一礼

贤、顺义平各庄等地已经形成了五个较大的沉降区，沉降中心累计沉降量分别达到722mm、565mm、688mm、661mm、250mm。最严重的地方，地表还在以每年20～30mm的速度下沉。为此，北京市于2004年7月22日启动了地面沉降检测网站预警预报系统，主要用于监测、研究和控制地面沉降的发生和发展。

有些因过量抽取地下水引起表层沉降的地区，可以采取回灌的方法使表层回升，在一定程度上缓解沉降问题，例如中国的上海市。其他国家也有同样的情况。如果一个地区只存在陆地表层沉降，没有构造运动，那么监测这种垂直运动是比较简单的。但是，有些地区既存在构造垂直运动，又有非构造原因的表层沉降，在大地测量结果中两者混在一起，很难分析，因而使问题复杂化了。

由于以上原因，在研究表层沉降问题时，应当一并考虑这两种沉降。特别要强调理论研究，建立流体抽取、区域性构造、两者的相互作用及其影响等方面的模型，而且还要就不同的流体、不同的深度和不同的构造环境来进行研究。在大量抽取流体的地区，由于地下液位有很大变化，除了引起表层沉降外，还会使局部重力场发生变化。在1981～1983年期间所进行的北京—天津—唐山—张家口地区的重力测量中，发现天津市周围重力值在26个月的期间持续地增加，达到了约$70\times10^{-8}m/s^2$，起因于地下水的抽取。由于重力场变化，当由重复水准测量测定表层沉降时，所得的结果并不是真正的表层沉降，其中混杂有重力场带来的影响。因此，在这样的地区，除了重复水准测量之外，还要有重复重力测量，以便顾及重力场变化对水准测量结果的影响。例如，美国为了监测亚利桑那州 Phoenix 市东南地区由于抽取地下水导致的表层沉降所引起的重力变化，在大约150个水准点上进行了重力测量；而为了测定新奥尔良市区的区域性沉降，在大约300个水准点上进行重力测量。

目前 INSAR 技术已被用于监测地面沉降，并取得了可喜的研究成果（王超、张红等，2002）。

§7.4 地壳水平运动监测的数据处理及分析

7.4.1 建立地壳水平运动模型法（胡明城等，1994）

此法是美国的 Snay et al. 于1978年提出的。它具有充分灵活性，可以综合利用各类大地测量数据，各个测期的观测量可以不同，所覆盖的区域不要求完全重叠，观测期相距的时间也不受限制，甚至已被破坏的点也可以利用。模型中的各参数被表示成大地坐标的函数，采用最小二乘估计求定这些参数，用于描述地壳水平运动。采用这一模型时，将监测区按自然存在的断层界线分为若干个单元。在一个单元中，一大地点在时刻t的大地坐标表示为：

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \varphi_0 + f_1(t-t_0) + f_3(t-t_0)^2 \\ \lambda_t &= \lambda_0 + f_2(t-t_0) + f_4(t-t_0)^2\end{aligned} \tag{7.1}$$

式中：t_0是固定的参考时刻，(φ_0,λ_0)是一大地点在该时刻的大地坐标，每一f都是φ_0和λ_0的函数，表示成以下形式：

$$\begin{aligned}f_1 &= b_{1.1} + b_{1.2}\varphi_0 + b_{1.3}\lambda_0 + b_{1.4}\varphi_0^2 + \cdots \\ f_2 &= b_{2.1} + b_{2.2}\varphi_0 + b_{2.3}\lambda_0 + b_{2.4}\varphi_0^2 + \cdots \\ f_3 &= b_{3.1} + b_{3.2}\varphi_0 + b_{3.3}\lambda_0 + b_{3.4}\varphi_0^2 + \cdots\end{aligned}$$

$$f_4 = b_{4.1} + b_{4.2}\varphi_0 + b_{4.3}\lambda_0 + b_{4.4}\varphi_0^2 + \cdots \tag{7.2}$$

式中:各 b 是待定的地壳动力参数,φ_0 和 λ_0 一般取至4次项。将式(7.2)代入式(7.1),便得出观测方程,待定量是未知坐标(φ_0,λ_0)和地壳动力参数。

不论各期观测中的观测量是什么,只要每得出一点的大地坐标(φ_i,λ_i),就可以立即得出形式如式(7.1)的两个方程。将各期观测中所得的方程(7.1)联合平差,就可以得出未知坐标(φ_0,λ_0)和各参数的最小二乘估值。这一模型把地壳水平运动表示成为时间的连续函数和位置的非连续函数,这种不连续发生在单元边界上。这一方法的另一优点是,对于断层区周围的大地点,其成果表中除了列有某日的大地坐标之外,还列出时刻 t_0 的坐标(φ_0,λ_0)和地壳运动参数的值,以便推算其他日期的大地坐标,就像恒星位置表一样。这个地壳水平运动模型把观测数据中所含的信息作了概括性处理,一些局部动力现象被平滑掉了。如果监测的目的在于得出一个地区地壳水平运动总的趋势,而不是局部细节,这样做是可以的。但是,有些重要的动力现象,例如跨越仍在运动中的断层的地壳运动,可能也被平滑掉,从而错误地被解释为位置的连续函数。为了避免发生这种情况,这种建立地壳水平运动模型的方法,最好是与直接比较相同观测量新、旧观测结果的方法配合起来应用。

7.4.2 活动断层区地壳水平运动监测网的数据分析

活动断层区地壳水平运动监测可认为主要是属于近场形变监测,这里所谓近场是指靠近引起地表形变的"源"而言的。由于这种形变"源"主要以断层运动的形式表现出来,因此近场形变测量往往以断层带及其附近为主要监测对象(陈鑫连等,1994)。根据近场形变监测的空间范围及其采样连续与否,又可分为跨断层的大地形变测量和定点断层形变测量,跨断层的大地形变测量主要有精密测距(或精密测角)和精密水准测量,目前GPS也已成为近场形变监测的一种主要手段。

波兰的Hermanowski于1985年提出一种通过建立测边测角网来监测活动断层区局部地壳水平运动的方法。由于活动断层区主要布设测角和测边网,目前这一方法仍有用途,它的基本思路是:在断层两盘各判定一组相对稳定的点,作为固定点组;断层每一盘各点的运动都以各自的固定点组为参考来求定(胡明城等,1994)。

应当尽可能选择位于地壳形变区之外的点作为稳定点。为此,需要事先了解监测区的地质构造和动态。波兰的劳顿建议通过对视位移函数的分析,来判定相对稳定的点。所谓视位移函数,是指两点之间的边长、方位角和高差的变化。沿着两点连接线的位移引起边长变化,垂直于此连接线的位移引起方位角变化,沿垂线方向的位移引起高差变化,这三个方向是互相正交的,因此,分析每两点的边长函数、方位角函数和高差函数,就可以为估计两点的相对稳定性提供充分信息。

为了获取选择相对稳定点所必要的数据,在水平监测网中,新、旧两期的测算必须以同一点和同一方位角为参考。在初步拟定了一组备选的相对稳定点之后,就每一期观测计算每两点之间的边长和方位角及其中误差,然后由新、旧两期的计算结果得出平差后的长度之差和方位角之差及其中误差,公式如下:

$$\begin{aligned} dS &= S - S' \\ d\alpha &= \alpha - \alpha' \\ m_{dS} &= \pm\sqrt{m_S^2 + m_{S'}^2} \\ m_{d\alpha} &= \pm\sqrt{m_\alpha^2 + m_{\alpha'}^2} \end{aligned} \tag{7.3}$$

其中:dS 和 $d\alpha$ 分别是新、旧两期观测期间长度变化和方位角变化;S'和 S 分别是新、旧两期观测所得的一边的平差边长;α'和 α 分别是新、旧两期观测所得的一边的平差方位角;$m_{S'}$和 m_S 分别是 S'和 S 的中误差;$m_{\alpha'}$和 m_α分别是方位角 α'和 α 的中误差;m_{dS}和 $m_{d\alpha}$分别是边长变化和方位角变化的中误差。

稳定准则采取以下形式:

$$
\begin{gathered}
|d\alpha_{JK} - d\alpha_{MN}| \leqslant L(|m_{d\alpha_{JK}}| + |m_{d\alpha_{MN}}|) \\
dS_{JK} \leqslant LM_{dS_{JK}} \\
dS_{MN} \leqslant LM_{dS_{MN}}
\end{gathered} \tag{7.4}
$$

其中:JK 和 MN 是初步拟定的备选相对稳定点网中的任意两条边;L 是一个系数,$1 \leqslant L \leqslant 3$。

水准网的稳定准则是:

$$
\begin{gathered}
|dh_i - dh_k| \leqslant L(|m_{dh_i}| + |m_{dh_k}|) \\
m_{dh} = \sqrt{m_h^2 + m_{h'}^2}
\end{gathered} \tag{7.5}
$$

其中:h'和 h 是新、旧两期水准测量中的平差高程,m_h 和 $m_{h'}$是其中误差;dh 是新、旧两期观测期间的高程变化,m_{dh}是其中误差。

稳定点往往不是一次可以判定的。首先取 $L=1$,就初步拟定的一组点中所有的点组合来检验稳定性准则。如果符合准则的点数不够,则视情况适当地放大 L,以达到要求的点数,一般 L 不得大于 2,最大不超过 3。

利用上述的相对稳定点判定准则,就整个网进行判定,就可以看出监测网覆盖的地区中断裂系分布情况和断层边界。在划定了断层每一盘的固定点组之后,这些点构成的网形在相互比较的新、旧两期观测之间保持不变。在大多数情况下,断层每一盘都可以判定一组固定点。在判定了断层两盘的固定点组之后,由跨越断层边界的一些边的长度变化和角度变化,来求定断层两盘的相对运动。这种运动用一个相对位移向量 W_t 和相对旋转 $d\alpha$ 来表示,如图 7.9 所示。

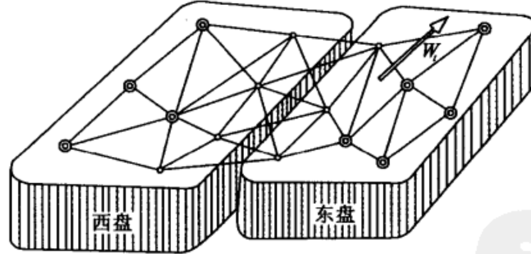


图 7.9 (胡明城等,1994)

新、旧两期观测结果都采用间接平差法处理。若以前一期的平差结果作为后一期观测平差的坐标初值,则可直接得出位移。由测站 C 观测位于断层同盘的两点 L 和 R 的角度改正数方程是:

$$
v_i = (a_R - a_L)\delta x_j - (b_R - b_L)\delta y_j - a_R \delta x_k + b_R \delta y_k + a_L \delta x_h - b_L \delta y_h + \beta_{初} - \beta_{测}
$$

其中:

$$\rho\frac{\sin\alpha_{jk}^{0}}{s_{jk}^{0}}=a_{R},\ \rho\frac{\cos\alpha_{jk}^{0}}{s_{jk}^{0}}=b_{R},\ \rho\frac{\sin\alpha_{jh}^{0}}{s_{jh}^{0}}=a_{L},\ \rho\frac{\cos\alpha_{jh}^{0}}{s_{jh}^{0}}=b_{L}。\tag{7.6}$$

其中：a,b 是 β 角左边（L）和右边（R）的方向系数；dx、dy 是 C,L,R 点位移向量的 x 分量和 y 分量；$\beta_{初}$ 是由前一期观测平差后的坐标所计算的角度；$\beta_{测}$ 是后一期观测的角度。

位于断层同一盘的两点 J 和 K 之间的边长改正数方程是

$$v_{d_i}=-\cos\alpha dx_J-\sin\alpha dy_J+\cos\alpha dx_K+\sin\alpha dy_K+d_{初}-d_{测}\tag{7.7}$$

其中：α 是 JK 边的方位角；$d_{初}$ 是由前一期观测平差后的坐标所计算的边长；$d_{测}$ 是后一期测量的边长。

位于断层异盘的两点，其间的边跨越断层边界，因而角度和边长改正数方程将含有表征断层两盘相对运动的元素。如图 7.10 所示，B 点的总位移量包括：

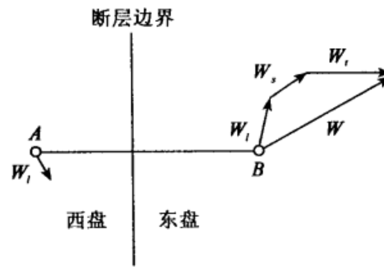


图 7.10

（1）表征 B 点局部运动的向量 $\boldsymbol{W}_l$，即是以东盘基准为参考计算的运动。

（2）断层东盘相对于西盘的旋转向量 $\boldsymbol{W}_s$，这一向量的大小逐点不同。

（3）表征东盘相对于西盘位移的大小和方向的位移向量 $\boldsymbol{W}_t$。位于东盘的每一点，这一向量相同。

断层东盘的每一点，总位移向量的 x 分量和 y 分量是：

$$\begin{aligned}dx_W&=dx_{W_l}+dx_{W_S}+dx_{W_t}\\dy_W&=dy_{W_l}+dy_{W_S}+dy_{W_t}\end{aligned}\tag{7.8}$$

东盘相对于西盘的旋转中心是不知道的，可设定它位于固定点组网形的重心。为了正确估计旋转的大小和旋转中心的位置，应当在一些选定的点上以一等精度测定方位角。

断层两盘的相对旋转 $d\alpha$ 是一个小角，就图 7.11 所示的 K 点可得出

$$\begin{aligned}dx_{W_S}&=Rd\alpha\sin\alpha=d\alpha\Delta y_{KS}\\dy_{W_S}&=Rd\alpha\cos\alpha=d\alpha\Delta x_{KS}\end{aligned}\tag{7.9}$$

式中：R 是由重心 S 到 K 点的距离。于是

$$\begin{aligned}dx_W&=dx_{W_l}+d\alpha\Delta y_{KS}+dx_{W_t}\\dy_W&=dy_{W_l}+d\alpha\Delta x_{KS}+dy_{W_t}\end{aligned}\tag{7.10}$$

在此假定下，位于断层异盘的点间的角度改正数方程有以下三种形式：

（1）如图 7.12(a)所示，当 L 和 R 点位于西盘，C 点位于东盘时：

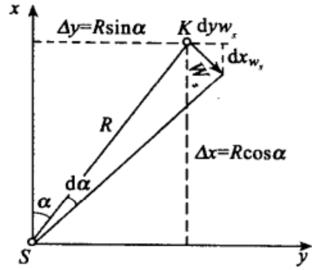


图 7.11

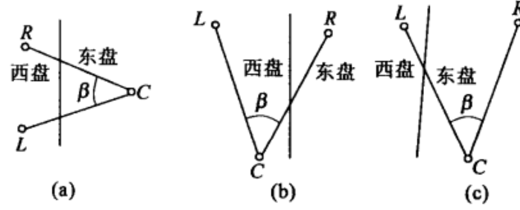


图 7.12

$$
\begin{aligned}
v_i = {} & a_L \mathrm{d}x_L - b_L \mathrm{d}y_L - a_R \mathrm{d}x_R + b_R \mathrm{d}y_R + (a_R - a_L)\mathrm{d}x_{Cl} - (b_R - b_L)\mathrm{d}y_{Cl} \\
& + (a_R - a_L)\mathrm{d}x_{Ct} - (b_R - b_L)\mathrm{d}y_{Ct} + [(a_R - a_L)\Delta y_{Cs} - (b_R - b_L)\Delta x_{Cs}]\mathrm{d}\alpha + l_i
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

(2)如图 7.12(b)所示，当 L 和 C 点位于西盘，R 点位于东盘时：

$$
\begin{aligned}
v_i = {} & (a_R - a_L)\mathrm{d}x_C - (b_R - b_L)\mathrm{d}y_C - a_R \mathrm{d}x_{R_l} + b_R \mathrm{d}y_{R_l} + a_L \mathrm{d}x_L - b_L \mathrm{d}y_L \\
& - a_R \mathrm{d}x_{Rt} + b_R \mathrm{d}y_{Rt} - (a_R \Delta y_{Rs} - b_R \Delta x_{Rs})\mathrm{d}\alpha + l_i
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

(3)如图 7.12(c)所示，当 L 点位于西盘，C、R 点位于东盘时：

$$
\begin{aligned}
v_i = {} & a_L \mathrm{d}x_L - b_L \mathrm{d}y_L - a_R \mathrm{d}x_{Rl} + b_R \mathrm{d}y_{Rl} + (a_R - a_L)\mathrm{d}x_{Cl} - (b_R - b_L)\mathrm{d}y_{Cl} - a_L \mathrm{d}x_{Ct} + b_L \mathrm{d}y_{Ct} \\
& - [a_R(\Delta y_{Rs} - \Delta y_{Cs}) - b_R(\Delta x_{Rs} - \Delta x_{Cs}) + a_L \Delta y_{Cs} - b_L \Delta x_{Cs}]\mathrm{d}\alpha + l_i
\end{aligned}
\tag{7.13}
$$

分别位于西盘和东盘的 J 点和 K 点之间的边长改正数方程是：

$$
\begin{aligned}
v_{d_{jk}} = {} & -\cos\alpha_{jk}\delta x_j - \sin\alpha_{jk}\delta y_j + \cos\alpha_{jk}\delta x_{kl} + \sin\alpha_{jk}\delta y_{kl} \\
& + \cos\alpha_{jk}\delta x_{kt} + \sin\alpha_{jk}\delta y_{kt} + (\cos\alpha_{jk}\Delta y_{ks} + \sin\alpha_{jk}\Delta x_{ks})\delta\alpha + l_{jk}
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

采用间接平差时，监测网应当有一确定的坐标原点、定向和尺度。在测边网和边角网中，尺度由测距结果得出；原点设在由各固定点构成的网形的重心，即原点的坐标等于各固定点坐标的平均值。

各固定点上未知的位移服从于以下的条件

$$
\begin{aligned}
\sum \mathrm{d}x_{i_l} = 0 \qquad & \sum \mathrm{d}y_{i_l} = 0 \\
\sum \mathrm{d}x_{K_l} = 0 \qquad & \sum \mathrm{d}y_{K_l} = 0
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

其中：$\mathrm{d}x_i$ 和 $\mathrm{d}y_i$ 是西盘各固定点零位移的改正数；$\mathrm{d}x_K$ 和 $\mathrm{d}y_K$ 是东盘各固定点零位移的改正数。

监测网的定向由前期观测的平差结果取得。后期观测网相对于前期网可能的旋转，由固定点的位移分量 $\mathrm{d}x_{i_l}$、$\mathrm{d}y_{i_l}$和 $\mathrm{d}x_{K_l}$、$\mathrm{d}y_{K_l}$来求定，以固定点网形的重心为旋转中心。为了由平差得出东盘相对于西盘可能的旋转的大小，引入以下的两个定向条件：

$$
\begin{aligned}
\sum (a\mathrm{d}x_{i_l} - b\mathrm{d}y_{i_l}) = 0 \\
\sum (a\mathrm{d}x_{K_l} - b\mathrm{d}y_{K_l}) = 0
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

其中：a 和 b 是西盘和东盘固定点重心之间连接线的方向系数。西盘的固定点由 1 到 i，东盘的固定点由 $i+1$ 到 K。

由平差结果得出以下的各元素及其精度估值：

(1)位于断层两盘的每一点的局部运动向量 $\boldsymbol{W}_l$。

(2)东盘相对于西盘的位移向量 $\boldsymbol{W}_t$。

(3)东盘相对于西盘的旋转 $d\alpha$。

东盘各点总位移向量的分量 dx_ω 和 dy_ω 由方程(7.10)得出。

§7.5 地壳垂直运动监测数据处理及分析

通常地壳垂直运动可以分为以下几类(陈鑫连等,1994):

(1)长趋势的区域构造运动

其特点是涉及的区域大,速率通常较低,而且运动的方向和速率一般认为在一个较长时间内保持相对稳定。运动速率的分布常常与大的地质地貌构造单元有较密切的关系。

(2)局部的构造运动

它涉及的范围较小,例如一些活动断裂两侧的地块间的相对运动,其运动在空间分布上多变,速率通常比长趋势的构造运动要高。同一地点的长期监测有时可发现长趋势变化和周期性变化的特征。

(3)随机构造运动

这一类运动的机理不甚清楚,它可能是地壳外部和内部某些不确定因素造成的地壳垂直运动,这类运动在空间分布上多变(即各处不同),例如某些地区观测到的地壳垂直运动的脉冲现象。

(4)非构造运动

这一类地壳运动的主要特征是机理比较清楚,可以找到比较确切的直接外部原因,其幅度和影响的范围则随原因的不同而差别很大。例如;因过量抽取地下油、气、水造成的地面沉降,矿山采矿区的塌陷以及冻土影响、冰期后回弹、大型构筑物的重荷引起的局部地面变形、水库蓄水后库区周围的局部地面沉降,等等。

地壳垂直运动监测主要通过水准测量、重力测量进行,随着空间技术的发展,GPS 和 INSAR技术也将成为地壳垂直运动监测的主要手段。

7.5.1 由水准测量数据求定地壳垂直运动的方法和模型

重复水准测量的空间分布情况往往是很复杂的。重复测量路线有时彼此无联系,成为分散状态。有些水准路线不是重测一次,而是重测多次。反之,有些路线只有一次测量,没有重测。重复水准测量的时间分布大都是不均匀的。为了由水准测量数据求定地壳垂直运动,必须根据不同的情况采用不同的平差方法和模型。比较通用的模型是利用多项式或多二次分析,以速度面来描述高程变化。这些模型可以测定地壳的非线性运动、伴随地震或间歇的运动以及特定地块的垂直运动。它们可以利用分散的重复水准测量线段来控制速度面的形状,还可以利用不是来源于水准测量的数据,例如验潮数据和成对的湖泊水位站记录。就水准网平差来说,这些基于动态模型的平差方法比过去的静态模型更为优越,因为当不同时期施测的水准网联合起来平差时,也需要根据垂直运动地区的新、旧数据来建立垂直运动模型,以使观测值、所求出的运动(或速度)和公布的高程之间取得一致。

由水准测量数据求定地壳垂直运动的平差模型,可以分成如下几种(胡明城等,1994)。

7.5.1.1 简单模型

一个小监测区的各水准路线彼此联系，都是重复测量一次，两次测量相距的时间相当长，而且每次测量都是在短时期内完成的。这样的两次水准测量可以独立平差。比较两组平差后的高程，就可以算出垂直运动。为了便于比较，假定一个公共点的运动是已知的，通常取为零，这样计算的垂直运动是相对的。如果有一个点是验潮站，可以由验潮记录推断该点绝对运动，则在进行比较时，加入一个常数，就可算出其他各点的绝对运动。运动数值除以两次水准测量相隔的时间，就得到运动速度。

7.5.1.2 水准网动态平差

对于大范围、多期重复精密水准测量的整体动态平差，着重考虑下述几个因素：

(1)地壳运动的方式。地壳是在不断运动的，在大多数地区，这种运动是缓慢的，在不太长的时期(几年到几十年)内，可以看做是时间的线性函数，而在某些特定地区，运动方式比较复杂，甚至出现由于地震等原因造成的突变。

(2)起算基准的选取。水准测量测定的是水准点之间的相对高差。为了求得各点的高程，平差计算中必须事先给定起算基准(起算高程面)。通常的大地水准测量，目的是求得各水准点的高程值，仅进行了一期观测，平差中可以假定一个或几个点的高程为已知，作为一个不变的基准。对于垂直形变监测网来说，其目的在于通过多次重复观测来确定各点的变化值。由于地壳是在不断运动的，能否以及如何找寻一个不变的(或相对稳定的)起算基准就成了一个迫切需要解决的问题。就全国来说，要在如此大的范围内找到一个或几个固定点作为不变的高程起算基准是很困难的。但是，相对而言，假定某些点的平均高程保持不变却是可行的。

(3)观测过程中地壳运动的顾及，除了在起算基准的选取中要考虑到地壳的运动外，更进一步，如果在每期资料的观测过程中地壳的运动也不能忽略的话，问题更复杂一些。一个大的垂直形变监测网，复测一个周期所花费的时间，短则几个月，长则几年甚至几十年。全国性的精密水准网，是分区、分批逐步完成的，部分地区已施测了几个周期，而另一些地区却刚开始布设，这样，每期资料跨越时间很长，各线路具有不同的复测次数，复测的时间间隔也不等。而且每次观测也不总是沿同一线路进行，甚至有些资料都无法区分是前期还是后期。如何充分利用不同时期测定的形变资料并在平差中顾及观测期间产生的地壳形变，应用动态间接观测平差方法可以较好地给予解决。

考虑到绝大多数水准点可能存在的运动形态和平差计算的简单、实用，水准点的运动用下述5种运动模型来描述(张祖胜等，1991)。

对于固定点(已知高程的稳定点)：

$$x_{it} = x_{i0} \tag{7.17}$$

对于未知高程的稳定点：

$$x_{it} = x_{i0} + \Delta_i \tag{7.18}$$

对于运动缓慢地区的水准点：

$$x_{it} = x_{i0} + \Delta_i + v_i \Delta t \tag{7.19}$$

对于个别运动比较复杂的水准点：

$$x_{it} = x_{i0} + \Delta_i + v_i \Delta t + \frac{1}{2} a_i \Delta t \tag{7.20}$$

对于在 t_i 时刻由于某种原因(例如地震)产生高程突变的点，在 t_i 以前采用公式(7.19)，在 t_i 以后采用公式

$$x_{it} = x_{i0} + \Delta_i + v_i \Delta t + \Delta_{t_i} \tag{7.21}$$

在上述公式中，x_{it} 为 i 点在 t 时刻的高程值，x_{i0} 为 i 点在起始时刻 t_0 时的近似高程值，Δ_i 为其平差改正数，v_i 为 i 点在 t_0 时刻垂直运动的速率，a_i 为其在 t_0 时刻的加速度，$\Delta t = t - t_0$，Δ_{t_i} 为其在 t_i 时刻的高程突变量。

未知参量可以分为四类：常数参量(Δ_i)、一次参量(v_i)、二次参量(a_i)和突变参量(Δ_{t_i})。

设 L 为观测值(高差)向量，其中 $l_k(k = 1,2,\cdots,n)$ 为时刻 t_k 时测定的由 j 点至 i 点的高差值，则有

$$\begin{aligned} l_k &= j(x_{it}, x_{jt}) + \varepsilon_k \\ \varepsilon_k &\sim N(\sigma, \sigma_k^2) \end{aligned} \tag{7.22}$$

误差方程为

$$v_k = (x_{it} - x_{jt}) - l_k \tag{7.23}$$

其中：v_k 的具体表达式由 i 点和 j 点的运动模型所决定。对 i 点应用公式(7.19)，j 点应用公式(7.21)，则有

$$v_k = \Delta_i - \Delta_j + \Delta t_k v_i - \Delta t_k v_j - \Delta_j + l_k \tag{7.24}$$

式中：$\Delta t_k = t_k - t_0$，$t_k = x_{i0} - x_{j0} - l_k$。

由上可见，对于不同运动模型的点，误差方程是很容易得到的。应用矩阵符号，观测方程可记为

$$V = AX + B \tag{7.25}$$

式中：A 为系数矩阵，$R(A) = r_0 \leqslant r$，秩亏数 $d = r - r_0 \geqslant 0$。在 $V^{\mathrm{T}}PV = \min$ 的条件下求解，有法方程

$$NX + n = 0 \tag{7.26}$$

式中：$N = A^{\mathrm{T}}PA$，$n = A^{\mathrm{T}}PBP$，为 L 的权矩阵。

为了消除形亏，要有足够多的观测量。对于采用式(7.18)、(7.19)、(7.20)模型的点，观测次数分别不能少于1、2、3次。对于采用式(7.21)模型的点，观测次数应为3次或更多，并且必须在突变前后进行观测。

平差中需要有足够的起算数据，用以消除秩亏。当起算数据不足时，$d > 0$，法方程有无穷多组解，通解形式为

$$X = N^- n \tag{7.27}$$

式中：N^- 为矩阵 N 的 g 逆。为了求得惟一的最优解，就必须补足起算基准，这可用附加最小范数条件来实现。

附加范数条件的一般形式为

$$X^{\mathrm{T}} P_X X = \min \tag{7.28}$$

式中：P_X 为 X 的权矩阵，表示 X 中各元素在确定起算基准中所起作用的大小。在这样条件下求解称为加权秩亏网平差。有

$$X = Q_{Pn} = Q_{XP} \tag{7.29}$$

未知参数值 X 的协因数阵为

$$Q_{XP} = Q_P N \theta_P = Q_P - GG^{\mathrm{T}} \tag{7.30}$$

式中：$Q_P = (N + PXGG^{\mathrm{T}}P_X)^{-1}$。附加阵 G^{T} 应满足下列条件

$$
\left.\begin{array}{l}
R(G^{\mathrm{T}})=d=r-r_0\\
nG=0\\
G^{\mathrm{T}}P_XG=E
\end{array}\right\}
\tag{7.31}
$$

起算基准也可采用附加起算(约束)条件的方法确定。与式(7.28)相应的起算条件为

$$
S^{\mathrm{T}}P_XX=0 \tag{7.32}
$$

S 应满足的条件为

$$
\left.\begin{array}{l}
R(S^{\mathrm{T}})=d\\
n_S=0
\end{array}\right\}
\tag{7.33}
$$

式(7.33)第一式表示起算条件个数应等于 N 的秩亏数并且各条件系数向量相互线性无关;第二式表示起算条件系数向量应相应与法方程的常数项向量正交。

根据我们建立点位运动模型时的设想,动态水准网中具有突变参数和二次动态参数的点仅为少数,因此通常需要附加的起算条件只有两个,即式(7.32)中

$$
S^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\cdots1 & 1 & 0\cdots0 & 1 & 0\cdots0\\ 0\cdots0 & 1 & 1\cdots1 & 1 & 0\cdots0\end{bmatrix}
$$

$$
P_X=\begin{bmatrix}P_{X1} & \\ & P_{X2}\end{bmatrix}
$$

式中:S^{T} 第一子块相应于静态参数 Δ_i;第二子块相应于一次动态参数 v_i;第三子块相应于 a_i 及 $i\Delta_i$、P_{X1}、P_{X2};r 分别相应于 S^{T} 的第一、二、三子块。

当 P_{X1} 及 P_{X2} 为单位矩阵时,称为伪逆动态平差。当

$$
P_{X1}=\begin{bmatrix}E_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad P_{X1}=\begin{bmatrix}E_2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}
$$

时,称为拟稳平差。当 P_X 为一般的权矩阵时,称为带权秩亏水准网动态平差。在经典平差、伪逆平差和拟稳平差中,网中的点被区分为两类:一类参与起算的确定,它们的权相等;另一类不参与,其权为零。而在带权秩亏网平差中,对所有点不加严格区分,它们在起算基准确定中贡献大小由 P_X 给定。P_X 每个元素可取 0 ~ 1 之间的数。

实际计算时,我们采用附加条件法,其法方程系数矩阵 N 为

$$
\overline{N}=\begin{bmatrix}N & S\\ S^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix} \tag{7.34}
$$

观测权阵 P 可以根据先验方差确定,但实际上,由于残差 V 的大小不仅取决于资料观测误差,还取决于模型的代表误差,因此,只根据观测值的精度确定 P 并不一定合适。实际计算中可以将观测值按类型,例如一、二等,又如按山区、平原,分成若干组($i=1,2,\cdots,S$),进行方差分量估计来重新调整 P_i。

水准测量成果带有系统误差,例如尺长误差、磁场对自动安平水准仪的影响误差等。这些误差的特点是与仪器有关,与路线有关。例如尺长误差等于尺长系数误差与路线高差的乘积,磁场影响误差等于仪器磁常数与路线纬度差的乘积。在这里尺长系数误差或仪器磁常数是因仪器而异的未知参量,而路线高差或纬度差都是事先已知的(仅需知概略值)。因此,只要在每个误差方程中增加相应的未知参数和已知系数的相乘项,如对尺长误差来说,式(7.24)就可改成如下形式:

$$
v_k=\Delta_i-\Delta_j+\Delta_kv_i-\Delta_j+\Delta Hd+l'_k \tag{7.35}
$$

式中：d 为所得用标尺的尺长系数误差；ΔH 为测段近似高差。

同样，对磁场影响来说，式(7.24)可改成如下形式：

$$v_k = \Delta_i - \Delta_j + \Delta t_k v_i - \Delta t_k v_j - \Delta_j + \Delta\varphi\theta + l_k \tag{7.36}$$

式中：θ 为新用仪器的磁场影响系数；$\Delta\varphi$ 为测段的纬差。应用上述的误差方程组成法方程并解算之，就可求得这些系统误差的大小，并可得到顾及了这些误差后的平差结果。

7.5.1.3 多面函数拟合法

由于地壳运动的空间变化通常很复杂，采用一般的函数模型达不到比较好的拟合效果，20世纪70年代初美国 Hardy 教授提出了多面函数拟合法，并用于地壳运动曲面的拟合。

多面函数拟合曲面的理论基础是：任何一个圆滑的数学表面总可以用一系列有规则的数学表面的总和以任意精度逼近。假设地面的垂直运动在空间上是连续的，地面点垂直运动速率的连续分布构成了垂直运动速率曲面。地面任一点的垂直运动速率(高程变化速度)可表示为

$$v(x_a, y_a) = \sum_{j=1}^{m} c_j Q_j(x_a, y_a) = \sum_{j=1}^{m} c_j[(x_a - x_j)^2 + (y_a - y_j)^2 + \delta]^k \tag{7.37}$$

式中：c_j 是待定系数；$Q_j(x_a, y_a)$ 为核函数；(x_j, y_j) 是核函数中心点的坐标；δ 是平滑因子，一般应大于零，其作用是改变核函数的性状，δ 值越大，核函数越平缓，反之则越陡峭；m 是核函数个数；k 是一个可供选择的非零实数，k 一般取 0.5 或 -0.5。

核函数中心点的不同分布对拟合和插值精度都有很大的影响。研究表明，核函数中心点应尽可能相对均匀地覆盖整个研究区域，尤其是水准点密集之处应更大比例地减少核函数中心点，这样一般能够达到比较满意的拟合效果。由于多面函数拟合可以根据实际观测点分布和速率值的空间变化特征来合理地进行核函数数目、中心点的位置配置，因而多面函数拟合可以达到一般曲面拟合难以达到的拟合效果。

垂直运动速率曲面拟合可以推广到水平运动中去，通常把地面任一点的水平运动用位移或位移速率矢量在地平面两坐标轴的投影(u, v)或称坐标分量来表示，在假定地面点的运动在空间上是连续的条件下，由 $u(x, y)$、$v(x, y)$ 分别构成两个运动分量的运动曲面，可以分别对两个运动分量进行曲面函数拟合以确定曲面函数的参数，这样地表任一点的运动都有一对函数与之对应，因此可以得到空间连续分布的水平运动矢量场(刘权威，1995)。

7.5.1.4 考虑两期测量之间的间歇性或非线性运动的水准网平差模型

若考虑两次水准测量之间地壳的间歇性或非线性运动，且间歇性或非线性运动可用一模型来拟合。区内在相继两次水准测量之间所发生的地震或间歇相联系的高程变化可表示为：

$$h_{a,i} = h_{a,0} + v(x_a, y_a)(t_i - t_0) + \sum_{j=1}^{n} u_j \cdot (x_a, y_a, x_j, y_j, t_j, d_j) \tag{7.38}$$

式中：n 是地震或间歇的次数；t_j 是它们发生的时刻；d_j 是地震深度，采取与(x, y)相同的单位；(x_j, y_j)是这些事件发生地点的坐标。当间歇性高程变化随着离开事件发生地点的距离而逐渐减小时，式(7.38)中函数 u 的合理选择是：

若 $t_i < t_j$ $\qquad u(x, y, x_j, y_j, t_j, d_j) = 0$

若 $t_i > t_j$

$$u = \sum_{j=1}^{n} a_j[(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + d_j^2]^{-1/2} \tag{7.39}$$

其中：a_j 是平差中的待定参数。对于每一地震或间歇，平差中只引入一个这样的未知数，这是一个很重要的优点。在平差之后，就可以求出这些事件在任一时刻或任一地点的影响的大小。如果平差模型未考虑间歇性运动，则在平差之前，必须把怀疑受到了地震影响的观测值舍去。舍去观测值应当看成是一种最后选择。这样做很难证明是正当的，除非对水准测量结果的怀疑有充分根据，或者重复水准测量结果不足以解出间歇性运动。

该模型还有另一种灵活性，它可以考虑特定地块的垂直运动。这种运动的特点是断层线上运动不连续。例如，按图 7.13 所示的断层分布，可将监测区分为地块 P，Q 和 R。地块 P 上一点 A 在时刻 t_j 的高程表示为：

$$h_{a,i} = h_{a,0} + v_p(x_a, y_a)(t_i - t_0) \tag{7.40}$$

其中：v_p 描述地块 P 的速度面。A 点和地块 Q 上的 B 点之间的高差由下式给出：

$$\Delta h_{b-a,j} = h_{a,i} - h_{a,0} + [v_Q(x_b, y_b) - v_p(x_a, y_a)](t_i - t_0) \tag{7.41}$$

这一模型的基本思想是：每一点都位于一地块上，每一地块都有自己的速度面。方程(7.40)可以增加一些项，以考虑发生在地块内的间歇性或非线性垂直运动。

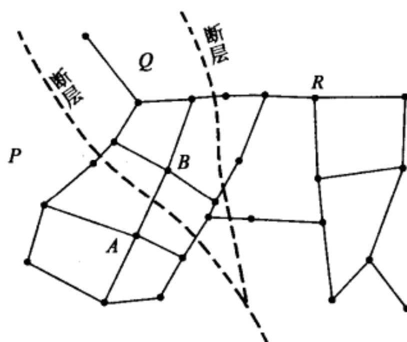


图 7.13 断层及水准测量线分布(胡明城等，1994)

平差模型可以解出地块运动、间歇性运动和加速度，极大地提高了它的灵活性。但这种高度灵活性又引起了这样的顾虑：差不多任何一种粗差或系统误差都可能混同为地壳运动。反之，如果采用硬性的平差模型，又会导致相反的情况：异常的地壳运动将被迫表现为似乎是以常速度发生的，而且部分地为大的观测值改正数所吸收。因此，理想的平差模型应当是，既有充分的灵活性，又可以如实地描述任何类型的地壳垂直运动。灵活性的运用要力求慎重，适度而止。这种适度应当是在考虑了监测区的地震活动、地质构造和工程建设活动之后所认可的(胡明城等，1994)。此外，对于地震引起的形变可以通过诸如位错理论这样一些物理模型来建立地表变形与特定的物理现象之间的联系，从而通过观测结果来研究和解释这些现象(陈鑫连等，1994)。

7.5.2 由水准测量和重力测量数据求定地壳垂直运动(胡明城等，1994)

对于地壳垂直运动最敏感的数据是水准测量和重力测量数据。由重复水准测量所得的原始数据或平差数据的变化，与重力场及其随时变化有关，不能代表真正的地壳垂直运动。这样的变化只能看成是表观的高程变化。正高和正常高的参考面分别是大地水准面和似大地水准

面，由于它们的形状随时在变化，所以正高或正常高的变化是地壳垂直运动和参考面变化两者的合成。德国的格鲁坦(Groten)等人提出用比较经济的重复重力测量代替重复水准测量，来求定地壳垂直运动。这种方法的基本思想是：假定逐点的重力变化和水准测量所得的高程变化之间存在线性关系，那么就可把观测的重力变化转换为高程变化。这样推导的高程变化除了精度不足之外，还附加了人为的假定，而这种假定未必符合实际。因此，这样得出的结果也不能代表真正的地壳垂直运动。德国的赫克(Heck)等人指出，只有把重复水准测量和重复重力测量结果在区域范围或全球范围内结合起来，才能摆脱人为假设，得出比较符合实际的相对地壳垂直运动。为了确定绝对运动，必须由空间大地测量方法至少求出一个点相对于参考系的绝对垂直运动。

由观测所得的重力数据和水准测量数据的变化来推导地壳垂直运动的问题，可以表达为位理论的边值问题。

将沿着水准路线的重力和水准测量结果结合起来，可以得出相对于基本点的重力位的随地变化(地球位数)，这是周知的。假定任何时候观测的重力差和位差数据都归算到了固定的时刻 t_i 和 t_k，而且作用于水准测量和重力测量的重力场随时变化的所有不属于地球重力场的部分(例如固体潮影响)都已通过适当的改正而消除，这时，边值就包括两种可观测的量：

(1)地面点 P 相对于基本水准点 P^0 的位差随时间的变化

$$\Delta_i w = [w(p_k, t_k) - w(p_k^0, t_k)] - [w(p_i, t_i) - w(p_i^0, t_i)] \tag{7.42}$$

(2)在时间 $t_k - t_i$ 中重力随时间的变化

$$\Delta_i g = g(p_k, t_k) - g(p_i, t_i) \tag{7.43}$$

式中的 p_i 和 p_k 指在时刻 t_i 和 t_k 的同一地面点 P，基本水准点 P^0 的位置也在随时变化，所以也附有下标 i 和 k。

假定已知整个地面上的边值 $\Delta_i w$ 和 $\Delta_i g$，就可利用它们解边值问题，类似于解 Molodensky 问题。若地球的引力常数和全部质量不变，则一地面点的垂直位移 Δh 可用下式作零级逼近

$$\Delta h = -\frac{\Delta_i w}{G} + \frac{\delta \overline{w}_1}{G} + \frac{R}{2\pi G}\iint_\sigma \left(\Delta_i g' - \frac{2}{\pi}\Delta_i w'\right)\cdot\left(s(\psi) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\sigma' \tag{7.44}$$

式中：G 是地面上的平均重力值；R 是地球的平均半径；$s(\psi)$ 是司托克斯函数；σ 是单位球，其面元是 $\mathrm{d}\sigma$。积分中的撇号(′)表示取决于变化的点的各量。

$\frac{\delta \overline{w}_1}{G}$项描述地球重心相对于一“固定”参考系的时间变化所引起的地面点垂直位移，是不能由重复重力测量和水准测量推导而得出的。由于 $\delta \overline{w}_1$ 在小区域内可以认为是常数，相对位移不会受到这一项的影响。如果所用的参考系的原点定义为与地球重心重合，则式(7.44)中的$\frac{\delta \overline{w}_1}{G}$项就消失了。

图 7.14 是用式(7.44)对地壳垂直运动作零级逼近的几何解释。为简单起见，假定基本点 P^0 的位置和重力位都无变化。这样，$-\frac{\Delta_i w}{G}$项可以理解为地面点正高的变化 $\Delta_i H$。式(7.44)中的积分是大地水准面对于椭球面的差距 N 的时间变化 $\Delta_i N$。因此，Δh 可以解释为地面点对于椭球面的大地高随时间的变化。

$$\Delta h = \Delta_i H + \Delta_i N \tag{7.45}$$

$$\Delta_i H = H_k - H_i = -\frac{\Delta_i w}{G} \tag{7.46}$$

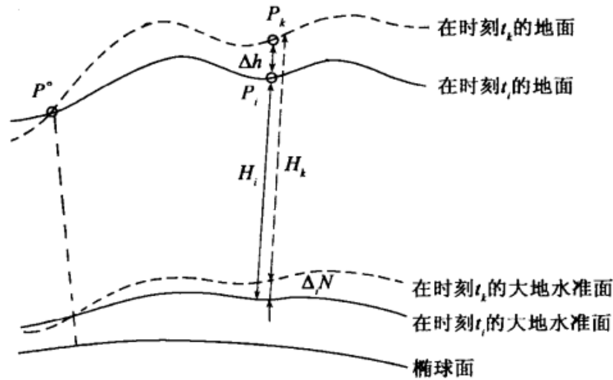


图 7.14 地壳垂直运动示意图(胡明城等,1994)

$$\Delta_i N = \frac{R}{4\pi G}\iint_\sigma \left(\Delta_i g' - \frac{2}{R}\Delta_i w'\right)\cdot\left(s(\psi) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\sigma' \tag{7.47}$$

这一解释暗示地假定所采用的参考椭球的形状、大小、定向以及相对于地球重心的位置都无变化。在一般情况下,基本水准点 $P^\cdot$的位置是随时变化的。因此,研究 A 和 B 两点间的相对垂直位移比较方便:

$$\Delta h_B - \Delta h_A = -\frac{1}{G}\{[w(B_k,t_k) - w(A_k,t_k)] - [w(B_i,t_i) - w(A_i,t_i)]\} + \frac{R}{4\pi G}\cdot\iint_\sigma f'(s(\psi_B) - s(\psi_A))\mathrm{d}\sigma' \tag{7.48}$$

上式积分中出现的边值可由下式表示:

$$f = [g(p_k,t_k) - g(D_k,t_k)] - [g(p_i,t_i) - g(D_i,t_i)] - \frac{2}{R}\{[w(p_k,t_k) - w(p_k^0,t_k)] - [w(p_i,t_i) - w(p_i^0,t_i)]\} \tag{7.49}$$

由式(7.49)可以看出,为了求定相对垂直运动,只需要相对于基准重力点 D 进行相对重力测量,而且 D 点还可以与基本水准点 P^0 重合,无须绝对重力测量。

方程(7.44),(7.47)和式(7.48)中的积分在理论上必须扩及全球,也就是说必须利用地面上所有的点的重复水准测量和重力测量结果。但从实用观点来看,为了研究局部或区域范围的相对地壳垂直运动,并不需要覆盖全球的数据,因为根据斯托克斯函数的特性,边值对于 Δh 的影响随着距离的增加而迅速减小。

联合重复水准测量和重力测量数据由方程(7.42)~(7.49)计算相对地壳运动,是一种严密方法,摆脱了任何假设,但测算过程太繁,工作量很大。为了简化起见,也不应当完全放弃合理的假设。对于上述的 $\Delta_i g$ 和 $\Delta_i H$ 之间存在线性关系的假设,Molodensky 从理论地球物理观点作过探讨,认为在很多情况下是正当的,也为一些实验所证实。现将这一线性关系写成如下形式:

$$\Delta_i g = a + b\cdot\Delta_i H \tag{7.50}$$

由于正高改正数的随时变化很小,以水准测量所得的高程变化 $\Delta_i n$ 来代替正高变化 $\Delta_i H$ 不会引起显著误差,故

$$\Delta_i H \approx \Delta_i n \tag{7.51}$$

如果已知线性关系式的常数 a 和 b，$\Delta_i n$ 和重力时间变化 $\Delta_i g$ 之间就可以互相转换。将监测区中若干个水准测量和重力测量共同点上的 $\Delta_i g$ 和 $\Delta_i n$ 数据作最小二乘拟合，就可以求出这两个常数。

将(7.50)、(7.51)两式代入式(7.46)和(7.47)，就可以得出原始公式(7.44)的两种变体，相应地得出两种简化的方法。这些方法都需要知道常数 a 和 b，但所利用的数据不同：第一种方法利用重复水准测量数据，第二种方法则利用重复重力测量数据。

第一种方法根据的公式是

$$\Delta_i H = -\frac{\Delta_i w}{G} \approx \Delta_i n \tag{7.52}$$

$$\Delta_i N = -\frac{R}{2G}\cdot a + \frac{1}{2\pi}\left(1 + \frac{R}{2G}\cdot b\right)\cdot \iint_\sigma \Delta_i n' \cdot \left(s(\psi) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\sigma' \tag{7.53}$$

取 $a = 1\times10^{-8}\,\mathrm{m/s^2}$，式(7.53)的第一项等于3.3mm。

简化的第二种方法所根据的公式是

$$\Delta_i H = \frac{\Delta_i g}{b} - \frac{a}{b} \tag{7.54}$$

$$\Delta_i N = \frac{a}{b} + \left(1 + \frac{2G}{Rb}\right)\cdot \frac{R}{4\pi G}\iint_\sigma \Delta_i g'\left(s(\psi) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\sigma' \tag{7.55}$$

由(7.54)、(7.55)两式可知，在 $\Delta h = \Delta_i H + \Delta_i N$ 中，a/b 项抵消了。取 $a = 1\times10^{-8}\,\mathrm{m/s^2}$，$b = -0.2\times10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}$，这一项约为5mm。

严密公式(7.44)含有两类数据，可以把它分为两部分，各含一类数据：

$$\begin{aligned}
\Delta_i N &= Z_1 + Z_2 \\
Z_1 &= \frac{1}{2\pi}\iint_\sigma \Delta_i n' \cdot \left(s(\psi) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\sigma' \\
Z_2 &= \frac{R}{2\pi G}\iint_\sigma \Delta_i g' \cdot \left(s(\psi) - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\sigma'
\end{aligned} \tag{7.56}$$

借助于式(7.56)，两种简化方法中 $\Delta_i N$ 的公式表示为：

$$\Delta_i N = -\frac{R}{2G}\cdot a + \left(1 + \frac{R}{2G}\cdot b\right)\cdot Z_1 \tag{7.57}$$

$$\Delta_i N = \frac{a}{b} + \left(1 + \frac{2G}{Rb}\right)\cdot Z_2 \tag{7.58}$$

第8章　地壳应力与应变分析

地壳岩石中千姿百态的构造变形都是力的作用的结果。研究地壳运动，一方面是建立地壳运动的运动学模型，直观地描述地壳构造运动的形式，但更重要的是要研究各种构造变形的力学成因和相关规律，建立动力学模型。本章主要从实用的观点出发，首先阐述地壳应力与应变分析的概念，进而介绍现今地壳运动和应变分析的模型和方法。

§8.1　地壳应力与应力分析基础

8.1.1　外力和内力

处于地壳中的任何地质体，都会受到相邻介质的作用力。这种研究对象以外的物体对被研究物体施加的作用力称为外力。由外力作用引起的物体内部各部分之间的相互作用力称为内力。外力与内力是一对相对的概念，当研究范围扩大或缩小时，外力可以变为内力，内力可以变为外力。例如，当考察一个岩体内的某个矿物颗粒的受力时，周围颗粒对该颗粒的作用力是外力；当研究对象是该岩体时，周围颗粒与该颗粒之间的相互作用力就变成了内力，而围岩对岩体的作用力是外力；当研究的对象扩展到该岩体所在的板块时，围岩与该岩体之间的相互作用力又变成了内力，而相邻板块对该板块的作用力就成了外力。

8.1.2　截面上的应力、正应力、剪应力

在考虑研究对象内部某一截面的内力时，可设想沿此截面将物体截开，并将其中的一部分移去，但仍保留其对另一部分的作用力，然后考虑被保留部分的平衡，则可计算出该截面上的内力。此分析方法称为截面法。当然，内力在截面上一般不是均匀分布的，但其变化可以认为是连续的。为了研究截面某点（如图8.1中 n 截面上的 m 点）附近的内力集度，可以围绕该点取一微小面积 δA，设其上的作用力为 $\delta \boldsymbol{F}$，则将

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta \boldsymbol{F}}{\delta A} \tag{8.1}$$

称为 n 截面上 m 点处的应力，也可以称为 m 点处 n 截面上的应力。截面上的应力是矢量，可以合成或分解。如图8.1中的 P 就可以分解成两个分量，其一垂直于截面 n，以 σ 表示；另一个与截面相切，以 τ 表示。前者称过 m 点 n 截面上的正应力，后者称过 m 点 n 截面上的剪应力。

8.1.3　一点的应力

8.1.3.1　应力椭圆和应力椭球

上述的应力矢量 $\boldsymbol{P}$ 是与 n 截面联系在一起的。通过地壳岩石中的任一点 m，可作出无数

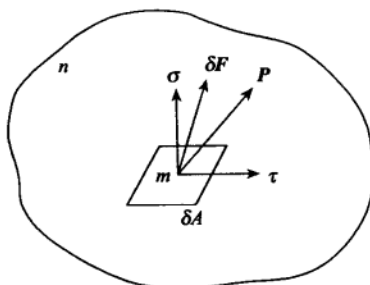


图 8.1　截面上一点的应力

个截面,因而存在无数个应力矢量。故地块中某一点的应力是不能用一个简单的矢量来表示的。

假设在一个薄平板上,所受外力都集中于平板中央,过平板中的某点作垂直于平板面的截面,在该截面上存在一个应力矢量。通过该点并垂直于平板的中央直立轴按某一方向连续改变该截面的取向,则可得到一系列的应力矢量。一般来说,存在三种可能情况:

(1)所有应力矢量都指向中心点,即所有应力矢量的法向分量都为压应力矢量。

(2)所有应力矢量都背离中心点,即都为张应力矢量。

(3)一部分为压应力矢量,另一部分为张应力矢量。

许多地质问题中出现过第一种情况。这时,所有应力矢的尾端都落在一个椭圆上(图 8.2(a)),这种椭圆称为应力椭圆。对于第二种情况,应力矢的首端的轨迹构成应力椭圆(图 8.2(b))。第三种情况则作不出应力椭圆,过一点的所有截面的全部应力矢量,才代表一点的应力状态。因此,如前面已提到的,一个应力矢量不能代表一点的应力(朱志澄,1999)。

上述应力椭圆中的所有应力矢量,都位于同一平面内,故称其为二维应力状态。在三维应力状态下,通过一点的应力矢量之矢端或矢尾的轨迹所确定之椭球称为应力椭球。



(a) 应力矢的尾端构成应力椭圆　　(b) 应力矢的首端构成应力椭圆

图 8.2

8.1.3.2　应力分量

为了从数值上来研究一点的应力状态,在直角坐标系中,可以围绕该点取一个正六面体单元体,当三对相互正交的平行面无限靠近直至重合时,则单元体表面上的应力矢量就代表了该点的三个正交截面上的应力矢量。该单元体上应力矢量 的集合,称为单元体的应力状态。若已知单元体的应力状态,一点的应力状态也就确定了。

单元体表面上的应力矢量可以分解成该面上的正应力与剪应力，而后者又可进一步分解成沿两个坐标轴方向的剪应力分量，一共可得9个应力分量，如图8.3所示。这9个应力分量构成二阶混合对称张量τ_j^i（参见2.6节），也可用3×3阶的矩阵(τ_j^i)表示。因此，地壳内一点的应力可以用上述9个应力分量完全描述（朱志澄，1999）：

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

其中：$\sigma_x = \tau_1^1, \sigma_y = \tau_2^2, \sigma_z = \tau_3^3, \tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_3^2 = \tau_2^3, \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_3^1 = \tau_1^3, \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_2^1 = \tau_1^2$。实际上，一点上的应力只有6个独立分量，可用一个列阵表示，即：.

$$\{\sigma\} = [\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}]^T$$

因此可认为，过一点三个正交截面上的6个应力分量决定了一点的应力状态。

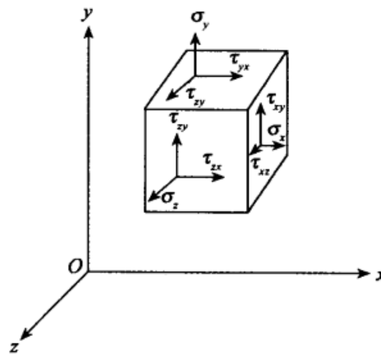


图8.3 单元体上的9个应力分量

为了完全描述一个地块内的应力状态，需要知道其中每一点的6个独立应力分量，亦即需要知道每一点的应力张量。(8.2)式的整体称为应力张量，理论研究需要进行张量分析。

现在讨论二维应力。如图8.4(a)所示，过O点作一平面$x=0$，该面右方质量作用于左方质量单位面积的力的分量为σ_x和τ_{xy}。同样，如图8.4(b)所示，过O点作一平面$y=0$，通过该面单位面积的力的分量为τ_{yx}和σ_y。由于$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，这4个分量中只有3个是独立的。

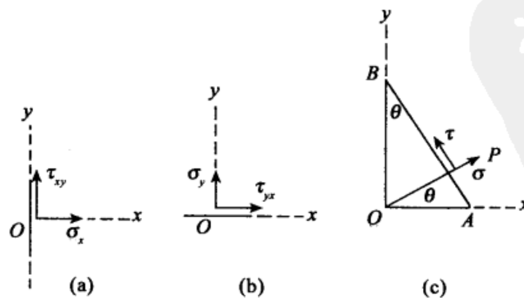


图8.4 应力平面示意图

若通过 O 的平面的法线 OP 与 Ox 轴成倾角 θ，如图 8.4(c) 所示，则通过该面的应力分量 σ,τ 可以用 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 表示为：

$$\sigma = \sigma_x\cos^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta + \sigma_y\sin^2\theta \tag{8.3}$$

$$\tau = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \tag{8.4}$$

若坐标轴 Ox,Oy 旋转了一个角度 θ，成为 Ox',Oy' 则相对于 Ox',Oy' 的应力分量 σ'_x,σ'_y，可利用(8.3)式分别用角度 θ 和 $90°+\theta$ 得出：

$$\sigma'_x = \sigma_x\cos^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta + \sigma_y\sin^2\theta \tag{8.5}$$

$$\sigma'_y = \sigma_x\sin^2\theta - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta + \sigma_y\cos^2\theta \tag{8.6}$$

上面两式相加，得出

$$\sigma'_x + \sigma'_y = \sigma_x + \sigma_y \tag{8.7}$$

这就是说，如果两轴旋转了一个角度，虽然 σ_x 和 σ_y 本身都变化了，但 $\sigma_x+\sigma_y$ 保持不变。这种不变量在理论研究中起着重要作用。$\tau_{x'y'}$ 可由(8.4)式得出。方程(8.3)和式(8.4)完全描述了一点上的应力随着方向变化的方式。现在更进一步讨论这种变化状态，以得出某种简单的几何表象。微分式(8.3)得

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2(\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta\cos\theta + 2\tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

由上式可看出，当 θ 由下式

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{8.8}$$

给定时，法向应力为最大或最小。由式(8.4)可知，此时切应力为零。

式(8.8)定义了成正交的两个方向，在这两方向上，一点上的法向应力一为最大，一为最小，切应力为零。这两方向构成应力的主轴，主轴上的应力称为主应力，通常用 σ_1 和 σ_2 表示 $(\sigma_1>\sigma_2)$。式(8.8)的重要意义在于，如果已知一点上的应力状态，就可立即得出主轴方向和主应力值。知道了这些，把主轴取作参考轴，就简单多了。这样，取参考轴作为新的 x,y 轴，则在式(8.3)和式(8.4)中，$\sigma_x=\sigma_1,\sigma_y=\sigma_2,\tau_{xy}=0$。若一平面的法线与 x 轴成 θ 角，则通过该平面的法向应力 σ 和切应力 τ 为

$$\sigma = \sigma_1\cos^2\theta + \sigma_2\sin^2\theta = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta \tag{8.9}$$

$$\tau = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\theta \tag{8.10}$$

另一有重要理论意义的表示方法是：从原点在法线方向 θ 上作一条直线，在该线上取一点 P，它至原点的距离是 $r=k\sigma^{-\frac{1}{2}}$，因此

$$\sigma = k^2/r^2 \tag{8.11}$$

式中：σ 是通过平面的法向应力；k 是一个常数。将式(8.11)代入式(8.9)，得

$$\sigma_1 r^2\cos^2\theta + \sigma_2 r^2\sin^2\theta = k^2$$

由于 $x=r\cos\theta$ 和 $y=r\sin\theta$ 是 P 点的坐标，所以 P 点位于下式表示的圆锥曲线上：

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 = k^2 \tag{8.12}$$

此曲线称为应力圆锥曲线。若 σ_1 与 σ_2 同符号，此曲线是椭圆；若两者符号相反，此曲线是双曲线。

同样，在方程(8.10)中利用 $\tau=k^2/r^2$，切应力可用双曲线

$$(\sigma_2 - \sigma_1)xy = k^2 \tag{8.13}$$

上的一点表示。

三维应力也可用同样的方式讨论。

8.1.4 三维主应力、主方向、主平面

随着单元体取向的改变，应力分量也将变化。可以证明，能够找到这样一种取向：单元体表面上的剪应力分量都为零，即三个正交截面上没有剪应力作用而只有正应力作用，这种情况下的正应力称为该点的主应力，分别以 σ_1，σ_2，σ_3 表示，并在代数值上（规定压应力为正，拉应力为负）保持 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$。主应力的方向称为该点的应力主方向，三个截面则称为该点的三个主平面。显而易见，一点的 3 个主应力即决定了该点的应力状态。当 3 个主应力中有 2 个为零时，称为单轴应力；有 1 个为零时，称为双轴应力或平面应力；当 3 个主应力都不为零时，称为三轴应力。

8.1.5 应力莫尔圆

在应力分析中，有一种重要的图解方法，称为应力莫尔圆，它能完整地代表一点的应力状态。图 8.5 表示一点平面应力状态的应力莫尔圆。图中，横坐标代表正应力 σ，纵坐标代表剪应力 τ，图中以 C 点为圆心、以 CM 为半径的圆上的任何一点的横坐标与纵坐标就代表了二维空间中某一截面上的正应力与剪应力。

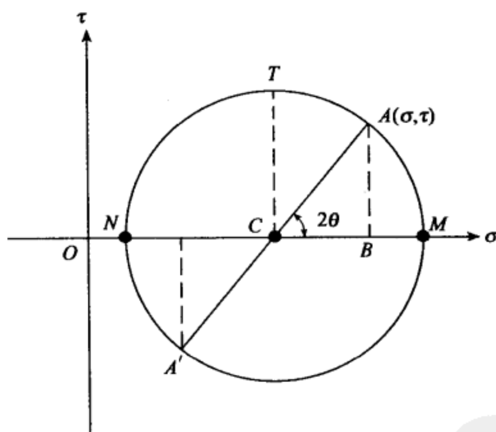
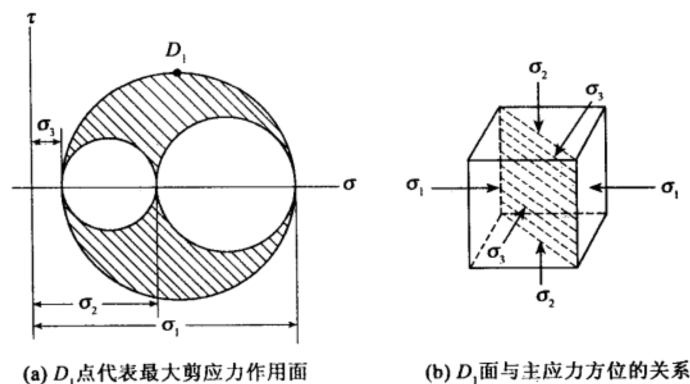


图 8.5 一点平面应力状态的应力莫尔圆

在三维应力情况中，三个分别包含 σ_1 和 σ_2 轴、σ_2 和 σ_3 轴、σ_1 和 σ_3 轴的 3 个二维应力圆共同组成的区间（图 8.6 中的阴影部分）内的任一点的横坐标和纵坐标，即代表了三维空间中某截面上的正应力与剪应力。从图 8.6 中可以看出，最大剪应力位于 σ_1 和 σ_3 构成的应力圆上，位于与 σ_1 成 45°夹角的面上（包含 σ_2 轴）（参见图 8.6(b)），其值为 $|\tau_{max}| = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$。



(a) D_1点代表最大剪应力作用面　　(b) D_1面与主应力方位的关系

图 8.6　三维应力莫尔圆

8.1.6　静水应力与偏斜应力

对于一般的平面应力状态,可看成是由各向等值拉应力状态或各向等值压应力状态与等值拉压应力(纯剪应力)的合成。可设想为首先形成一个圆心在原点的应力圆,然后向纵坐标左边或右边移动圆心位置即成。反之,也可以说,平面一般应力状态可以分解成两部分,其一为各向等值拉应力或等值压应力状态;其二为等值拉压应力状态。前者又称为静水应力状态,后者又称为偏斜应力状态。静水应力状态的主应力为(朱志澄,1999)

$$\sigma_{h_1} = \sigma_{h_2} = \sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{8.14}$$

即平均应力。偏斜应力状态的主应力(即主偏应力)为

$$\begin{cases} \sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_m = \dfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_m = -\dfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \end{cases} \tag{8.15}$$

与平面应力状态一样,空间应力状态也可分解成静水应力状态与偏斜应力状态。其静水应力

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \tag{8.16}$$

其中:$\sigma_m = \dfrac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$为空间应力状态下的平均应力。

偏斜应力状态的矩阵形式为:

$$S = \begin{bmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \tag{8.17}$$

静水应力引起物体的体积变化,偏斜应力引起物体的形状变化。

8.1.7 地壳应力场

受力物体内的每一点都存在与之对应的应力状态,物体内各点的应力状态在物体占据的空间内组成的总体,称为应力场。物体内各点的应力状态相同时,组成均匀应力场,否则组成非均匀应力场。由于上覆岩石压力

$$\sigma_h = \rho g h \tag{8.18}$$

(ρ 是岩石密度,g 是重力加速度,h 是距地表的深度)随深度而变化及地壳岩石的非均匀性,地壳中不存在理想的均匀应力场。由构造作用造成的应力场称构造应力场。地壳岩石中存在的应力称为地应力。地应力除了构造应力外,还有非构造应力,如由重力引起的应力、地形引起的应力、开挖引起的应力、人工载荷引起的应力,等等。后三者影响范围有限,往往仅在局部应力场中起作用。在区域应力场和全球应力场中,一般都有重力应力和构造应力的双重作用,不过两者所占的比例随区域而变化。

在地史时间内,地应力场是随时间发生演变的。这类随时间而变化的应力场称为非定常应力场(朱志澄,1999):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x,y,z,t) \tag{8.19}$$

当所研究的时间段较短时,近似地认为地应力场不随时间变化,即

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x,y,z) \tag{8.20}$$

这时的应力场称为定常应力场,或近似地认为是瞬时应力场。

在地史时期作用的应力场称为古应力场,现今作用的应力场称为现今应力场。古应力场的研究,对于探讨地壳运动规律、指导成矿预测等,具有重要的意义。现今应力场的研究,对于地震预报分析和工程场地稳定性评价,具有重要的意义。

古应力场的研究,通常采用节理统计方法和位错密度、亚颗粒粒径等显微和超显微构造研究方法(万天丰,1988)。现今应力场的研究主要有应力解除法、水压致裂法、震源机制解法等。不管是古应力场还是现今应力场研究,模拟方法都能起到重要作用(曾佐勋,刘立林,1992)。不管是古应力测量还是现今应力测量,由于地质条件、工作方法与工作量的限制,往往只能得到一些局部的数据。以这些已知数据为基础,配合其他地质条件研究,可利用数学模拟(如有限元法)和物理模拟(如光弹性法)方法,获得更为详尽的应力场资料。

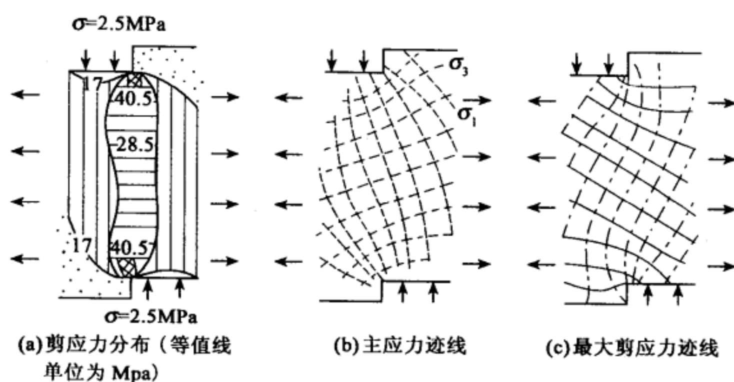
8.1.8 应力场的图示

应力场的图示通常采用主应力迹线和主应力等值线、最大剪应力迹线和最大剪应力等值线。有时采用主应力迹线和应力椭圆双重表示。有时也采用主应力矢量图表示。

主应力迹线表示应力主方向在场内的变化规律,主应力迹线上任一点的切线方向,代表该点的一个主应力方向。最大剪应力迹线与主应力迹线有类似的特点。主应力等值线和最大剪应力等值线都反映应力强度的变化。各点主应力矢量的方向表示该点主应力的方向,其长度表示主应力的大小。图 8.7 表示用应力迹线和应力等值线表示的应力场。

8.1.9 变形和位移

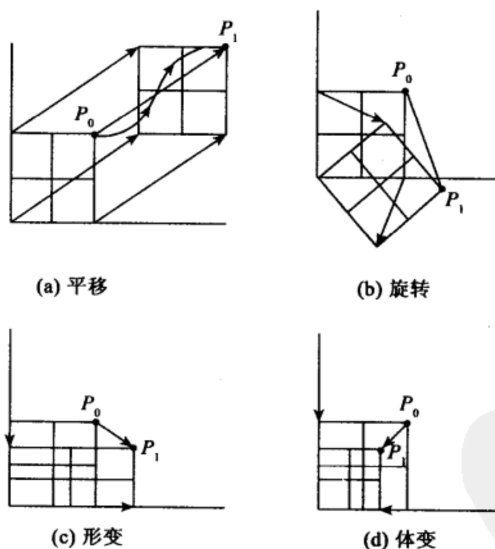
地壳中的岩石体受到应力作用后,其内部各质点经受了一系列的位移,从而使岩石体的初始形状、方位或位置发生了改变,这种改变通常称为变形。从几何学的角度来看,研究物体的变形需要比较物体内各质点的位置在变形前后的相对变化。为此,首先要确定参考坐标系。



(a)剪应力分布（等值线单位为 Mpa）　(b)主应力迹线　(c)最大剪应力迹线

图 8.7　用应力迹线和应力等值线表示的应力场（引自朱志澄，1999）

物体的位移是通过其内部各质点的初始位置和终止位置的变化来表示的。质点的初始位置和终止位置的连线叫位移矢量。这条连线并不代表质点的真正位移路径，只表示位移的最终结果（图 8.8）。位移可以通过物体内一个网格的变化形象地表示出来。位移的基本方式可分为四种：平移、旋转、体变和形变（图 8.8）。



(a) 平移　(b) 旋转　(c) 形变　(d) 体变

图 8.8　位移的四种形式（引自朱志澄，1999）

平移和旋转指刚体的平移和旋转，是物体相对于外部坐标作整体的平移或旋转。这种位移并不引起物体内部各质点间相对位置的变化，因此，并不会改变物体的形状。

体变和形变分别指体积的变化和形状的变化。体变和形变使物体内部各质点间的相对位

置发生了改变,从而改变了物体的大小和形状,即引起了物体的应变。因此,应变是物体在应力作用下的形状和大小的改变量,有时也包含一定程度的旋转。

8.1.10 应变的度量

应变与应力状态的含义不同,是表示物体变形的程度。应力状态是指某一瞬间作用于物体上的应力情况,而应变是指与初始状态比较的物体变形后的状态。应变是物体受应力作用发生变形的产物,应力和应变之间的关系是一种因果关系。变形的结果引起物体内质点之间的线段长度的变化或两条相交线段之间的角度的变化,前者为线应变,后者为剪应变。测量这种变化,就可以计算出物体应变的大小和方向,即确定其应变状态。

8.1.10.1 线应变

在应变分析中,设 l 是两相邻点 O 和 P 之间的距离,l' 是应变后的相应点 O' 和 P' 之间的距离,线应变 ε_l 指变形前后单位长度的改变量(图 8.9):

$$\varepsilon_l = \frac{l' - l}{l} = \frac{\mathrm{d}l}{l} \tag{8.21}$$

线应变视 $\mathrm{d}l$ 的符号为正(伸张)或为负(压缩)而有张应变和压应变之分。

8.1.10.2 剪应变

变形前相互垂直的两条直线,变形后其夹角偏离直角的量称为角剪切应变,或简称角剪应变,其正切称为剪应变(图 8.10):

$$\gamma = \tan\varphi \tag{8.22}$$

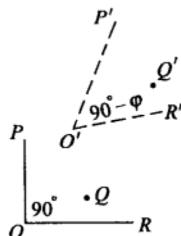


图 8.9

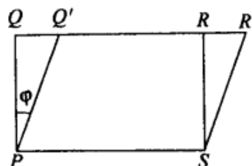


图 8.10

8.1.11 均匀应变和非均匀应变

物体的变形有各种不同的方式。根据物体内各点的应变状态的变化与否可将物体的变形分为均匀变形与非均匀变形。在非均匀变形中,根据应变变化连续与否又可细分为连续变形和不连续变形(朱志澄,1999)。

8.1.11.1 均匀变形

物体内各点的应变特征相同的变形称为均匀变形。其特征是:变形前的直线变形后仍是直线;变形前的平行线变形后仍然平行。因此,其中任一个小单元体的应变性质(大小和方

向)就可代表整个物体的变形特征。在三维均匀变形中,圆球变成了椭球,单位圆球变形而成的椭球称为应变椭球。

8.1.11.2 非均匀变形

物体内各点的应变特征发生变化的变形称为非均匀变形。与均匀变形相反,直线经变形后不再是直线,而成了曲线或折线;平行线经变形后不再保持平行。这时,圆变形后亦不再是圆或椭圆(图 8.11、图 8.12)。如果物体内从一点到另一点的应变状态是逐渐改变的,则称为连续变形;如果是突然改变的,则应变是不连续的,称为不连续变形,例如物体的两部分之间发生了断裂(图 8.11(c))。在分析连续的非均匀变形时,可以把受变形的物体分割成许多无限小的单元体。这时,每一个单元体的变形可以当做均匀变形来处理。地质上大多数变形是不均匀的,常见的褶皱就是一种典型的非均匀变形。原始平行的平直的层间界面被弯曲成褶皱后就成了曲面,而且上下界面也不一定仍互相保持平行,垂直层面的平行线可以变成扇形。这时就不可能用一个单元体的应变来表示整套岩层或岩体的应变。如果应变变化是连续的,则可用各微小单元体的应变特征及其系统变化来表示总体构造的特征(图 8.12)。有些非均匀应变从宏观的尺度上可以近似地看成均匀变形,从而以一个平均的应变椭球来表示其总的变形特征。反之,有些在露头上或肉眼看来是均匀的变形,在更小的尺度上却可表现为不连续变形。

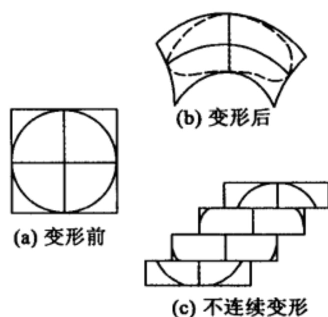


图 8.11 非均匀变形

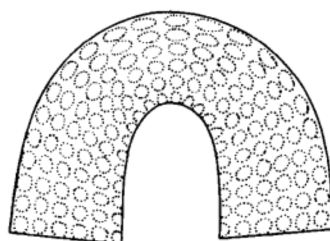


图 8.12 弯曲变形

(引自朱志澄,1999)

通常我们认为地壳应变属于无限小应变且是均匀应变。

现在讨论二维无限小应变。设有两条互相垂直并分别平行于 x 轴和 y 轴的微小线段 $PS=\Delta x$ 和 $PQ=\Delta y$ 位于 xOy 平面上,如图 8.13 所示。在应力作用下,P、Q、S 点分别位移到 P'、Q'、S',设 P 点的坐标位移量为 u 和 v,PS 的相对坐标位移量为 Δu 和 Δv,PQ 的相对坐标位移量为 $\Delta u'$ 和 $\Delta v'$,则 PS 形变后的长度为:

$$P'S'=\sqrt{(\Delta x+\Delta u)^2+\Delta v^2}=\Delta x\sqrt{\left(1+\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2}\approx\Delta x\left(1+\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

故 PS 线段的线应变为:

$$\varepsilon_x = \frac{P'S' - PS}{PS} = \frac{\Delta x\left(1 + \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

按无限小应变假设，视 Δx 为无限小，则上式趋向一个极限：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{8.23a}$$

在形变未引起断裂的情况下，P 点的坐标位移量 u 和 v 应是 (x,y) 的函数。因此，一点在 x 轴方向的线应变 ε_x 是函数 $u(x,y)$ 对 x 的偏导数。

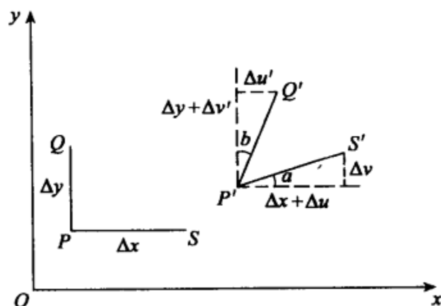


图 8.13

同样，可以导出一点在 y 轴方向的线应变

$$\varepsilon_y = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{\Delta v'}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{8.23b}$$

由于偏导数都是就 P 点来取的，可以不区分 v 和 v'。

如图 8.13 所示，线段 PS 和 PQ 原来是垂直的，$\angle QPS = 90°$，形变后角度减小了 $a + b$，这两线段交角的变化（在此情况下也是两轴交角的变化）的正切，就是切应变，以 γ_{xy} 或 γ_{yx} 表示，故

$$\gamma_{xy} = \tan(a + b) \approx \tan a + \tan b$$

由图 8.13 可得

$$\tan a = \frac{\Delta v}{\Delta x + \Delta u} = \frac{\Delta v}{\Delta x(1 + \Delta u/\Delta x)} \approx \frac{\Delta v}{\Delta x} \approx \frac{\partial v}{\partial x}$$

同样可以导出

$$\tan b = \frac{\partial u}{\partial y}$$

于是

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{8.24}$$

γ_{xy} 可以取正值，也可以取负值，视形变后的角度小于或大于 90°而定。

已知 ε_x、ε_y 和 γ_{xy}，可按下式求出任意方位角 α 上的线应变

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \gamma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha \tag{8.25}$$

还可以按下式求出任意方位角 α 及其垂直方向 $90° + \alpha$ 之间的切应变

$$\gamma_{\alpha,90+\alpha} = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\alpha + \gamma_{xy}\cos 2\alpha \tag{8.26}$$

就方向 45°和 135°按上式得出

$$\gamma_1 = \gamma_{45,135} = \varepsilon_x - \varepsilon_y \tag{8.27}$$

$$\gamma_2 = \gamma_{xy}$$

γ_1 表示形变中东西向伸长和南北向压缩的纯剪切部分。与刚体旋转结合，使纯剪切变为简单剪切，则 γ_1 也可以认为是一个走向为 N45°W 的垂直面上的右旋剪切，或者是一个走向为 N45°E 的垂直面上的左旋剪切。γ_2 代表形变中北东—南西向伸长和北西—南东向压缩的纯剪切部分。同样，γ_2 也可以认为是一个走向为东西的垂直面上的右旋剪切，或者是一个走向为南北的垂直面上的左旋剪切。

由以上的定义可知，当 γ_1 为正时，表示地块受到东西向伸长、南北向压缩的形变；为负时则相反。当 γ_2 为正时，表示地块受到北东—南西向伸长、北西—南东向压缩的形变；为负时则相反。

如果已知北东—南西向、北西—南东向、南北向和东西向的切应变，就可以了解作用于很多断层面上的切应变。因为从全球断裂系来看，在这四个方向上的断层走向居多。所以 γ_1 和 γ_2 在应变分析中极其重要。

应变的另一种形式是面膨胀 Δ。由图 8.14 可知，矩形 *PQRS* 的面积为

$$F = \Delta x \cdot \Delta y,$$

形变后的平行四边形 *PQ'R'S'*的面积为

$$F' = (\Delta x + \varepsilon_x \Delta x)(\Delta y + \varepsilon_y \Delta y) = \Delta x \Delta y(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y) \approx \Delta x \Delta y(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

故面膨胀

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\mathrm{d}F}{F} = \frac{F' - F}{F} \\ &= \frac{\Delta x \Delta y(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y) - \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y} \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_y\end{aligned} \tag{8.28}$$

应变还有一种形式是刚体旋转角。如图 8.15 所示，*PE* 为直角 *QPS* 的平分线，此直角形变后成为 $\angle Q'PS'$，角平分线 *PE* 形变后旋转到 *PE'*的方向，所旋转的角度 ω 称为刚体旋转角。由图可得

$$\begin{aligned}\omega &= \angle E'PS' - \angle EPS' = \frac{1}{2}(90° - a - b) - (45° - a) \\ &= \frac{1}{2}(a - b) \approx \frac{1}{2}(\tan a - \tan b) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{8.29}$$

如前所述，若平面坐标系的 y 轴指北，则 ε_x，ε_y 和 γ_{xy}分别表示一点上东西方向和南北方向的伸缩率（线应变）以及这两方向之间的角度的变化（切应变），这是一组应变量。就任一地面点来说，在方位角为 α 的任一方向以及与其垂直的方向上，都有一组应变量 ε_α，$\varepsilon_{\alpha+90°}$ 和 $\gamma_{\alpha,\alpha+90°}$。按弹性力学理论，在这许许多多成对的方向中，存在着一对互相垂直的特殊方向，它们的线应变分别达到最大值 ε_1 和最小值 ε_2，称为主应变，按下式计算：

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2]^{1/2}$$

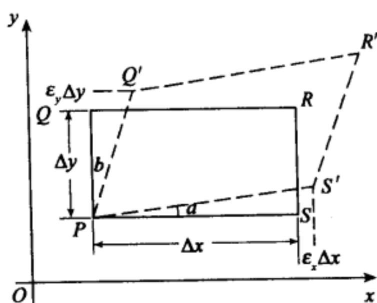


图 8.14

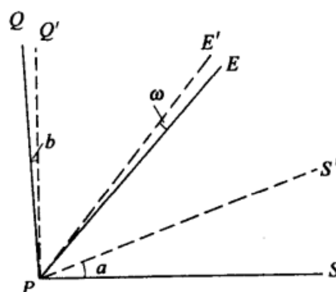


图 8.15

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2]^{1/2} \tag{8.30}$$

按上节表示主应力的方法，取主轴为坐标轴，则主应变 ε_1 和 ε_2 可以表示为

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 = k \tag{8.31}$$

这一方程称为应变圆锥曲线。若 ε_1 和 ε_2 同符号，此曲线为椭圆；若两者反符号，则为双曲线；若 $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$，则为等轴双曲线。

上面按图 8.14 推导了面膨胀 Δ 的式子。有前可知，$\sigma_x + \sigma_y$ 是一个不变量，所以任意两个成垂直的方向上的线应变之和也是一个常量，它表示一个小区域在应力作用下所产生的面膨胀，故由两个主应变可得出

$$\Delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \tag{8.32}$$

利用主应变 ε_1 和 ε_2 不仅可以求出面膨胀 Δ，还可以计算最大切应变 γ_m，其式子是

$$\gamma_m = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \tag{8.33}$$

发生最大切应变的方向同主应变方向成 45°的角。当利用三角测量解析地壳形变时，这一点极其重要。

在主应变轴方向上，切应变为零；在与之成 45°的方向上，切应变达到最大值 γ_m，如图 8.16 所示。切应变随着方位角的变化，显示为对称的玫瑰花瓣状，称为应变片花（Vanick，1982）。

由上所述，可知用于描述水平应变的基本参数是 ε_x，ε_y 和 $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$。也就是说，如果导出了二维应变张量

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

就可以得到局部地区平均水平应变状况的一切信息。应变张量中的四个偏导数就是根据这一地区的大地测量数据计算的。如上所述，若应变圆锥曲线是一个椭圆，则它的两轴指向应变张量的两本征向量的方向，两本征值 ε_1 和 ε_2 表示最大和最小应变，分别是椭圆的长半轴和短半轴，如图 8.17 所示，长轴 ε_1 的方位角 α 按下式计算

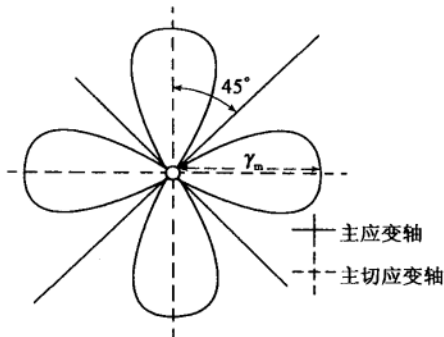


图 8.16

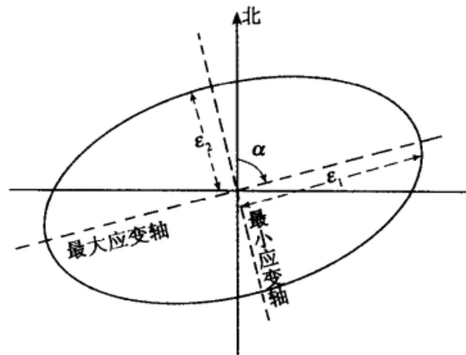


图 8.17

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right) \tag{8.34}$$

将式(8.25)对 α 取导数,令 $d\varepsilon_\alpha/d\alpha$ 等于零,便得上式。

对于三维无限小应变,取一互相垂直的固定参考轴系,设质点 P 相对于该轴系未受应变的和处于应变状态的坐标分别是 (x,y,z) 和 $(x+u,y+v,z+\omega)$,则 (u,v,ω) 是 P 点的位移分量。若 $\theta(x+x',y+y',z+z')$ 是 P 附近的一点,它的位移是 $(u+u',v+v',\omega+\omega')$,这里

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial u}{\partial x}x' + \frac{\partial u}{\partial y}y' + \frac{\partial u}{\partial z}z' \\ v' &= \frac{\partial v}{\partial x}x' + \frac{\partial v}{\partial y}y' + \frac{\partial v}{\partial z}z' \\ \omega' &= \frac{\partial \omega}{\partial x}x' + \frac{\partial \omega}{\partial y}y' + \frac{\partial \omega}{\partial z}z' \end{aligned} \tag{8.35}$$

在上式中,由于质点 Q 相对于质点 P 的位移是 x',y',z' 的线性函数,所以在地块中任一点的附近,应变是均匀的。采用基本代号

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_z = \frac{\partial \omega}{\partial z} \tag{8.36}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x}, \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{8.37}$$

$$2\omega_x = \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, 2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x}, 2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{8.38}$$

利用上列代号,(8.35)式写成

$$\begin{aligned} u' &= x'\varepsilon_x + \frac{1}{2}y'\gamma_{xy} + \frac{1}{2}z'\gamma_{xz} + z'\omega_y - y'\omega_z \\ v' &= \frac{1}{2}x'\gamma_{yx} + y'\varepsilon_y + \frac{1}{2}z'\gamma_{yz} + x'\omega_z - z'\omega_x \\ \omega' &= \frac{1}{2}x'\gamma_{zx} + \frac{1}{2}y'\gamma_{zy} + z'\varepsilon_z + y'\omega_x - x'\omega_y \end{aligned} \tag{8.39}$$

上列三式中的最后两项

$$z'\omega_y - y'\omega_z,\ x'\omega_z - z'\omega_x,\ y'\omega_x - x'\omega_y$$

正是由于小的旋转分量($\omega_x,\omega_y,\omega_z$)所引起的($x',y',z'$)点的位移分量。若以 $\boldsymbol{\omega}$ 表示分量(ω_x, ω_y,ω_z)的向量,以 $\boldsymbol{u}$ 表示分量(u,v,ω)的向量,则由(8.38)式得出

$$2\boldsymbol{\omega} = curl\boldsymbol{u} \tag{8.40}$$

若 $\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$,则应变无旋转。

ε_x、ε_y、ε_z、γ_{yz}、γ_{zx}、γ_{xy}是三维的 6 个应变分量,其中 ε_x、ε_y、ε_z 是坐标轴方向上的线应变,$90°-\gamma_{yz}$是原来平行于 y 轴和 z 轴的两条线之间应变后的角度。

线段 PQ 应变后成为 $P'Q'$,现在求 $P'Q'$的长度。利用(8.35)式,假定应变无限小,则有

$$\begin{aligned}P'Q'^2 &= (x'+u')^2+(y'+v')^2+(z'+\omega')^2 = \left[x'\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+y'\frac{\partial u}{\partial y}+z'\frac{\partial u}{\partial z}\right]^2\\&+\left[x'\frac{\partial v}{\partial x}+y'\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+z'\frac{\partial v}{\partial z}\right]^2+\left[x'\frac{\partial \omega}{\partial x}+y'\frac{\partial \omega}{\partial y}+z'\left(1+\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)\right]^2\\&=x'^2+y'^2+z'^2+2x'^2\varepsilon_x+2y'^2\varepsilon_y+2z'^2\varepsilon_z+2y'z'\gamma_{yz}+2z'x'\gamma_{zx}+2x'y'\gamma_{xy}\end{aligned} \tag{8.41}$$

假设 PQ 的长度为 r,方向余弦为(l,m,n),则 $x'=lr$, $y'=mr$, $z'=nr$,(8.41)式成为

$$P'Q'^2 = r^2[1+2l^2\varepsilon_x+2m^2\varepsilon_y+2n^2\varepsilon_z+2mn\gamma_{yz}+2nl\gamma_{zx}+2lm\gamma_{xy}] \tag{8.42}$$

取平方根,略去 ε_x^2……项,则 P 点上相应于方向(l,m,n)的线应变 ε 是

$$\varepsilon = \frac{P'Q'-r}{r} = l^2\varepsilon_x+m^2\varepsilon_y+n^2\varepsilon_z+mn\gamma_{yz}+nl\gamma_{zx}+lm\gamma_{xy} \tag{8.43}$$

若在方向(l,m,n)上取一点,它至原点的距离为 $k/\sqrt{\varepsilon}$,此点将位于以下的一个二次曲面上:

$$x^2\varepsilon_x+y^2\varepsilon_y+z^2\varepsilon_z+yz\gamma_{yz}+zx\gamma_{zx}+xy\gamma_{xy} = k^2 \tag{8.44}$$

这就是应变二次曲面,它的三轴是主应变轴,主轴方向上的线应变 ε_1、ε_2、ε_3 是主应变。同前面一样,

$$\Delta = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \tag{8.45}$$

是不变的。事实上,Δ 就是体膨胀,即体积变化与原有体积之比。

如上所述,三维应变有 6 个应变分量。利用三维应变张量

$$\varepsilon = \begin{bmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z\end{bmatrix} \tag{8.46}$$

可以对地壳应变作全面的描述,提供更有地球物理意义的信息。

8.1.12 应变椭球体、旋转变形和非旋转变形

为了形象地描述岩石的应变状态。常设想在变形前岩石中有一个半径为 1 的单位球体,均匀变形后成为一个椭球,以这个椭球体的形态和方位来表示岩石的应变状态,这个椭球体便称为应变椭球体。在数学上可以证明,表达单位圆球体的方程式经过均匀变形后变换成为一个椭球体的方程式(Ramsay,1967;朱志澄,1999)。从数学上还可以推导出,从单位圆球体变成的应变椭球体有三个互相垂直的主轴,沿主轴方向只有线应变而没有剪应变。分别以 λ_1,λ_2,λ_3(或 X、Y、Z,或 A、B、C)来表示最大、中间和最小应变主轴。在单位圆球体变成的应变椭

球体中，三个主轴的半轴长分别为$\sqrt{\lambda_1}$，$\sqrt{\lambda_2}$，$\sqrt{\lambda_3}$（因初始圆球体的半径 $r_0=1$）。包含应变椭球体的任意两个主轴的平面叫主平面。

应变椭球体的三个主轴方向形象地表示了变形造成的地质构造的空间方位。垂直 λ_3 的平面（或 XY 面，或 AB 面）是受压扁的面，代表褶皱的轴面或片理面等的方位。垂直 λ_1 的平面（或 YZ 面，或 BC 面）为张性面，代表了张性构造（如张节理）的方位。横过应变椭球体中心的切面一般为椭圆形，其中有两个切面为圆切面，它们的交线为中间应变轴。中间应变轴不变形的应变（即等于 0 的应变）称为平面应变。这时，圆切面的半径为$\sqrt{\lambda_2}=1$，该圆切面叫无伸缩面或无长度应变面。它和最大应变主轴 λ_1 的夹角取决于 λ_1 和 λ_3 之比。

$$\cos^2\theta = \frac{\lambda_1(1-\lambda_3)}{\lambda_1-\lambda_3} \tag{8.47}$$

式中：θ 为无缩面与 λ_1 轴之夹角（Ramsay，1967；朱志澄，1999）。

无伸缩面区分了应变椭球体中的伸长区与缩短区。任何过球心的直线，如果位于无伸缩面与伸长轴（λ_1）之间的区域，都发生了伸长。在无伸缩面与缩短轴（λ_3）之间的区域，过球心的直线都发生了缩短，同时就会产生各种相应的构造特征。

根据代表应变椭球体主轴方向的物质线在变形前后方向是否改变，可把变形分为两类：旋转变形和非旋转变形。

非旋转变形中，代表应变主轴方向的物质线在变形前后不发生方位的改变。其中的一种特殊情况，即在变形中不发生体积变化且中间应变轴的应变为零的变形，称为纯剪变形。这是一种体变为零的平面应变。

旋转变形中，代表应变主轴方向的物质线在变形前后发生了方位的改变，即旋转了一个角度。一个简单剪切造成的旋转变形，可以看做是一个纯剪变形再加上一个刚体的旋转。

§8.2　区域地壳运动应变分析

应变分析中所用的基本数据有两种：一是新、旧测量的原始观测资料，二是根据新、旧测量结果的比较得出的位移场。

利用原始观测资料时，要求新、旧测量的网形和观测量都相同，因而其适用性受到一些限制。但它的优点是，不依赖其他的观测量，避免了监测网平差中因基准点设定不当等原因带来的影响。

利用位移场时，由于网中各点的位移向量是根据新、旧平差结果的坐标之差得出的，为了使位移场能反映实际地壳应变，把残余的误差影响化为最小，必须采取特殊的平差方法，例如自由网平差和拟稳平差。利用位移场的优点是：所有的观测量都可用于应变分析，并不要求新、旧测量中的观测量都相同，只是要求它们属于同一大地基准。此外，在求定位移场的平差过程中，可以滤掉观测数据的粗差和估计观测质量，而且由各点位移向量的图解，可以看出各点位移的趋势。由于这些原因，人们目前侧重于利用位移场。

在应变分析中，比较简单的做法是，把一个区域的应变场作为是均匀场来处理，也就是说把一个区域的应变取平均。这种做法往往不符合实际情况，因为它不能反映应变分布情况的局部多样性。因此，应当采用有限单元应变分析法，就是把一个大区域分割成一些有限的小区。三角网和三边网的基本图形是三角形，把它作为有限单元比较方便。分别对各三角形进行应变分析，就可以得到接近于真实的地壳应变情况。韦尔施（Welsch）曾用这种单元划分法

分析了美国西部圣安德烈斯断层上霍利斯特附近的局部和区域应变形式(Welsch,1982)。

在应用三角形直接在椭球面上计算应变时,根据公式我们可以直接看到计算的结果与三角形的大小有明显关系。另外,统计结果也明显反映了这样的趋势:一是高值点基本分布于图形尺度较小(定义图形尺度为$\sqrt{S}$,单位为 km,S 为所计算三角形的面积)的区间;二是图形尺度较小的区间应变值分布更离散,量值变化幅度更大(江在森等,2000)。

根据弹性力学理论,用大地形变测量资料计算应变时,实际上是假定观测点构成的最小图形内的平均应变值。因此,大地形变测量资料计算的应变,只能是相对测点分布密度的近似平均值。由于地壳应变的空间分布不均匀,在测点密集跨度小的情况下,对实际应变场才具有较高的分辨率,而跨度较大的图形就反映不出细部的剧烈变化。另外,从地壳运动特征来看,也会使小尺度应变值具有分布更离散的特点。因此,有必要分析尺度的相对性并且进行归化。

把不同尺度的应变看成具有不同数学期望和不同方差母体的随机变量,就可以采用将一般正态分布化为标准正态分布的方法,对不同尺度应变值的分布,我们将其分别表示为

$$T_1 = N(u_1, \sigma_1), \quad T_2 = N(u_2, \sigma_2) \tag{8.48}$$

令

$$T'_1 = \frac{T_1 - u_1}{\sigma_1}, \quad T'_2 = \frac{T_2 - u_2}{\sigma_2}$$

对上式扩充一个加常数和一个乘常数,则得到

$$T'' = u_0 + (T - u)\frac{\sigma_0}{\sigma} \tag{8.49}$$

其中:加常数 u_0 表示归化某一标准尺度的应变值的数学期望;σ_0 表示某一标准尺度的均方差。这样就把不同尺度的应变值从统计分布特征量上联系起来了。从而归化处理的计算公式可写为

$$\varepsilon'_i = \bar{\varepsilon}_0 + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_i)\frac{m_0}{m_i} \tag{8.50}$$

其中:ε'_i 为归化后的应变值;ε_i 为原应变值;$\bar{\varepsilon}_0$ 为某一标准尺度应变值的统计平均值;$\bar{\varepsilon}_i$ 为计算尺度(与 ε_i 相对应的尺度)应变值的统计平均值;m_0 为标准尺度应变值的统计均方差;m_i 为计算尺度应变值的统计均方差。

§8.3 地壳应变的综合估计

在全球大地测量数据中,含有许多地区地壳形变的信息,其中常规大地测量数据的精度虽低,但数据量丰富,有 100 多年的历史;空间大地测量数据(VLBI、SLR 和 GPS)精度高,利用几年的测量数据就可以估计地壳运动参数。此外高空间分辨率的 INSAR 数据将是今后研究地壳运动的主要信息来源。为此,在估计地壳应变时,我们需要联合各类观测数据,进行综合估计。

设第 n 个测站在日期 t 的大地经、纬度和大地高分别是 $\lambda_n(t)$、$\varphi_n(t)$ 和 $h_n(t)$,预先设定一个参考日期 t_0 和一个参考位置(φ_0, λ_0),日期 t 和 t_0 的三维大地坐标与 6 个地壳动力参数($C_{\varphi\varphi}, C_{\varphi\lambda}, C_{\lambda\varphi}, C_{\lambda\lambda}, C_{h\varphi}, C_{h\lambda}$)之间的关系表示为(Drew et al.,1989)

$$\begin{bmatrix} \varphi_n(t) \\ \lambda_n(t) \\ h_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_n(t_0) \\ \lambda_n(t_0) \\ h_n(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{\varphi\varphi} & C_{\varphi\lambda} \\ C_{\lambda\varphi} & C_{\lambda\lambda} \\ C_{h\varphi} & C_{h\lambda} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_n(t_0) - \varphi_0 \\ \lambda_n(t_0) - \lambda_0 \end{bmatrix}(t - t_0) \tag{8.51}$$

这样，只要有了一组适宜的数据，由上式就可估计 6 个地壳动力参数、有关测站在日期 t_0 的三维大地坐标。也就是说，只要在日期 t 的一观测量（如方向、距离、GPS 站间向量等）可以表示为日期 t 的测站坐标的函数，式(8.51)就可把该观测量表示成为 6 个地壳动力参数和日期 t_0 的测站坐标的函数。式(8.51)的前提条件是假定地壳运动是时间的线性函数和大地经、纬度的线性函数。因此，在纬度为 φ 的一点 A 上，可以利用所估计的地壳动力参数来计算熟知的一些参数，例如 A 点水平形变率矩阵的 4 个元素 $\dot{\varepsilon}_{EE}$、$\dot{\varepsilon}_{EN}$、$\dot{\varepsilon}_{NE}$ 和 $\dot{\varepsilon}_{NN}$，以及 A 点垂直倾斜率向量的 2 个分量 $\dot{\tau}_E$ 和 $\dot{\tau}_N$。6 个地壳动力参数与熟知的应变参数之间的关系如下：（胡明城等，1994）

$$
\begin{aligned}
&\dot{\varepsilon}_{EE} = C_{\lambda\lambda} && \dot{\varepsilon}_{NN} = C_{\varphi\varphi} \\
&\dot{\varepsilon}_{EN} = C_{\lambda\varphi} N\cos\varphi / M && \dot{\tau}_N = -C_{h\varphi}/M\text{（向下朝北）} \\
&\dot{\varepsilon}_{NE} = C_{\varphi\lambda} M / N\cos\varphi && \dot{\tau}_E = -C_{h\lambda}/N\cos\varphi\text{（向下朝东）}
\end{aligned}
\tag{8.52}
$$

式中：M、N 是子午曲率半径和卯酉曲率半径（它们含有椭球参数 a 和 e^2）。在应用上列公式的实际计算中，令 φ 等于参考原点的 φ_0。

进一步可以计算以下的有关参数：

$$
\begin{aligned}
&\dot{\Delta} = \dot{\varepsilon}_{NN} + \dot{\varepsilon}_{EE} && \text{（面膨胀率）} \\
&\dot{\omega} = (\dot{\varepsilon}_{EN} - \dot{\varepsilon}_{NE})/2 && \text{（顺时针旋转率）} \\
&\dot{\gamma}_1 = \dot{\varepsilon}_{EE} - \dot{\varepsilon}_{NN} && \text{（水平切应变率第一分量）} \\
&\dot{\gamma}_2 = \dot{\varepsilon}_{EN} + \dot{\varepsilon}_{NE} && \text{（水平切应变率第二分量）} \\
&\dot{\gamma} = (\dot{\gamma}_1^{\,2} + \dot{\gamma}_2^{\,2})^{1/2} && \text{（最大水平切应变率）} \\
&\theta = \frac{1}{2}\arctan(-\dot{\gamma}_2/\dot{\gamma}_1) && \text{（最大水平伸缩率方位角）} \\
&\dot{\tau} = (\dot{\tau}_N^2 + \dot{\tau}_E^2)^{1/2} && \text{（最大垂直倾斜率）} \\
&\delta = \arctan(\dot{\tau}_E/\dot{\tau}_N) && \text{（最大垂直倾斜率方位角）}
\end{aligned}
\tag{8.53}
$$

将以上各代号同通常的代号比较，可知

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{EE} = \varepsilon_x && \varepsilon_{EN} = \partial v/\partial x \\
&\varepsilon_{NN} = \varepsilon_y && \varepsilon_{NE} = \partial u/\partial y
\end{aligned}
$$

数学模型式(8.51)具有充分灵活性，它可以估计一维、二维或三维测站大地坐标和地壳动力参数。当作二维估计时，每一测站的高程被强制为它的初值；当作一维估计时，每一测站的大地经、纬度被强制为它们的初值。在二维估计中，待估的地壳动力参数是 $C_{\varphi\varphi}$、$C_{\varphi\lambda}$、$C_{\lambda\varphi}$ 和 $C_{\lambda\lambda}$，这时式(8.51)成为

$$
\begin{bmatrix} \varphi_n(t) \\ \lambda_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_n(t_0) \\ \lambda_n(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{\varphi\varphi} & C_{\varphi\lambda} \\ C_{\lambda\varphi} & C_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_n(t_0) - \varphi_0 \\ \lambda_n(t_0) - \lambda_0 \end{bmatrix} (t - t_0) \tag{8.54}
$$

在一维估计中，待估地壳动力参数是 $C_{h\varphi}$ 和 $C_{h\lambda}$，这时式(8.51)成为

$$
[h_n(t)] = [h_n(t_0)] + [C_{h\varphi} \quad C_{h\lambda}] \times \begin{bmatrix} \varphi_n(t_0) - \varphi_0 \\ \lambda_n(t_0) - \lambda_0 \end{bmatrix} (t - t_0) \tag{8.55}
$$

§8.4 地壳应变率的地震矩张量估计

引入力偶的概念可定义地震矩,它表征的是在 i 方向的一对大小相等方向相反的力 f_i 与岩体(断层)在 j 方向移动的距离 d_j 的乘积,用 M_{ij} 表示,即 $M_{ij}=f_i d_j$。地震矩是对称的二阶张量(Shearer,2003),描述震源的物理特性,蕴涵断裂错动信息。考虑一条简单的单断层,其面积为 A,在时间 T 内发生了 N 次地震矩已知的地震,那么断层的滑动速率为(Brune, 1968)

$$\dot{u}=\frac{1}{\mu AT}\sum_{k=1}^{N}M_0^{(k)} \tag{8.56}$$

其中:M_0 为某个特定断层的地震矩。另一方面,考虑在体积 V 内存在多条断层,则由 Kostrov(1974)公式计算该体积的应变率(可称地震应变率)的公式如下:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2\mu VT}\sum_{k=1}^{N}M_{ij}^{(k)} \tag{8.57}$$

式中:$\dot{\varepsilon}_{ij}$为断裂带平均应变率,μ 是剪切模量,V 和 T 分别表示断裂形变带的体积和时域,$M_{ij}^{(k)}$ 表示断裂形变带内第 K 个地震的地震矩在 i 平面 j 方向的分量。地震矩张量 M_{ij}可通过震源机制断层面和(特定)地震矩 M_0 予以确定:

$$M_{ij}=M_0(\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{n}_j+\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{n}_i) \tag{8.58}$$

其中:$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 分别表示单位滑动向量和断层面法向量。国际上,震源机制断层面解多采用乌尔夫网投影,规定 x(北)、y(东)、z(下)的坐标系统,给出节面的走向(ϕ)、倾向(δ)和滑动倾伏角(λ),并约定断层的滑动方向为上盘相对于下盘的错动方向,断层的法向量为下盘断层面的法向量。安艺敬一等(1980)给出了 M_{ij}在该坐标系统下的计算公式如下:

$$\begin{cases}M_{xx}=-M_0(\sin\delta\cos\lambda\sin2\phi+\sin2\delta\sin\lambda\sin^2\phi)\\ M_{xy}=M_0(\sin\delta\cos\lambda\cos2\phi+\frac{1}{2}\sin2\delta\sin\lambda\sin2\phi)\\ M_{xz}=-M_0(\cos\delta\cos\lambda\cos\phi+\cos2\delta\sin\lambda\sin\phi)\\ M_{yy}=M_0(\sin\delta\cos\lambda\sin2\phi-\sin2\delta\sin\lambda\cos^2\phi)\\ M_{yz}=-M_0(\cos\delta\cos\lambda\sin\phi-\cos2\delta\sin\lambda\cos\phi)\\ M_{zz}=M_0\sin2\delta\sin\lambda\end{cases} \tag{8.59}$$

考虑小应变,不难导出断层形变带形变速率与地震矩张量之间的关系:

$$\begin{cases}V_x^x=\dfrac{1}{2\mu maT}\sum_{n=1}^{N}M_{xx}^n\\ V_y^y=\dfrac{1}{2\mu laT}\sum_{n=1}^{N}M_{yy}^n\\ V_z^z=\dfrac{1}{2\mu mlT}\sum_{n=1}^{N}M_{zz}^n\end{cases} \tag{8.60}$$

其中:l,m,a 为断裂形变带在 X,Y,Z 方向上的空间尺度。若取 X 方向为沿断裂形变带走向,则其分别代表形变带的长,宽和厚,V_x^x,V_y^y,V_z^z 分别代表断裂形变带的轴向变化。当 $l>m$ 时,则导出近似水平剪切速率

$$V_x^y = \frac{1}{\mu laT}\sum_{n=1}^{N} M_{xy}^n \tag{8.61}$$

同理,亦可导出水平速率在垂直方向上的梯度变化:

$$\begin{cases} V_x^z = \dfrac{1}{\mu lmT}\sum\limits_{n=1}^{N} M_{xz}^n & (8.62) \\ V_y^z = \dfrac{1}{\mu lmT}\sum\limits_{n=1}^{N} M_{yz}^n & (8.63) \end{cases}$$

以上方程构成了断裂形变带的总体运动学三维特征,它对于多种断裂活动方式共存的中国大陆,具有重要的应用价值。

由方程(8.57)解算出的应变率张量,可进一步解算出主应变率和应变率主方向,其方程为(Jackson and Meckenzie,1988):

$$\begin{cases} (\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon})l + \dot{\varepsilon}_{xy}m + \dot{\varepsilon}_{xz}n = 0 \\ \dot{\varepsilon}_{xy}l + (\dot{\varepsilon}_{yy} - \dot{\varepsilon})m + \dot{\varepsilon}_{yz}n = 0 \\ \dot{\varepsilon}_{xz}l + \dot{\varepsilon}_{yz}m + (\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{\varepsilon})n = 0 \end{cases} \tag{8.64}$$

该方程式中,$\dot{\varepsilon}$ 为主应变率,l,m,n 分别代表应变率主方向,可用数学中求特征值的方法解出该未知量。

§8.5 现今板块(地块)运动和应变模型

利用板块构造运动理论研究块体运动时一般都把块体作为刚性块体对待,其实在板块内部,每个块体在周围板块或块体的作用下,不仅会产生平移和旋转,而且块体内部会发生变形。由于变形,块体上各部分的相对位置将会改变,这实质上也是块体内部质点的运动。为此活动地块运动模型需要同时考虑活动(块体)地块的刚性运动和块体内部的应变。

假设用空间大地测量得到的是站心坐标系下 e、n、u 三个方向的位移(或速度)和点位坐标(L,B,H)。现在用余纬 θ、经度 λ 以及球心距 r 组成的球面坐标系来研究球面块体的运动和变形。将球面坐标系下的变形用泰勒级数展开,有

$$\begin{cases} u_\theta = U_\theta + \left.\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \lambda}\right|_0 \Delta\lambda + \left.\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right|_0 \Delta\theta + r_0 \left.\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}\right|_0 \dfrac{\Delta r}{r_0} + \cdots \\ u_\lambda = U_\lambda + \left.\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}\right|_0 \Delta\lambda + \left.\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \theta}\right|_0 \Delta\theta + r_0 \left.\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial r}\right|_0 \dfrac{\Delta r}{r_0} + \cdots \\ u_r = U_r + \left.\dfrac{\partial u_r}{\partial \lambda}\right|_0 \Delta\lambda + \left.\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right|_0 \Delta\theta + r_0 \left.\dfrac{\partial u_r}{\partial r}\right|_0 \dfrac{\Delta r}{r_0} + \cdots \end{cases} \tag{8.65}$$

上述方程是变形位移按泰勒级数在块体中心处的展开式,$\Delta\lambda$、$\Delta\theta$ 和 Δr 是指各观测点至块体中心的值,下标 0 表示用块体中心计算得到的值,只保留到了 $\Delta\lambda$、$\Delta\theta$、Δr 的一阶项。

在球面坐标系中,计算应变和旋转的公式如下:

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r}, \\
\varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r}, \\
\varepsilon_{\lambda\lambda} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \dfrac{u_\theta}{r}\cot\theta + \dfrac{u_r}{r}, \\
\gamma_{\theta\lambda} = 2\varepsilon_{\theta\lambda} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} - \dfrac{u_\lambda}{r}\cot\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \lambda}, \\
\gamma_{\lambda r} = 2\varepsilon_{\lambda r} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_r}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial r} - \dfrac{u_\lambda}{r}, \\
\gamma_{\theta r} = 2\varepsilon_{\theta r} = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\
2\varpi_\theta = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_r}{\partial \lambda} - \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial r} - \dfrac{u_\lambda}{r}, \\
2\varpi_\lambda = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} + \dfrac{u_\theta}{r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\
2\varpi_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} + \dfrac{u_\lambda}{r}\cot\theta - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \lambda}
\end{cases}
\tag{8.66}
$$

如果按照式(8.65)的方式来表达式(8.66)的话，则需要对式(8.66)做如下替换：r 替换成 $r_0+\Delta r$，$\cot\theta$ 和 $\mathrm{sim}\theta$ 中的 θ 替换成 $\theta_0+\Delta\theta$，并且式(8.66)的展开式中只包含 $\Delta r/r_0$、$\Delta\theta$ 和 $\Delta\lambda$。由于需要计算的是整个块体平均的运动参数和应变参数，因此需要对式(8.66)求平均，得到块体的旋转参数和应变参数。考虑到式(8.65)是在块体中心处展开的，因此，$\Delta r/r_0$、$\Delta\theta$ 和 $\Delta\lambda$ 的平均值为0。于是有：

$$
\begin{cases}
\left.\dfrac{\partial u_r}{\partial r}\right|_0 = \overline{\varepsilon_{rr}}, \\
\left.\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right|_0 = r_0\,\overline{\varepsilon_{\theta\theta}} - U_r, \\
\left.\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}\right|_0 = r_0\sin\theta_0\,\overline{\varepsilon_{\lambda\lambda}} - U_\theta\cos\theta_0 - U_r\sin\theta_0, \\
\left.\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \lambda}\right|_0 = r_0\sin\theta_0\,\overline{\varepsilon_{\theta\lambda}} - \overline{\varpi_r}\,r_0\sin\theta_0 + U_\lambda\cos\theta_0, \\
\left.\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \theta}\right|_0 = r_0\varepsilon_{\lambda\theta} + \overline{\varpi_r}\,r_0, \\
\left.\dfrac{\partial u_\phi}{\partial r}\right|_0 = \overline{\varepsilon_{\phi r}} - \overline{\varpi_\theta}, \\
\left.\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}\right|_0 = \overline{\varepsilon_{\theta r}} + \overline{\varpi_\lambda}, \\
\left.\dfrac{\partial u_r}{\partial \lambda}\right|_0 = (\overline{\varepsilon_{\lambda r}} + \overline{\varpi_\theta})\,r_0\sin\theta_0 + U_\lambda\sin\theta_0, \\
\left.\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right|_0 = r_0(\overline{\varepsilon_{\theta r}} - \overline{\varpi_\lambda}) + U_\theta
\end{cases}
\tag{8.67}
$$

将式(8.67)代入式(8.65)，有

$$
\begin{cases}
u_{\lambda} = U_{\lambda} - U_{\theta}\cos\theta_0\Delta\lambda - U_r\sin\theta_0\Delta\lambda + \\
\qquad \overline{\varepsilon_{\lambda\lambda}}r_0\sin\theta_0\Delta\lambda + r_0\,\overline{\varepsilon_{\theta\lambda}}\Delta\theta + \overline{\varepsilon_{\lambda r}}\Delta r + r_0\,\overline{\varpi_r}\,\Delta\theta - \overline{\varpi_{\lambda}}\,\Delta r, \\
u_{\theta} = U_{\lambda}\cos\theta_0\Delta\lambda + U_{\theta} - U_r\Delta\theta + \overline{\varepsilon_{\theta\lambda}}r_0\sin\theta_0\Delta\lambda + \\
\qquad r_0\,\overline{\varepsilon_{\theta\theta}}\Delta\theta + \overline{\varepsilon_{\theta r}}\Delta r - \overline{\varpi_r}\,r_0 + \sin\theta_0\Delta\lambda + \overline{\varpi_{\lambda}}\,\Delta r \\
u_r = U_{\lambda}\sin\theta_0\Delta\lambda + U_{\theta}\Delta\theta + U_r + \overline{\varepsilon_{\lambda r}}r_0\sin\theta_0\Delta\lambda + \\
\qquad r_0\,\overline{\varepsilon_{\theta r}}\Delta\theta + \overline{\varepsilon_{rr}}\Delta r - r_0\,\overline{\varpi_{\lambda}}\,\Delta\theta + \overline{\varpi_{\theta}}\,r_0\sin\theta_0\Delta\lambda
\end{cases}
\tag{8.68}
$$

对于给定测站上的位移 u_{θ}, u_{ϕ} 和 u_r,可以采用最小二乘法平差解求出块体的运动和应变参数 $U_{\theta}, U_{\lambda}, U_r, \overline{\varepsilon_{\lambda\lambda}}, \overline{\varepsilon_{rr}}, \overline{\varepsilon_{\theta\theta}}, \overline{\varepsilon_{\lambda\theta}}, \overline{\varepsilon_{\lambda r}}, \overline{\varepsilon_{\theta r}}, \overline{\varpi_{\lambda}}, \overline{\varpi_{\theta}}$ 和 $\overline{\varpi_r}$。如果观测是在自由表面进行的,则 $\overline{\varepsilon_{\lambda r}}$ 和 $\overline{\varepsilon_{\theta r}}$ 为 0,更进一步,Δr 相对于 $r\Delta\lambda$ 和 $r\Delta\theta$ 来说可以忽略不计,于是式(8.68)可简化为:

$$
\begin{cases}
u_{\lambda} = U_{\lambda} - U_{\theta}\cos\theta_0\Delta\lambda - U_r\sin\theta_0\Delta\lambda + \overline{\varepsilon_{\phi\phi}}r_0\sin\theta_0\Delta\lambda + r_0\,\overline{\varepsilon_{\theta\lambda}}\Delta\theta + r_0\,\overline{\varpi_r}\,\Delta\theta \\
u_{\theta} = U_{\lambda}\cos\theta_0\Delta\lambda + U_{\theta} - U_r\Delta\theta + \overline{\varepsilon_{\lambda\theta}}r_0\sin\theta_0\Delta\lambda + r_0\,\overline{\varepsilon_{\theta\theta}}\Delta\theta - r_0\,\overline{\varpi_r}\,\sin\theta_0\Delta\lambda \\
u_r = U_{\lambda}\sin\theta_0\Delta\lambda + U_{\theta}\Delta\theta + U_r - r_0\,\overline{\varpi_{\lambda}}\,\Delta\theta + \overline{\varpi_{\theta}}\,r_0\sin\theta_0\Delta\lambda
\end{cases}
\tag{8.69}
$$

对于给定测站上的位移 u_{θ}、u_{λ} 和 u_r,可以通过式(8.69)用最小二乘法求得 $U_{\theta}, U_{\lambda}, U_r, \overline{\varepsilon_{\lambda\lambda}}, \overline{\varepsilon_{\theta\theta}}, \overline{\varepsilon_{\lambda\theta}}, \overline{\varpi_{\lambda}}, \overline{\varpi_{\theta}}$ 和 $\overline{\varpi_r}$。如果只是在小区域内研究 $\overline{\varpi_r}$,可以把式(8.69)中的 $\overline{\varpi_{\lambda}}$、$\overline{\varpi_{\theta}}$ 去掉。

如果 u_{λ}、u_{θ} 是单位时间的位移量,则 u_{λ}、u_{θ} 就是 λ、θ 方向的位移速率。在实际应用中,进行以下替换:用 v_e 替换 u_{λ},用 v_n 替换 $-u_{\theta}$,用 V_e 替换 U_{λ},用 V_n 替换 $-U_{\theta}$,用 ε_{ee} 替换 $\overline{\varepsilon_{\lambda\lambda}}$,用 γ_{en} 替换 $2\,\overline{\varepsilon_{\lambda\theta}}$,用 ε_{nn} 替换 $\overline{\varepsilon_{\theta\theta}}$,用 $\sin B_0$ 替换 $\cos\theta_0$,用 $\sin L_0$ 替换 $\sin\lambda_0$,用 ΔB 替换 $-\Delta\theta$,用 ΔL 替换 $\Delta\lambda$,则式(8.69)变为如下形式(许才军等,2003):

$$
\begin{bmatrix} v_e \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sin B_0\Delta L & r_0\cos B_0\Delta L & 0 & \frac{1}{2}r_0\Delta B & r_0\Delta B \\ -\sin B_0\Delta L & 1 & 0 & r_0\Delta B & \frac{1}{2}r_0\cos B_0\Delta L & -r_0\cos B_0\Delta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_n \\ \varepsilon_e \\ \varepsilon_n \\ \gamma_{en} \\ \varpi \end{bmatrix} \tag{8.70}
$$

当研究区域为较规则的低纬小区域时,$\sin B_0\Delta L$ 将为 0,则式(8.70)为:

$$
\begin{bmatrix} v_e \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_0\cos B_0\Delta L & 0 & \frac{1}{2}r_0\Delta B & r_0\Delta B \\ 0 & 1 & 0 & r_0\Delta B & \frac{1}{2}r_0\cos B_0\Delta L & -r_0\cos B_0\Delta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_n \\ \varepsilon_e \\ \varepsilon_n \\ \gamma_{en} \\ \varpi \end{bmatrix} \tag{8.71}
$$

其中:r_0 为地球半径;V_e、V_n 为块体的整体性平移运动;ε_e、ε_n 为 e、n 方向的正应变;γ_{en} 为剪应变;ϖ 为块体的刚性旋转角。式(8.70)和式(8.71)即为块体运动和应变模型,我们称它们为模型 1 和模型 2。对于小区域范围,模型 1 和模型 2 是等价的。

如果块体的运动严格限制在地球的表面上(比如说,竖直方向的运动可以忽略不计),则式(8.69)可以看做块体中心移动与绕过球心固定轴的转动,平移量(U_{θ} 和 U_{λ})则可以按刚性旋转运动来处理,即 $U_{\theta} = \overline{\varpi_{\lambda}}\,r_0$ 和 $U_{\lambda} = \overline{\varpi_{\theta}}\,r_0$,于是式(8.69)可变为

$$
\begin{cases}
u_{\lambda} = -\overline{\varpi_{\theta}}\, r_0 - \overline{\varpi_{\lambda}}\, r_0\cos\theta_0\Delta\lambda + \overline{\varepsilon_{\lambda\lambda}}\, r_0\sin\theta_0\Delta\lambda + r_0\,\overline{\varepsilon_{\theta\lambda}}\,\Delta\theta + \overline{\varpi_r}\, r_0\Delta\theta \\
u_{\theta} = -\overline{\varpi_{\theta}}\, r_0\cos\theta_0\Delta\lambda + \overline{\varpi_{\lambda}}\, r_0 + \overline{\varepsilon_{\lambda\theta}}\, r_0\sin\theta_0\Delta\lambda + r_0\,\overline{\varepsilon_{\theta\theta}}\,\Delta\theta - \overline{\varpi_r}\, r_0\sin\theta_0\Delta\lambda
\end{cases}
\tag{8.72}
$$

在式(8.72)中,只有$\overline{\varepsilon_{\lambda\lambda}}$,$\overline{\varepsilon_{\theta\theta}}$,$\overline{\varepsilon_{\lambda\theta}}$,$\overline{\varpi_{\lambda}}$,$\overline{\varpi_{\theta}}$和$\overline{\varpi_r}$六个未知数。欧拉刚性运动旋转矢量为

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \sqrt{\overline{\varpi_r}^{\,2} + \overline{\varpi_{\lambda}}^{\,2} + \overline{\varpi_{\theta}}^{\,2}} \\
\Phi &= \operatorname{atan}\left(\frac{\overline{\varpi_r}\sin\theta_0\sin\lambda_0 + \overline{\varpi_{\theta}}\cos\theta_0\sin\lambda_0 + \overline{\varpi_{\lambda}}\cos\lambda_0}{\overline{\varpi_r}\sin\theta_0\cos\lambda_0 + \overline{\varpi_{\theta}}\cos\theta_0\cos\lambda_0 - \overline{\varpi_{\lambda}}\sin\lambda_0}\right) \\
\Lambda &= \operatorname{acos}\left(\frac{\overline{\varpi_r}\cos\theta_0 - \overline{\varpi_{\theta}}\sin\theta_0}{\Omega}\right)
\end{aligned}
\tag{8.73}
$$

在实际应用中,进行以下替换:用 v_e 替换 u_{λ},用 v_n 替换 $-u_{\theta}$,用 ε_{ee} 替换$\overline{\varepsilon_{\lambda\lambda}}$,用 γ_{en} 替换 $2\,\overline{\varepsilon_{\lambda\theta}}$,用$\varepsilon_{nn}$替换$\overline{\varepsilon_{\theta\theta}}$,用 $\sin B_0$ 替换 $\cos\theta_0$,用 $\sin L_0$ 替换 $\sin\lambda_0$,用 ΔB 替换 $-\Delta\theta$,用 ΔL 替换 $\Delta\lambda$。于是有(许才军等,2003)

$$
\begin{bmatrix} v_e \\ v_n \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
-r_0 & -r_0\sin B_0\Delta L & -r_0\Delta B & r_0\cos B_0\Delta L & 0 & \frac{1}{2}r_0\Delta B \\
r_0\sin B_0\Delta L & -r_0 & r_0\cos B_0\Delta L & 0 & r_0\Delta B & \frac{1}{2}r_0\cos B_0\Delta L
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varpi_{\theta} \\ \varpi_{\lambda} \\ \varpi_r \\ \varepsilon_e \\ \varepsilon_n \\ \gamma_{en} \end{bmatrix}
\tag{8.74}
$$

式(8.74)即为块体的运动和应变模型的另一表达式,称它为模型3。而式(8.74)在 XYZ 坐标系下可表示为如下形式:

$$
\begin{bmatrix} v_e \\ v_n \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
-r_0\cos L\sin B & -r_0\sin B\sin L & r_0\cos B & r_0\cos B_0\Delta L & 0 & \frac{1}{2}r_0\Delta B \\
r_0\sin L & -r_0\cos L & 0 & 0 & r_0\Delta B & \frac{1}{2}r_0\cos B_0\Delta L
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varpi_x \\ \varpi_y \\ \varpi_z \\ \varepsilon_e \\ \varepsilon_n \\ \gamma_{en} \end{bmatrix}
\tag{8.75}
$$

上述表述称为模型4。模型3和模型4在理论上也是等价的。

当仅考虑板块以刚体整体运动时,式(8.75)可变为

$$
\begin{bmatrix} v_e \\ v_n \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
-r_0\cos L\sin B & -r_0\sin L\sin B & r_0\cos B \\
r_0\sin L & -r_0\cos L & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varpi_x \\ \varpi_y \\ \varpi_z \end{bmatrix}
\tag{8.76}
$$

这就是最常用的刚体运动模型,简称模型5。

模型1、2、3、4和5即是描述块体的运动和应变的常用模型,从以上的推导过程中我们可以分析得出它们的特点:

(1)模型1、2属一类模型,它们强调块体的整体平移运动和旋转运动,并用块体中心点的平移量和旋转量代表整个块体的平移量和旋转量。而块体上的各个测点可以有不同应变量,其中模型2更适用于低纬度地区。

(2)模型3、4在理论上是等价的,它们强调块体的整体旋转运动,而块体上的各个测点可以有不同的应变量,模型3、4较模型1、2更适用于大区域范围的活动块体。

(3)模型5则认为块体是完全刚性,只有整体旋转运动,不考虑或忽略块体的弹塑性应变量。

第9章　连续形变、应变观测与数据处理

用地壳形变观测结果描述地壳的形变及其演变过程,对研究现今的地壳运动规律和提取与地震有关的前兆信息是有效的,它提供了具有物理意义的地壳运动的直接证据和定量特征(中国地震局监测预报司,2003)。地壳形变观测技术系统按空间区域、观测方法的监测能力和所承担的任务分为中国大陆地壳形变监测系统、区域地壳形变监测系统、断层形变监测系统和固体潮汐形变监测系统等4大类。

固体潮汐形变监测系统主要包括地倾斜、重力、洞体应变与钻孔应变等4种潮汐形变监测网。它们都是在一个频带域相当宽阔的范围内监测地壳连续变动,观测地球对月、日起潮力的不同响应。固体潮汐形变监测主要内容有:应变速率与倾斜速率、方向变化、重力非潮汐变化、潮汐因子(γ,δ,α)空间分布及其系统偏离现象即地壳岩石物性变化。固体潮汐形变监测主要为中震、短震、临震预报研究提供非潮汐形变速率变化或方向转折、潮汐因子的动态变化图像和时间进程等前兆信息;为天文、大地测量、地震地质和地球动力学等学科提供基础或背景资料。

从20世纪90年代起,地壳形变观测已全面进入数字化观测阶段,中国地震局科技监测司和中国地震局监测预报司分别与1995年和2003年出版了《地震地壳形变观测技术》、《地壳形变数字观测技术》。本章主要介绍地倾斜、洞体应变与钻孔应变测量等连续形变、应变观测与数据处理,应变测量、倾斜测量也是近场形变监测中定点断层形变测量的基本手段。

§9.1　地倾斜测量

地面倾斜观测,起初是为研究日月引力作用下地球的形变。虽则潮汐形变极小,但在19世纪初即已被测出,并发现按该形变测量计算得到的剪切模量(全球平均值)比最优质钢的模量还大。

根据倾斜固体潮的观测可以确定地核的切变模量,而从力与形变之间的相移则可判断地核的流变特性。

1957年(国际地球物理年)以来,人们对倾斜观测的兴趣更为增长。随观测点的增多和仪器的改进,确证了倾斜固体潮的振幅和相位原理与倾斜仪站所处地岩石力学性质有关,由此根据倾斜固体潮振幅与相位的异常去研究地壳块体结构,也即用倾斜固体潮的观测去探测地壳内的断裂。

与倾斜固体潮同时发展起来的还有地表慢倾斜的研究。这种倾斜观测的目的是想弄清强震前的地倾斜异常。

地倾斜观测目的是研究地壳形变垂直方向的相对运动和固体潮汐的动态变化,它是地壳形变学科不可缺少的一个重要组成部分。倾斜观测不仅给我们一个垂直位移或地壳局部隆起的概念,而且为地球固体潮汐、地壳岩石物理性质的变化及地球参数等提供科学实验数据。

地倾斜观测对象是地平面与水平面之间的夹角（即地平面法线与铅垂线的夹角）及其随时间的变化，地倾斜量的单位为角秒，具有大小和方向（中国地震局，2001）。

地倾斜使用倾斜仪来观测，其观测技术要求：观测精度为0.003″；零漂≤0.005″；采样率为1次/min。

目前使用的倾斜仪有水平摆倾斜仪、垂直摆倾斜仪和水管仪，它们都是应用如下原理，见图9.1。

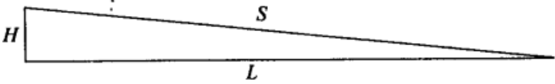


图9.1

其中：H代表因倾斜而在垂直方向上发生的高度变化，L代表一段基线，这个参量在水管倾斜仪中代表水管仪的基线长度；S是整个三角形的斜边。这只是仪器在理论上的应用原理，具体到每种仪器，它们在构造上差别很大。

地倾斜观测使用的仪器，最基本的类型为固定摆倾斜仪和水管式倾斜仪。

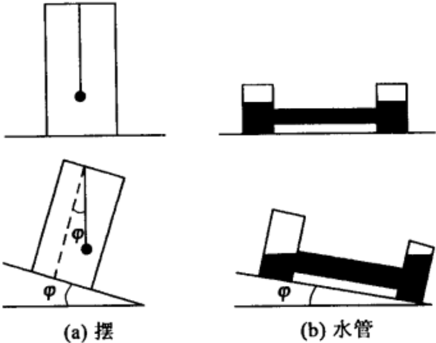


图9.2　当前地球物理学上最常用的倾斜仪的简单工作原理
（引自国家地震局科技监测司，1995）

（1）固定摆倾斜仪。如图9.2(a)（φ为倾角）。当地球表层即地壳局部倾斜时，摆架整个倾斜，当然摆还是继续垂直地悬挂着，即仍在铅垂线方向内。摆架倾斜的角度就是倾角。

（2）水管式倾斜仪。如图9.2(b)，两个盛水的本体用一根长管道连通，本体中水位的变化与地面的倾斜成正比。

9.1.1　水平摆倾斜仪

水平摆是由铅垂摆演变而来的。人们用摆来测量某一物体倾斜量的变化，最容易想到的是用铅垂摆。一根软索，下端联结一个重锤，悬挂在需要测量倾变的物体上，就成为一个铅垂摆，如图9.2(a)所示。在没有外力干扰时，重锤总是位于其位能最低的点上，摆的软索位于垂线上。在悬挂摆的物体倾斜了一个角φ后，铅垂摆在空间的位置不会变动，仍在铅垂线上。

比较铅垂锤前后在物体上的两个位置之差,就得出物体倾斜的角度。要提高倾斜角 φ 的测量精度就得增长摆长 l。若我们欲使 0.01″的变化在摆的末端产生 1cm 的位移时,摆长 l 需长达 206km,这是无法做到的。

为改善这种情况,使得能够测量微小的倾变量,而又不使仪器过于庞大,这时可采用水平摆。

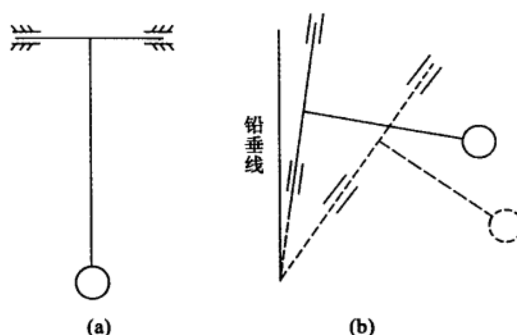


图 9.3 铅垂摆演进为水平摆示意图(引自国家地震局科技监测司,1995)

什么是水平摆呢?绕一轴线转动的铅垂摆,其重锤通过摆杆刚性连接在一横轴上,横轴可以在轴套内转动。横轴是水平量放的,摆杆就位于垂线上,见图 9.3(a)。若这时将摆的转轴慢慢地直立起来。如图 9.3(b),就可看到两个现象:一个是摆的自振周期慢慢增大,一个是推动摆转动所需要的力矩慢慢减小。当摆轴完全直立起来和铅垂线重合时,摆的自振周期就变得无穷大,转动力矩等于零(假定转轴的摩擦力等于零)。摆轴直立后的这些变化对人们很有用处。沉重的门之所以能轻轻地开关,就是利用了转轴直立时,门的转动力矩变小的特性。而自振周期增大的特性被利用为提高摆测量倾变灵敏度的有力手段。转轴直立起来但又不在铅垂线上,与铅垂线只差极微小的角度的摆,就称为水平摆,因为此时摆的振动方向近于在水平面上。

典型的水平摆有图 9.4 所示几种。

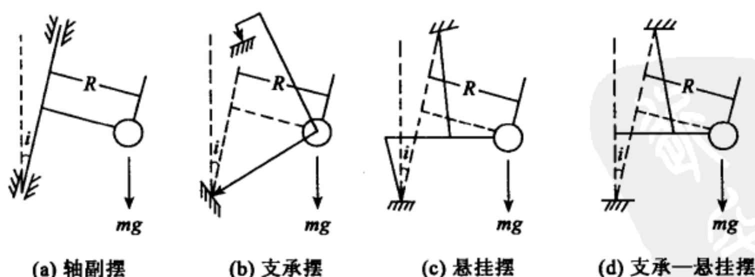


图 9.4 水平摆的四种结构形式(引自国家地震局科技监测司,1995)

无论水平摆何种形式,它们都有下列共同的三个结构要素:一是一根转轴,它与铅垂线的

夹角称摆轴倾角 i；二是一只摆锤，其重量是 mg；三是一个摆长即摆锤质心与转轴保持恒定不变的垂距 R。当 i 角足够小时，这种摆便统称为水平摆。

我国应用最多的是 JB 型金属水平摆倾斜仪和 SQ－70 型石英水平摆倾斜仪。SQ－70 型石英水平摆倾斜仪借助水平摆的高效性能，将地面微小倾斜转变为水平摆的偏转，再经光杆放大记录下来。

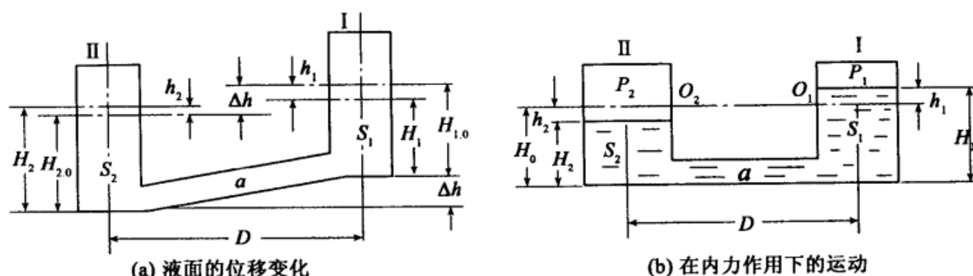
$$\varphi = \eta\delta \qquad \delta = \lambda n$$

$$\eta = 0.4155\,\frac{1}{AT^2} = K/T^2 \qquad \text{（检测周期标定法）}$$

式中：φ 为地倾斜角（″），δ 为光点偏离基线立距（mm），λ 为光敏传感器步长（mm）；n 为光敏传感器离开基线的步数；η 为仪器格值（取三位有效数字，单位：″/mm）；l 为水平摆折合摆长（mm）；A 为光杆长度（本体罩壳透镜中心至扫描立距，准确率 5mm）；T 为水平摆自振周期（准确率 0.01s），K 为仪器格值物性常数。水平摆倾斜仪观测通常在地表观测，干扰较大，有漂移。

9.1.2 水管式倾斜仪

水管式倾斜仪简称为水管仪，因为是基于连通管的原理制成的，也有称其为连通管的。水管倾斜仪根据连通管内水面保持自然水平的原理，当安装仪器主体的台基出现相对垂直位移时，两端本体中的液面便会相对于本体发生变化，此变化传给漂浮在液面上的浮子，使之随液面同步移位。仪器主体是反映地面运动的主要部分，主体中以水为工作介质。本体中液面及漂浮在液面上的浮子是反映地面运动的关键部分。



(a) 液面的位移变化　　(b) 在内力作用下的运动

图 9.5 （引自中国地震局监测预报司，2003）

如图 9.5 所示，两个相同的盛水容器，开始两管中的水面平行，当地面出现相对垂直运动或倾斜时，产生相对垂直高差 Δh（单位：μm），由此可以换算出相应的地面倾斜角度 $\Delta\psi$（单位：″）

$$\Delta\psi = \frac{\Delta h}{D}\text{（弧度）} = 0.206265''\frac{\Delta h}{D}$$

式中：D 为两本体的中心距离（单位：m）。

以上是理想状态下最简单的模型，实际中还要考虑到液体内力（重力及粘滞阻力）的影响。

水管倾斜仪主要用米切尔森干涉仪监测水管两端水位变化，其原理见图 9.6：从铍/氖气

体激光器发出的未经准直的光束 A 到达半反射镜子 B 后分解成垂直 C 和水平 C_1 两束光线。传送来的垂直光线通过一个窗口进入一个密封很好的直径为 10cm 的接收器，并从一个浸没的水中 2.5cm 深处的直角反光镜反射回来。当水平面发生变化时，就会引起光程长度的改变，使垂直反射回来的光线与水平反射回来的光线发生干涉，结果导致条纹的移动。采用楔形棱镜和准直管可把清晰可见的圆形条纹的移动量观测出来。

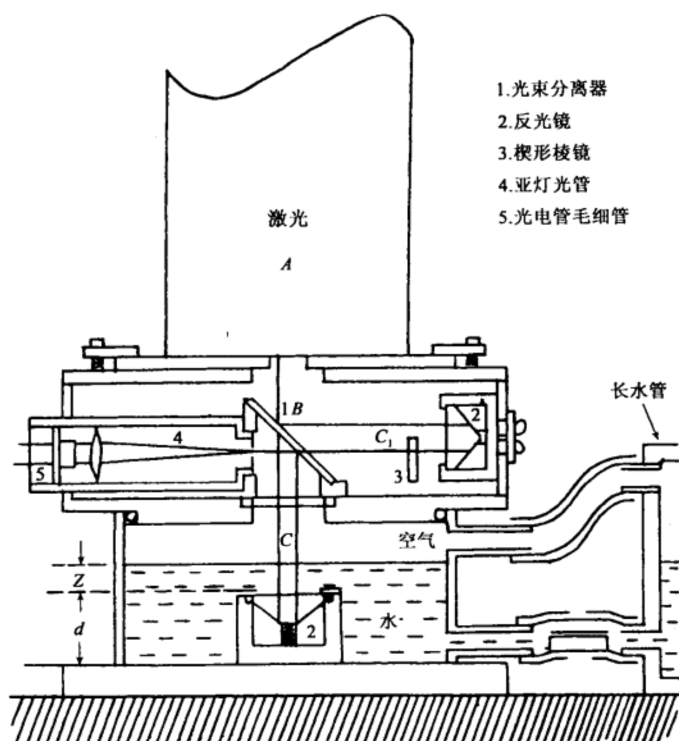


图 9.6 米切尔森干涉仪水深传感器面图（引自张国民等，2001）（中国地震局，2001）

9.1.3 地倾斜观测

9.1.3.1 地倾斜观测场地及环境要求

（1）观测场地勘选。台址选在活动断裂带附近，离开破碎带的距离≥500m；台基岩性坚硬完整，致密均匀（例如花岗岩、石英砂岩、灰岩等）；岩层倾角≤20°；避开风口、山洪汇流处和泥石流、滑坡、溶洞发育地带，避开海、湖、河、水库、深层抽水注水、大型仓库、铁路、主干公路和爆破等干扰源。

（2）观测装置设置。地倾斜观测按北南及东西两分量正交设置，若受场地限制，两分量夹角在 60°～120°之间；若场地许可，可斜交设置第三分量；方位的测定误差≤1°。

(3)观测室设计。仪器室的结构与尺寸应满足所设仪器的要求。

(4)仪器墩设计。仪器墩为加工粘接而成的岩石墩(花岗岩、大理石岩、灰岩等),或洞室开凿时预留下的原生基岩墩,四周设防震槽,墩顶面水平,高差≤2mm,同分量仪器墩之间无断层或夹层;亦可开凿壁龛或地槽安放仪器。

(5)观测台址环境要求。台址 3km 范围内不得进行深层抽水注水、采石爆破、筑堤建水库,1km 范围内不得修建大型仓库和修筑铁路及主干公路。

(6)观测洞室环境。仪器洞室顶部地形对称,植被良好;水平坑道仪器室顶覆盖及旁侧覆盖≥40m;竖井仪器室埋深≥20m;洞室底面高于当地最高洪水位和地下水位。

(7)仪器室条件。室温日变幅度≤0.03℃,年变幅度≤0.5℃。

9.1.3.2 观测系统技术要求与观测质量监控

(1) 测试仪器技术要求。分辨率优于 0.0005″;动态范围(最大量程与分辨率之比)≥1×10^4;零漂≤2″年;采样率≥1 次/min。工作电压 180～240V,输出电压 −2～+2V,直流功耗≤6W;具有交直流切换和防雷功能。在相对湿度 100% 的洞室内,工作寿命≥10 年。

(2) 辅助设施技术要求。设置气压计和雨量计,在各传感器设置端配置温度计;气压测量分辨率为 0.1hPa;雨量测量分辨率为 1mm;温度测量分辨率为 0.01℃。

(3)标定设备技术指标。格值标定重复性 <99%;标定幅度≥1×10^{-6};格值年稳定性优于 95%。

(4)标定方法。采用国家长度计量标准传递。

(5)标定周期。每半年标定一次;仪器安装、检修后进行标定;落实异常等认为必要时可进行标定。

(6)标定时间。标定时间选在小潮时段或波峰、波谷时段。

(7)观测系统工作性能检测。定期对观测系统性能进行检测,并提交评估报告。

(8)值班日志。值班人员当日填写值班日志;标明观测曲线中断、形态畸变的时段(准确至小时)及天气过程;收集中、强地震时的特异记录图像和典型干扰图像;对突变事件及时调查核实,记录调查核实结果并上报。

9.1.3.3 观测数据的收集、处理与报送

(1)数据采集。采集地倾斜、气压及温度观测仪器的原始输出分钟值、整点值。

(2)数据处理。按日将原始采样数据处理成地倾斜、气压和温度的分钟值、整点值,填报整点值表,绘制整点值曲线图。按月处理地倾斜、气压、温度的日均值、旬均值、月均值,生成月整点值数据文件,打印整点值月报表并绘制月整点值曲线图。若记录数据缺值时间少于 4 小时,应按记录曲线走势补插数据,补插数加圆括号以示区别;缺值≥4 小时,按指定方法处理。

(3)数据存储。地倾斜、气压和温度的分钟值、整点值数据文件以磁介质保存于台站一份;地倾斜、气压和温度的整点值数据文件及其图件以纸介质保存于台站一份。

(4)资料报送。地震台站按有关规定报送以下资料:每日报送前一天地倾斜分钟值数据文件;每月报送月整点值数据文件、月报表和月整点值曲线图;每年报送全年日均值曲线图、辅助观测数据(室温、湿度、气压、温度、降雨量)曲线图、工作年报表及年度技术工作总结。

§9.2 洞体应变观测

洞体应变观测的对象是洞体内两基点之间水平距离随时间的相对变化。压缩为负，伸长为正。

应变仪有两大类：第一类为水平应变型（如 SSY-Ⅱ 型水平石英伸缩仪），第二类为钻孔应变型（如 TJ 型体积式应变仪等）。

应变仪无论采用哪种方式，其原理为选取一固定长的基线，一端固定，一端活动，测出活动端相对于固定端的微小变化。图 9.7 为仪器布设示意图。



图 9.7 仪器布设示意图（据国家地震局科技监测司，1995）

洞体应变观测主要利用伸缩仪测定水平应变，其观测技术要求：观测精度为 6×10^{-9}；零漂 $\leqslant 1\times10^{-8}$；采样率为 1 次/min。

伸缩仪是精密测量地壳岩体两点间水平距离相对变化的仪器，使用于观测地壳应变和固体潮水平分量的连续变化，为研究地震孕育过程的水平应变的变化规律提供数据，也为地球弹性研究提供重要数据。

自 1915 年美国地震学家贝尼奥夫研制了第一台有价值的石英伸缩仪后，美、英、苏、日、比、德等国相继研制了高灵敏度的伸缩仪，仪器的灵敏度一般都在潮汐灵敏度 10^{-8}上。

我国自 1966 年邢台地震以来，地震预报事业开始起步。20 世纪 70 年代初，研制成功了目视伸缩仪，在几个台站安装使用，为研究应变和地震关系奠定了初步基础。1983 年成功地研制出第二代观测仪——SSY-Ⅱ 型水平石英伸缩仪，其灵敏度为 10^{-9}，能清晰地记录固体潮汐。1998 年，中国地震局地震研究所又推出了新型的应变观测仪——SS-Y 型伸缩仪。

9.2.1 SSY-Ⅱ型石英管伸缩仪观测水平应变

SYY-Ⅱ 水平石英伸缩仪（图 9.8）是精密测量地壳两点间水平距离相对变化的仪器，用于观测地壳水平应变和固体潮水平分量的变化，为研究地震孕育过程的水平应变的变化规律和地球物理场各参量的变化，以及大型精密工程的水平变形之用。此类仪器是用温度系数很小（约 10^{-7}/℃）的溶凝石英（SiO_2）管作为长度标准，来测量和比较地面上两点间的距离变化。

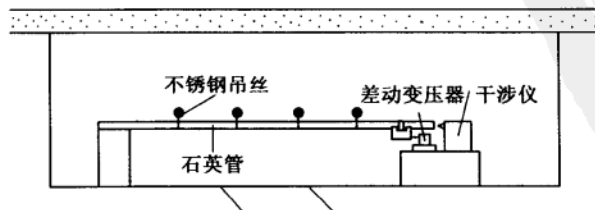


图 9.8 石英管伸缩仪示意图（引自张国民等，2001）

观测原理与计算公式如下：

$$\varepsilon = \eta\delta$$

式中：ε 为水平地应变（10^{-10}）；δ 为模拟记录曲线至基线之距离（格）；η 为模拟记录格值，取四位有效数字（10^{-10}/格）。

安装 SSY-Ⅱ型石英管伸缩仪时，采用激光准直仪或水准仪对石英管进行校直、校平。安装由固定端开始，石英管的中心对准激光光束；石英管之间要端面相接，不留间隙。采用环氧树脂固紧时，严格禁止环氧树脂涂在石英管的端面上；石英管应尽量接近地面；底面的泡沫塑料板必须在石英管安装前铺好；确定安装传感器的位置，并进行基岩的局部整平；最后，将所有金属接头部位涂上中性黄油。

安装 SSY-Ⅱ型石英管伸缩仪标定系统时，在洞室外将水银灌入水银杯、尼龙软管及胀盒内，然后与钢管连接并固定在基座上，水银杯内水银高度约占$\frac{1}{2}$，其上加一层 5mm 厚的硅油或液态石蜡。

安装 SSY-Ⅱ型石英管伸缩仪传感器时，将磁传感器的发磁体（或电容传感器的电容动片）安装在石英管上，检测头（或电容定片）安装在与基岩连接的机械微调装置上。

SSY—Ⅱ型石英管伸缩仪格值标定常用两种方法：水银胀盒标定法和微动平台标定法。

（1）水银胀盒标定法

$$\eta = \frac{A\Delta HK}{\Delta UL} \times 10^{-8}\ (1/\text{格})$$

式中：K 为胀盒系数（μm/mm）；ΔH 为水银标升降量（mm）；ΔU 为水银杯高度变化 ΔH 时相应的整机输出变量（mV）；A 为记录仪满量程（如 10m 或 20m）；L 为伸缩仪基线长（m）。

水银胀盒标定系统示意图如图 9.9 所示。

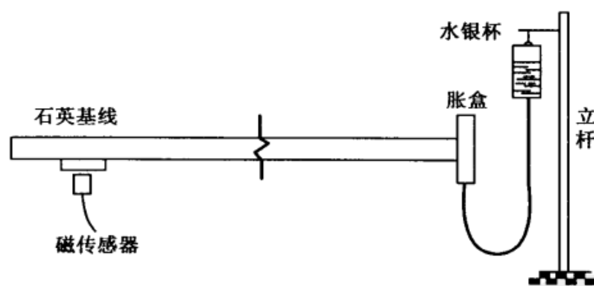


图 9.9 水银胀盒标定系统示意图（据国家地震局科技监测司，1995）

（2）微动平台标定法（图 9.10）

$$\eta = \frac{A\Delta L_1 K}{\Delta UL} \times 10^{-8}\ (1/\text{格})$$

式中：$K = \Delta L_2/\Delta L_1$ 为标定台修正系数；ΔL_1 为微动平台读数增量（mm）；ΔL_2 为千分表读数增量（μm）；ΔU 为整机输出变量（mV）；A 为记录仪满量程（如 10m 或 20m）；L 为伸缩仪基线长（m）。

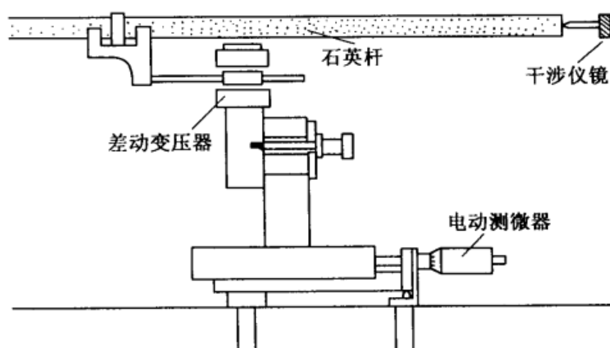


图 9.10 伸缩仪微动平台标定示意图(引自张国民等,2001)

9.2.2 SS-Y 型伸缩仪观测水平应变

SS-Y 型伸缩仪与 20 世纪 80 年代研制石英伸缩仪比较有如下特点:

(1)提高了仪器的灵敏度,其基线不大于 10m 时,能记录到明显的应变固体潮汐,因此有"短基线伸缩仪"之称。

(2)基线采用含铌特种铟钢棒,其温度系数比石英还要小。铟钢棒的连接,安装调试和运输都比石英管简便、安全,避免了石英管破裂现象。

(3)传感器采用了高精度的电涡流位移传感器,其输出只与被测位移方向的位移量有关,而与另外两个方向的位移无关,提高了仪器格值的稳定性。而以前的石英伸缩仪采用的日本磁传感器的输出不仅与被测位移方向的位移量有关,而且与发磁体和检测头之间的间距有关,仪器运行中此间距的微小变化将引起传感器灵敏度的变化,从而引起仪器格值的变化。

(4)具有自动标定装置,取代了胀盒标定,彻底解决了水银污染山洞问题。同时克服了人工标定时的人为影响。

(5)增加了模拟记录的自动调零装置。

(6)信号可直接供给地震前兆数据采集器,进行数据传输与计算机联网。

SS-Y 型伸缩仪整体构造以线膨胀系数极小的含铌特种铟钢材料为基线,标定器与相邻的框架安装于测量墩,固定座安装于固定墩,如图 9.11 所示,基线一端与固定座连接固定,其余由测量方向无阻力的悬吊系统托起。悬吊系统由框架和吊丝组成,每隔 1.5m 设置一个支墩,框架固定在支墩上。基线的另一端连接一片直径大于 24mm 的金属极片。传感器的探头固定在标定器上。探头与极片的间距随之发生变化,电涡流位移传感器将此间距变化转换成电压变化,经过前置放大器,由电缆传输至主机。由主机分送至自动平衡记录仪做固体潮曲线模拟记录;分送至应变标定数控仪做整点值自动数字打印和自动模拟作图;分送至地震前兆数据采集器进行传输联网。通过灵敏度、格值等换算,便可计算出应变的变化。

SS-Y 型伸缩仪应变测量基本原理如下:当地壳上两基点间水平距离出现相对变化时,应变仪便输出相应的电压变化,据此可计算出地应变。

SS-Y 型伸缩仪观测的水平应变值公式如下(中国地震局,2001):

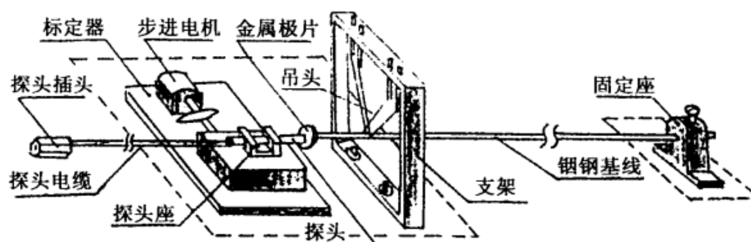


图 9.11 SS-Y 型伸缩仪原理结构示意图(据国家地震局科技监测司,1995)

$$\varepsilon = \eta\delta, \eta = 0.2\beta\eta'(1/格)$$

$$\eta' = \frac{\Delta L}{\Delta \overline{U} L} \times 10^{-6}(1/\mathrm{mV})$$

式中:ε 为水平地应变(10^{-10});δ 为模拟记录曲线至基线之距离(格);η 为模拟记录格值,取四位有效数字(10^{-10}/格),记录仪量程 ±10mV,记录纸为 100 格;β 为衰减倍数;η'电压记录格值;ΔL 为标定器位移常数;$\Delta\overline{U}$ 为电压差的均值(mV);L 为基线长(m)。

9.2.3 洞体应变台站观测(中国地震局,2001)

9.2.3.1 洞体应变台站观测场地环境要求

(1)观测场地勘选。台址选在活动断裂带附近,离开破碎带的距离≥500m;台基岩性坚硬完整,致密均匀(例如花岗岩、石英砂岩、灰岩等);岩层倾角≤20°;避开风口、山洪汇流处和泥石流、滑坡、溶洞发育地带,避开海、湖、河、水库、深层抽水注水、大型仓库、铁路、主干公路和爆破等干扰源。

(2)观测装置设置。洞体应变观测按北南及东西两分量正交设置,若受场地限制,两分量夹角在 60°~120°之间;若场地许可,可斜交设置第三分量;方位的测定误差≤1°。

(3)观测室设计。仪器室的结构与尺寸应满足所设仪器的要求。

(4)仪器墩设计。仪器墩为加工粘接而成的岩石墩(花岗岩、大理石岩、灰岩等)或洞室开凿时预留下的原生基岩墩,四周设防震槽,墩顶面水平,高差≤2mm,同分量仪器墩之间无断层或夹层;亦可开凿壁龛或地槽安放仪器。

(5)观测台址环境的维护。台址 3km 范围内不得进行深层抽水注水、采石爆破、筑堤建水库,1km 范围内不得修建大型仓库和修筑铁路及主干公路。

(6)观测洞室环境。仪器洞室顶部地形对称,植被良好;洞室顶覆盖及旁侧覆盖≥40m;洞室底面高于当地最高洪水位和地下水位。

(7)仪器室条件。室温日变幅度≤0.03℃,年变幅度≤0.5℃。

9.2.3.2 观测系统技术要求与观测质量监控

(1)测试仪器技术要求。分辨率优于 1×10^{-9};动态范围(最大量程与分辨率之比)≥1×10^{4};零漂≤4×10^{-6}年;采样率≥1 次/min。工作电压 180~240V,输出电压 -2~+2V,直流功耗≤6W;具有交直流切换和防雷功能。在相对湿度 100% 的洞室内,工作寿命≥10 年。

(2)辅助设施技术要求。设置气压计和雨量计,在各传感器设置端配置温度计;气压测量分辨率为0.1hPa;雨量测量分辨率为1mm;温度测量分辨率为0.01℃。

(3)标定设备技术指标。格值标定重复性<99%;标定幅度≥1×10^{-6};格值年稳定性优于95%。

(4)标定方法。采用国家长度计量标准传递。

(5)标定周期。每半年标定一次;仪器安装、检修后进行标定;落实异常等认为必要时可进行标定。

(6)标定时间。标定时间选在小潮时段或波峰、波谷时段。

(7)观测系统工作性能检测。定期对观测系统性能进行检测,并提交评估报告。

(8)值班日志。值班人员当日填写值班日志;标明观测曲线中断、形态畸变的时段(准确至小时)及天气过程;收集中强地震时的特异记录图像和典型干扰图像;对突变事件及时调查核实,记录调查核实结果并上报。

9.2.3.3 观测数据的收集、处理与报送

(1)数据采集。采集洞体应变、气压及温度观测仪器的原始输出分钟值、整点值。

(2)数据处理。按日将原始采样数据处理成洞体应变、气压和温度的分钟值、整点值,填报整点值表,绘制整点值曲线图。按月处理洞体应变、气压、温度的日均值、旬均值、月均值,生成月整点值数据文件,打印整点值月报表并绘制月整点值曲线图。若记录数据缺值时间少于4小时,应按记录曲线走势补插数据,补插数加圆括号以示区别;缺值≥4小时,按指定方法处理。

(3)数据存储。洞体应变、气压和温度的分钟值、整点值数据文件以磁介质保存于台站一份;洞体应变、气压和温度的整点值数据文件及其图件以纸介质保存于台站一份。

(4)资料报送。地震台站按有关规定报送以下资料:每日报送前一天洞体应变分钟值数据文件;每月报送月整点值数据文件、月报表和月整点值曲线图;每年报送全年日均值曲线图、辅助观测数据(室温、湿度、气压、温度、降雨量)曲线图、工作年报表及年度技术工作总结。

§9.3 钻孔应变测量

钻孔应变观测是在钻孔内对岩体应变状态随时间的相对变化进行观测,观测对象包括:体应变、差应变,分量应变。钻孔应变观测精度要达到4×10^{-9};频率响应为0~5Hz;采样率为1次/min。

这种观测手段的优点是:

(1)易于推算测建的附加应力(或应变)状态(最大及最小主应力,主应力方向,或是最大最小主应变值,主应变方向),这在地震研究和分析预报中十分重要。

(2)探头完全用水泥固结于岩孔中,耦合状态紧密可靠,因此探头可以耐受较高的加速度,有较宽的工作频段,从零频到数赫、甚至数百赫。除了能耐受强震、取得强震资料外,还可以记录到可靠性较高的震时应变阶跃,近震和远震的地震波动。

(3)测量探头埋于地下,所受到的干扰程度一般要小于地表浅部的情况。

(4)只要井下仪器不出现故障,其维护管理十分方便,维持费用也较低。

钻孔观测方法的缺点是:钻孔施工费用较高。而当井下仪器出现损坏时,损失更大,因为

探头多为一次性安装，难以取出。

9.3.1 钻孔应变测量基本原理、计算公式

钻孔应变仪内装有微量位移传感元件，其中第 i 支元件读数变化量 M_i，与平面应变场的相对变化量(附加应变状态)ε_1，ε_2，θ_i 三者的关系为

$$M_i = A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + B(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\theta_i \tag{9.1}$$

式中：ε_1 为附加应变状态的最大主应变值；ε_2 为附加应变状态的最小主应变值；θ_i 为 ε_1 的方向至第 i 号元件之间的夹角(以逆时针为正，i = Ⅰ，Ⅱ，…)；A 为体应变(面应变)灵敏系数；B 为剪应变(差应变)灵敏系数。

系数 A 和系数 B 取决于探头结构参数，传感元件灵敏度，以及岩石的力学参数，耦合介质的力学参数及相对厚度等，由厂家给出。由元件读数 M_i 求算出的$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$，$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$和 θ_i 是附加于原有应变状态的"附加应变状态"，或称附加应变值。

由钻孔应变仪的基本原理公式(9.1)出发，可将钻孔应变仪分为三类，相应的计算公式如下：

(1)第一类——体积式钻孔应变仪。根据安装在钻孔仪器中腔体的体积变化，可获得岩体体积的相对变化。

当 $A\neq 0$，而 $B=0$ 时：

$$M = A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \tag{9.2}$$

由探头内的一个元件读数值 M，可得到$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$值，即面应变值。

(2)第二类——剪应变式钻孔应变仪。根据安装在钻孔仪器中几个分量元件的组合观测，可以得到最大和最小主应变值之差，即岩体最大剪应变状态的相对变化。

当 $A=0$ 而 $B\neq 0$ 时：

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{I}} &= B_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\theta_{\mathrm{I}} \\ M_{\mathrm{II}} &= B_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2(\theta_{\mathrm{II}} + 45°) \end{aligned} \tag{9.3}$$

由两个元件的读数 M_{I}，M_{II}值，可得到$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$和 θ_{i1}值，即最大剪应变值 ε_1 及相应于 1 号元件的方位角。

(3)第三类——分量式钻孔应变仪。根据安装在钻孔应变仪器中三个分量以上的元件给出的信息量，获得岩体最大与最小主应变值以及最大主应变轴的方位角。

当 $A\neq 0$，$B\neq 0$ 时：

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{I}} &= A_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + B_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\theta_{\mathrm{I}} \\ M_{\mathrm{II}} &= A_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + B_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\theta_{\mathrm{II}} \\ M_{\mathrm{III}} &= A_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + B_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\theta_{\mathrm{III}} \end{aligned} \tag{9.4}$$

由三个元件的读数 M_{I}，M_{II}，M_{III}值，可得到$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$，$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$和 θ_i 的 3 个未知数(θ_{I}，θ_{II}，θ_{III}之间夹角为已知固定值)。

9.3.2 TJ 型体积式钻孔应变仪

9.3.2.1 仪器的构成

为观测地壳应变状态依时间的微小连续变化，可在钻孔中装入专用的应变传感器进行测

量，该传感器称为钻孔应变仪，或钻孔应变仪的井下部分，俗称为探头。传感器在井下，有助于减少地表气象因素的干扰。

这里介绍第一类钻孔应变仪——体积式钻孔应变仪，简称体应变仪，其外形见图 9.12。

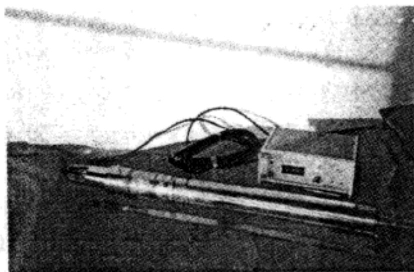


图 9.12　TJ－2 型体应变仪的外形（据吕宠吾等，2003）

通常说的体应变仪，指一个较为完整的观测系统，是由井下探头部分和地面仪器部分组成，如图 9.13 所示。

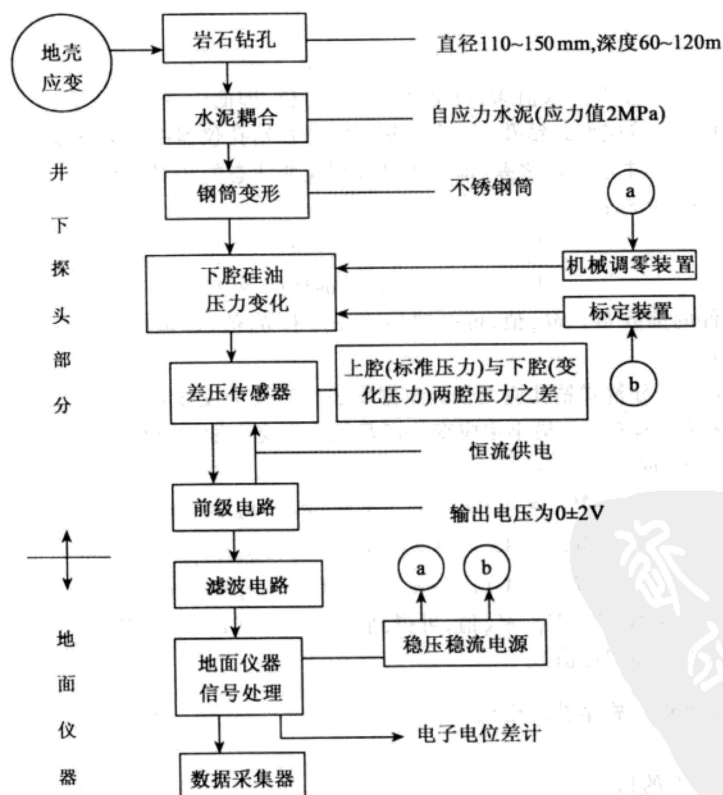
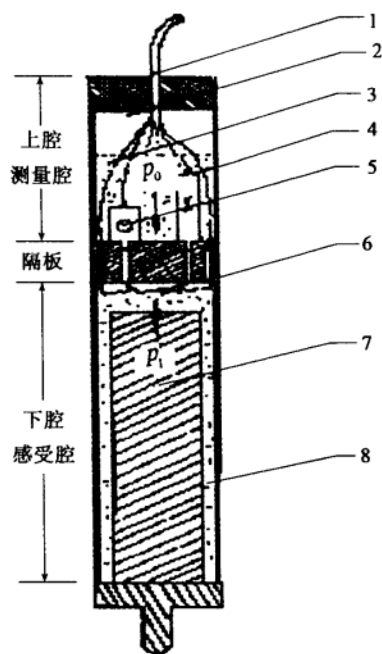


图 9.13　体应变仪观测系统的组成（据吕宠吾等，2003）

体应变仪中最核心的部分是井下部分(探头),它的构成见图 9.14,其内部结构见图 9.15。此外,为排除气象因素对地壳应变状态带来的干扰,在体应变仪观测中还需同时观测气压及井水水位的变化。后两者属于体应变仪的辅助观测项目。



1. 密封盖;2. 氨气;3. 硅油;4. 传感器;5. 电磁阀;6. 标定电阻丝;7. 金属芯柱;8. 硅油

图 9.14 体应变仪井下部分的基本构成

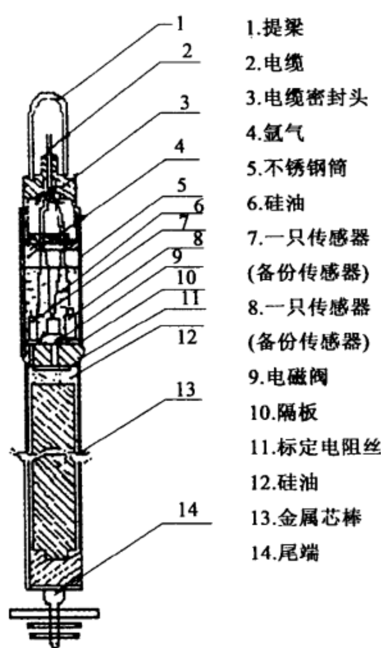


图 9.15 TJ-2 型体应变仪的内部结构(据吕宠吾等,2003)

9.3.2.2 仪器的工作原理

体应变仪的工作原理较为简单:在一个长圆形的弹性筒内,充满了硅油,当它受到四周岩石的挤压或拉伸时,筒内的液体压力发生改变,通过液压的增大或缩小,即可得知岩石的应变状态是压缩还是拉伸。对图 9.15 的一些关键部分,说明如下。

(1)井下探头的构成

一个长圆形筒内有一个隔板,将筒分为上腔室和下腔室。下腔室又称感受腔,其内充满硅油。上腔室内装有传感器及电磁阀门,也充有硅油,但在硅油的上方充有氩气。由于氩气的存在,上腔的压力 P_0 基本恒定,但在下腔,只要外力使得腔室的体积有微量变化。由于硅油难以压缩,硅油的压力 P_1 即会产生明显的变化。硅油是一种性能十分稳定的液体。

(2)差压传感器

差压传感器,用来感受上腔室与下腔室的压力之差,即 P_1-P_0,但实际上 P_0 基本不变(制作时已将 P_0 设定为一个大气压,即 0.1MPa),所以差压传感器所反映的信息,只是下腔室的压

力变化,即 ΔP_1,而 ΔP_1 又与下腔体积(内容积) V_1 的相对变化,即体积应变 $\Delta V_1/V_1$ 成正比。于是差压传感器的电输出值 e 与长圆筒的体积应变 $\Delta V_1/V_1$ 成正比。

(3)电磁阀门

电磁阀门,当它通电时能够开启,使得上腔与下腔沟通,两腔间的压力差变为零,$P_1=P_0$,又由于 P_0 是恒定的标准压力(一个大气压),因而开启电磁阀时可使下腔的油液压力恢复为原有的标准压力。

开启电磁阀时,硅油液会有少量(如 $0.003cm^3$ 量级)的流动,所需的时间仅需 0.2s 左右,因此电磁阀门在绝大多数的时间内是关闭的不通电状态。

当岩石的体应变变化达 6×10^{-6} 量级时,地面电子线路能自动开启电磁阀一次,使压差传感器的工作点恢复到零位($P_1\approx P_0$,电子线路的零位输出近于 0V)。因此,无论岩石应变的变化有多少,体应变仪的测量量程是可以"无限拓宽"的。

在体应变仪的运输与安装过程中,电磁阀门的作用也十分重要。由于在此期间外界温度变化很大,在热胀冷缩的影响下不锈钢筒的体积也会变化,电磁阀门的不断开启可保护压差传感器,使其所受的压力差在允许的范围之内。

(4)标定用热电阻丝

在隔板的下方有一组很细的电阻丝,浸在下腔室的硅油液中,当地面仪器启动标定电路时,电阻丝被短暂通电 2s,电阻丝发热并将热能散布于硅油中,硅油因受热而"膨胀"。实际上又由于下腔室内没有可膨胀的空间,这一膨胀只能转化为硅油压力的变化,并由差压传感器所感受。

这一转换过程(电能—热能—膨胀)可以从热力学定律及相关的测试给予严格检定,因而由标定电路的通电时间(2s)、通电电流等参数,即可得知每次标定所相应的标定幅度 $(\Delta V_1/V_1)_0$,该值由厂家给出。

(5)金属芯柱

在下腔中设有一个金属芯柱,它的作用体现在两方面,一方面它可使探头的灵敏度提高,即同样的体应变条件下,由于金属相对硅油而言更不易压缩,导致硅油产生的压力变化因金属棒的存在而加大,金属棒体积越大,ΔP_1 值越大。另一方面是金属棒的存在加大了探头自身的比重,这有利于探头在下井安装时能自行沉入孔底的水泥中。

通过上述关键部件的介绍,可以了解体应变仪的工作原理。

9.3.3 钻孔应变台站观测(中国地震局,2001)

9.3.3.1 钻孔应变台站观测场地及环境要求

(1)观测场地的勘选。观测场地距有明显活动断层、大型水库、河流、泥石流、矿山采空区、山洪区、降雨聚水区、大型抽水站等的距离≥1km;避开岩脉或透镜体;距大型振动源(如压模机、冲床等)、主干公路、大型变压器、电台发射天线、大型电机等的距离≥200m;基岩完整(以花岗岩,厚层石灰岩为好)。地下水位变化幅度较大(一年内的波动量≥10m,或降雨后水位变化≥0.5m)、地温偏高、地热梯度较大或有明显水流的地方都不适宜作为钻孔应变观测场地。在覆盖层较厚的地区,土层应力观测用的钻孔位置选在土层致密的区域,避开冲积层及河床。

(2)装置系统设计。井孔与仪器室之间的距离≤20m;钻孔的深度为 60~100m(在山洞≥15m),孔斜度≤3°;钻孔下部为裸孔,其长度≥5m。设在土层中的钻孔,可以不使用套管,

深度≥30m。

(3) 台址观测环境要求。台址 1km 范围内不得修筑大型水库,大型抽水注水站;200m 范围内不得装设大型振动源(如压模机、冲床等)、大型变压器、电台发射天线、大型电机等,不得修筑铁路和主干公路。

(4) 地面观测室要求。室温日变化≤5℃;年最低室温≥5℃,年最高室温≤35℃;湿度≤90%;防尘和防腐蚀;采取避雷措施、防直接雷和感应雷。

(5) 干扰源的控制。钻孔周围 500m 内不得有抽水井;钻孔口周围设置水泥护栏及盖板;地面电缆埋深≥0.40m。不要让阳光直射电子仪器,暖气或火炉等热源距仪器不宜太近,不能有振动源(如电机)影响仪器。台站电台若对观测值有干扰,则电台应每日定时工作,并在值班日志中记录。

9.3.3.2 钻孔应变观测系统技术要求与观测质量监控

(1)井下测试仪器技术要求。噪声≤0.1mV;调零偏差≤100mV;应变灵敏系数>2mV(1×10^{-8});年稳定性优于 1×10^{-6}/年;采样率≥1 次/min;运行寿命≥10 年。

(2) 地面测量装置技术要求。动态范围(最大量程与分辨率之比)≥1×10^4;工作电压 180~240V;输出电压 -2~+2V;直流功耗≤3W;具有交直流切换和防雷功能。

(3) 辅助设备的技术要求。配备井水水位及气压连续自动观测系统;水位计分辨率优于 0.001m,量程 5~10m;气压机分辨率优于 0.1hPa;配备室内温度计和湿度计。

(4) 标定设备的指标。标定重复性≤3%,格值年稳定性≥95%;标定幅度为$(4\sim15)\times10^{-8}$。

(5)标定的周期。每年定时标定两次;仪器更换和维修前后进行标定;落实异常变化认为必要时可进行标定。

(6)标定方法。采用国家位移或体积计量标准传递;标定方法见附录 3。

(7)观测系统工作性能检测。定期对观测系统性能进行检测,并提交评估报告。

9.3.3.3 钻孔应变观测数据的收集、处理与报送

(1)资料收集的基础工作。台站人员应在值班日志中记录台站名称、仪器型号、观测日期和观测值班人员姓名;标明气象因素等干扰的影响时段及强弱过程(准确至小时);收集中强地震时的特异记录图像及典型的干扰图像,标明造成观测曲线中断、形态畸变的干扰原因;对突变事件及时作出调查核实,记录调查核实结果并上报。

(2)数据收集。按日整理前一天的原始采样数据,以磁介质保存并编号,注明相应的格值及校正值,在值班日志中备注文件名、存盘编号及操作人员姓名。

(3)数据处理。按日将原始采样数据用专用软件处理成相应的应变值,并生成应变整点值数据文件;处理水位、气压等辅助观测值,生成相应的整点值文件;填报应变量、辅助观测量整点值表,绘制整点值曲线图。每月 5 日前计算上月日均值、旬均值、月均值,生成月整点值数据文件,打印整点值月报表,绘制月整点值曲线图(上述数据处理结果均以磁介质保存于台站一份)。

缺值处理。记录数据中断时间<4 小时者,根据观测记录曲线走势补插数据,补插数据加圆括号以示区别,中断≥4 小时者,按指定方法处理。

(4)资料报送。台站按有关规定报送以下资料:每日报送前一天钻孔应变分钟值观测数据文件;每月报送月整点值观测数据文件、月报表和月整点值曲线图;每年报送全年日均值曲

线图、辅助观测数据(温度、湿度、气压、降雨)曲线图、工作年报表及年度技术工作总结。

§9.4 连续观测序列的数据缺失补值预处理

9.4.1 整时值、日均值、五日均值缺失补值预处理法

地震形变台站连续观测包括倾斜固体潮、重力固体潮、应变固体潮、跨断层观测等观测手段。除了完成日常的观测、计算外,对于资料中遇到的各种问题,应及时地处理解决,连续观测序列的数据缺失就是需要解决的问题之一。模拟或数字记录的连续观测资料,由于仪器工作性能或供电等偶然因素的影响,致使资料出现数小时或短期断缺,给资料保存、分析及研究工作带来影响。为了解决由于资料缺记带来的影响与不便,特介绍数据插值的方法(国家地震局科技监测司,1995),该方法具有两个特点:

(1) 尽量利用头、尾相邻数据序列已有信息。

(2) 符合序列本身的特性和变化规律。

下面针对不同的情况,分别介绍计算公式。

9.4.1.1 连续观测整时值的补缺

(1) ±48h 补值法

在整时值连续缺失不超过 24h 的情况下,可利用前后两天的完整观测记录,计算补值,其公式为(国家地震局科技监测司,1995)

$$y_i = \frac{4(y_{i+24} + y_{i-24}) - (y_{i+48} + y_{i-48})}{6} \tag{9.5}$$

式中:$\{y_i\}$ 为观测序列,$i = 1, 2, \cdots, N$

(2) 采用平行观测仪器进行补值

如果观测值缺失较多,累计连续缺值时间大于 24h,则不能采用 +48h 补值法。对于具备平行设置同类仪器记录的台站,则可根据平行记录量值大小,在考虑两台仪器间的差异特性(例如不同的零点漂移)的情况下,利用形态的一致相似性进行补值。

9.4.1.2 日均值、五日均值的补缺

日均值、五日均值缺失时,如有平行设置的另一套同类仪器,仍可继续沿用上述介绍的方法,即根据已有仪器的记录进行插补,或是采用在观测序列中与缺值相邻的前后值进行补插。但不论何种补插方法,补值精度将随连续缺失效个数的增多而降低。下面列出利用观测序列本身插补计算时缺值 4 个值以内的补值公式。

(1) 缺一个数值时,采用与插补整点值类似的公式,使用前后各两天的数值进行补值

$$y_i = \frac{4(y_{i+1} + y_{i-1}) - (y_{i+2} + y_{i-2})}{6} \tag{9.6}$$

(2) 连续两个缺值

$$\begin{cases} y_{i+1} = \dfrac{10y_{i+2} + 5y_{i-1} - 3y_{i+3} - 2y_{i-2}}{10} \\ y_i = \dfrac{10y_{i-1} + 5y_{i+2} - 3y_{i-2} - 2y_{i+3}}{10} \end{cases} \tag{9.7}$$

(3) 连续三个缺值

$$\begin{cases} y_{i+1} = \dfrac{12y_{i+2} + 4y_{i-2} - 4y_{i+3} - 2y_{i-3}}{10} \\ y_i = \dfrac{9y_{i-2} + 9y_{i+2} - 4y_{i+3} - 4y_{i-3}}{10} \\ y_{i-1} = \dfrac{12y_{i-2} + 4y_{i+2} - 4y_{i-3} - 2y_{i+3}}{10} \end{cases} \tag{9.8}$$

(4) 连续四个缺值

$$\begin{cases} y_{i-2} = \dfrac{28y_{i-3} + 7y_{i+2} - 10y_{i-4} - 4y_{i+3}}{21} \\ y_{i+1} = \dfrac{28y_{i+2} + 7y_{i-3} - 10y_{i+3} - 4y_{i-4}}{21} \\ y_{i-1} = \dfrac{42y_{i-3} + 28y_{i+2} - 20y_{i-4} - 15y_{i+3}}{35} \\ y_i = \dfrac{42y_{i+2} + 28y_{i-3} - 20y_{i+3} - 15y_{i-4}}{35} \end{cases} \tag{9.9}$$

9.4.2 外推补值法

上述介绍的补值方法适合于缺值部分位于序列中间的情况，当缺值位于资料的首尾时，可按泰勒级数展开的线性组合式推求补值，有两种可能出现的情况：

(1)顺推。当缺值$f(0)$位于序列之尾部时，由已知$f(-h)$，$f(-h/2)$，$f(-h/4)$值的大小计算$f(0)$值，其中h为步长。

(2)逆推。当缺值$f(0)$位于序列之首时，由$f(h)$，$f(h/2)$，$f(h/4)$已知值，计算缺值$f(0)$。顺推、逆推示意图如图9.16所示。

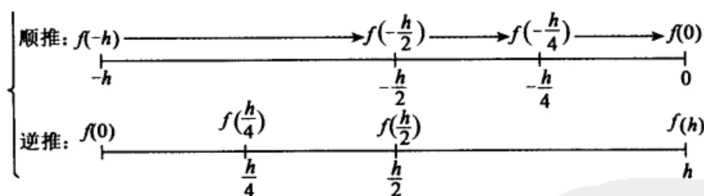


图 9.16 顺推、逆推示意图

相应的递推公式为(国家地震局科技监测司，1995)

$$\begin{cases} \text{顺推：} f(0) = \dfrac{8f\left(-\dfrac{h}{4}\right) - 6f\left(-\dfrac{h}{2}\right) + f(-h)}{3} \\ \text{逆推：} f(0) = \dfrac{8f\left(\dfrac{h}{4}\right) - 6f\left(\dfrac{h}{2}\right) + f(h)}{3} \end{cases} \tag{9.10}$$

以上介绍的数据资料的补插方法，仅是对观测资料出现断缺时的一种弥补，以削弱数据使

用中的种种不方便。必须注意，通过插补计算所获得的值与实际的观测值间存在一定的误差，尤其对于缺失较多成外推补值的情况更是如此，在使用中要结合具体情况予以选择。

台站日常监测资料是动态随机观测序列，序列中既有多种信息成分，也有噪声影响，为了更好地使用资料和维护观测系统的正常运行，建立客观、准确评定计算资料序列的精度标准是必要的。另一方面，同一序列，从不同的物理、数学模型出发，使用的计算方法和精度结果亦不一样。地倾斜观测资料多年使用契比彗夫多项式逼近精度，作为中、长期稳定性指标；均方连差法由于计算模型更符合序列特点，人为干扰少，逐渐成为一种较前指标更合适的指标。而对潮汐观测资料评定，计算模型更为复杂，日常用中井（Nakai）法来作数据的检验处理。

§9.5 连续形变、应变观测数据处理

连续观测数据缺值的插补和资料长期稳定性的评定指标，可用于各类定点形变连续监测台站资料的日常补值和精度衡量，在资料的综合分析和前兆信息的提取方面，本节主要介绍具有一定典型性的卡尔曼滤波模型和动态灰箱模型（张国民等，2001）。

9.5.1 多元线性回归法

连续形变观测给出的观测值 y_i 中包含多种已知干扰因素观测值 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_m$。则时间序列为下列线性关系：

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1x_{11} + a_2x_{12} + a_3x_{13} + \cdots + a_{nr}x_{1m} + V_1 \\ y_2 = a_0 + a_1x_{21} + a_2x_{22} + a_3x_{23} + \cdots + a_{nr}x_{2m} + V_2 \\ \cdots\cdots \\ y_n = a_0 + a_1x_{n1} + a_2x_{n2} + a_3x_{n3} + \cdots + a_{nr}x_{nm} + V_n \end{cases} \tag{9.11}$$

以矩阵形式表示，令

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \tag{9.12}$$

则有

$$Y = XA + V \tag{9.13}$$

利用最小二阵法，可以求得线性方程(9.13)中未知系数阵 A 的估值

$$\hat{A} = (X^{\mathrm{T}}PX)^{-1}X^{\mathrm{T}}PY \tag{9.14}$$

将 $\hat{A}$ 代入式(9.13)，便可求得余差系列

$$V = Y - XA \tag{9.15}$$

外推时，如有地震前兆信息，必将含在 V 中。

9.5.2 动态灰箱方法（DGB 模型）

实际上，前兆观测系列中，不仅有平稳随机部分，还有长趋势成分和年变成分，此时用动态灰箱方法较好。

设观测序列为

$$l(t) = \hat{l}(t) + V(t) \tag{9.16}$$

其中:$\hat{l}(t)$是系统正常变化的最佳估值,即动态基线值:

$$\hat{l}(t) = \hat{M}(t) + \hat{S}(t) + \hat{\eta}_1(t) + \hat{\eta}_2(t) \tag{9.17}$$

其中:$\hat{M}(t)$是长趋势成分 $M(t)$的拟合推估值;$\hat{S}(t)$是年周期变化部分的多年均值;$\hat{\eta}_1(t)$是可测环境因子(干扰)的实际涨落的有记忆影响;$\hat{\eta}_2(t)$是剩余随机涨落序列的自回归函数。

(1) $\hat{M}(t)$可用观测序列 $l(t)$的滑动平均低通滤波法求出 $M(t)$序列:

$$M(t) = \frac{1}{2m+1}\sum_{t=-m}^{m} l(t) \tag{9.18}$$

然后,拟合推估出

$$\hat{M}(t) = a + bt + ct^2 + \cdots \tag{9.19}$$

(2) 年变随机过程平均值 $\hat{S}(t)$可按下式求出:

$$\hat{S}(j) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[l(t) - M(t)]ij \tag{9.20}$$

式中:N 为序列中包括的整年周期数;i 为各个年周期序号;j 为年周期内取样值序号,如取月均值,则 $j=1,2,\cdots,12$。

(3) 可测环境因子实时涨落有记忆影响 $\hat{\eta}_1(t)$的确定:

$$\eta_1(t) = l(t) - \hat{M}(t) - \hat{S}(t) \tag{9.21}$$

同时将可测环境因子 W 时序用类似方法处理,得环境因子实时涨落值序列:

$$\Delta W(t) = W(t) - \hat{M}(W(t)) - \hat{S}(W(t)) \tag{9.22}$$

则其对形变观测值有记忆影响的估值以褶积形式表达:

$$\hat{\eta}_1(t) = \sum_{\tau=0}^{k} h(\tau)\cdot\Delta W(t-\tau) \tag{9.23}$$

建立误差方程时间序列:

$$\eta_1(t) - \hat{\eta}_1(t) = V(t) \tag{9.24}$$

在 $V(t)^{\mathrm{T}}PV(t)=\min$ 的条件下,用最小二乘法求解(9.24)中的 $h(\tau)$值,$\tau=1,2,3,\cdots,k$,从而求出 $\hat{\eta}_1(t)$。

(4) $\hat{\eta}_2(t)$的确定。序列

$$\hat{\eta}_2(t) = \hat{l}(t) - \hat{M}(t) - \hat{S}(t) - \hat{\eta}_1(t) \tag{9.25}$$

一般是平稳随机过程,其自回归模型 $\hat{\eta}_2(t)$为:

$$\hat{\eta}_2(t+1) = a_0\eta_2(t) + a_1\eta_2(t-1) + \cdots + a_L(t-L) \tag{9.26}$$

利用最小二阵法求得自回归系数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_L$。其中:

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & R(2) & \cdots & R(L) \\ R(1) & R(0) & R(1) & \cdots & R(L-1) \\ R(2) & R(1) & R(0) & \cdots & R(L-2) \\ \vdots & & & & \vdots \\ R(L) & R(L-1) & R(L-2) & \cdots & R(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \\ R(3) \\ \vdots \\ R(L) \end{bmatrix} \tag{9.27}$$

自相关系数 $R(j)$为:

$$
\begin{cases}
R(j) = E[\eta_2(t) \cdot \eta_2(t-j)] / E[\eta_2(t) \cdot \eta_2(t)] \\
E[\eta_2(t) \cdot \eta_2(t-j)] = \dfrac{1}{N-j} \cdot \sum_{t=j+1}^{N} [\eta_2(t) \cdot \eta_2(t-j)]
\end{cases} \tag{9.28}
$$

用上述办法求得动态基线 $\hat{l}(t)$ 后代入公式(9.16)，即可求得余差序列 $V(t)$，从而可求得模型的预测精度 S_{MP}：

$$
S_{MP}^2 = E[V(t) \cdot V(t)] \tag{9.29}
$$

当前兆观测资料的时间序列相对于动态基线的波动超过置信区间 $\pm I_{MP} = 2S_{MP}$ 时，则认为有异常出现(置信度为5%)。

9.5.3 带控制项的自回归模型(CAR)方法

在随机观测序列中，部分干扰因素为已知观测值，此时用 CAR 模型。从 $l(t)$ 中滤去 $\hat{M}(t)$ 和 $\hat{S}(t)$ 成分后得到新序列：

$$
D(t) = l(t) - M(t) - S(t) \tag{9.30}
$$

CAR 模型表达式为：

$$
\begin{aligned}
D(t) = {} & a_1 D(t-1) + \cdots + a_n D(t-n) + b_0 U(t) + \\
& b_1 U(t-1) + \cdots + b_n U(t-n) + e(t)
\end{aligned} \tag{9.31}
$$

式中：$U(t)$ 是用(9.30)形式滤去 $M(U(t))$ 和 $S(U(t))$ 成分后的某种干扰因素观测序列，$e(t)$ 是模型残差，$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是自回归系数，$b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是控制项系数，n 是模型阶。若令

$$
\varphi(t) = \begin{bmatrix} D(t-1) \\ \vdots \\ D(t-n) \\ U(t) \\ U(t-1) \\ \vdots \\ U(t-n) \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{9.32}
$$

则式(9.31)可表示为：

$$
D(t) = \varphi^{\mathrm{T}}(t) \cdot Q + e(t) \tag{9.33}
$$

由此可求在时刻 t 的递推最小二乘估计值 Q。如式(9.31)中无已知干扰因素观测序列，则变为回归模型(AR 模型)。

9.5.4 卡尔曼滤波(Kalman)方法

卡尔曼滤波是用前一个估计值和最后一个观测值来估计信号的当前值，它是用状态方程和递推方法进行这种估计的。此方法不限于平稳随机过程，它的信号与噪声是用状态方程和量测方程表示的。

离散型状态方程为

$$
x(k) = Ax(k-1) - Be(k-1) \tag{9.34}
$$

其中：$x(k)$ 是一组多维状态矢量，A、B 是矩阵，$e(k)$ 是触发信号。若触发信号源是白噪声，则

$$
Be(k-1) = W(k-1) \tag{9.35}
$$

此时动态系统的状态方程改写为：

$$x_k = A_k x_{k-1} + W_{k-1} \tag{9.36}$$

量测方程为：

$$y_k = C_k x_k + V_k \tag{9.37}$$

其中：A_k 与 C_k 为已知矩阵；y_k 为测得数据。要从 y_k 估值 $\hat{x}_{k-1}$ 中求出 x_k，卡尔曼一步递推公式为：

$$\hat{x}_k = A_k x_{k-1} + H_k(y_k - C_k A_k \hat{x}_{k-1}) \tag{9.38}$$

式中：

$$H_k = P'_k C_k^T (C_k P'_k C_k^T + R_k)^{-1} \tag{9.39}$$

$$P'_k = A_k P_{k-1} A_k^T + Q_{k-1} \tag{9.40}$$

$$P_k = (I - H_k C_k) P'_k \tag{9.41}$$

由(9.38)式可知，若已知 H_k，用前一个 x_k 的估值 $\hat{x}_{k-1}$ 与当前观测值 y_k 就可求得 $\hat{x}_k$。若按(9.39)式求得满足最小均方差矩阵的 H_k，则根据式(9.38)就可得出最小均方误差条件下的 $\hat{x}_k$。求 $\hat{x}_k$ 的递推过程是：最先，由初始状态 x_0 的统计特性求出 x_0 的均值 μ_0 和 P_0：

$$\begin{cases} \hat{x}_0 = \mu_0 \\ E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] = P_0 \end{cases} \tag{9.42}$$

然后，将 P_0 代入式(9.40)求出 P'_1，将 P'_1 代入式(9.39)求得 H_1，将 H_1 代入式(9.38)求得 $\hat{x}_1$；同时将 P'_1 代入式(9.41)求得 P_1，由 P_1 又可求出 P'_2，由 P'_2 可求出 H_2，由 H_2 可求出 $\hat{x}_2$，而且又可由 H_2 与 P'_2 求出 P_2……如此，一步一步递推求解 $\hat{x}_k$ 值。

§9.6 潮汐应变、倾斜数据处理(张国民等，2001)

调和分析方法是固体潮汐观测资料的基本分析方法之一，由于潮汐应变、倾斜数据具有双重特性，它既是信息也是干扰，故处理方法也有特殊性。

(1)作为信息时。可以利用潮汐观测的导纳值(固体潮汐观测值与理论值之比)，尤其是利用导纳值中的振幅因子(相位滞后利用得少些)来考察地壳介质在震前发生的弹性性质的变化。因为振幅因子是地壳弹性性质勒夫数的函数，对于地倾斜潮汐振幅因子 $\gamma_2 = 1 + k_2 - h_2$，对体应变潮汐因子 $\upsilon_2 = (4h_2 - 12L_2)/3$…当地壳介质性质发生变化时，勒夫数 k,h 等将有变化，从而潮汐因子 γ,υ 等将发生变化。

由于日波受周日气象干扰大，常用半日波潮汐因子 γ_{M_2} 作为指标。武汉地震所用维尼迪柯夫调和分析与卡尔曼滤波递推相结合的方法计算全国 40 多个基本台上的地倾斜潮汐因子 γ_2，确认在地震平静期 γ_2 值相当稳定，而在 5 级以上地震前，近台(100km 内)发生 γ_2 值变化是经常的。当 γ_2 值出现系统偏离，且达到误差警戒线时，即作为异常的开始；临近发震(相当于 β_2 阶段)，可能出现 γ_2 值的急剧增大或跳动不稳定情况。

由于多台同时观测，可以从 γ_2 变化中解算出勒夫数的变化信息，以便和其他前兆对比。

作为信息，也可以用于加卸载响应比的计算。即以潮汐应力增强段，观测到的地壳应变响应率与下降段应变响应率之比的变化，求其地壳弹性性质的前兆变化，即响应比 $F = \left(\frac{\Delta R_L}{\Delta P}\right)/$

$\left(\dfrac{\Delta R_u}{\Delta P}\right)$。若 $F=1$，正常；若 $F>1$，异常出现；若 $F>>1$，$F\to\infty$，失稳。

(2)作为噪声时。多频率的潮汐变化掩盖着与其相当(振幅和频率)的形变、倾斜信息。地震信息存在于很宽的频带内，因而在消除各种频率噪声干扰(含固体潮)时，应特别注意不要损伤了信息。滤波的办法抹掉了某个频带内的全部噪声和信息；组合法(如别尔采夫方法)除了去掉潮汐波外，会将某些频率的信息变形和消弱。而用最小二乘法求出潮汐因子 δ_i 和相位迟后 θ_i，可将已知潮汐干扰波剔除，无伤害地保留下小的未知信息。

目前，我们用求解潮汐波群因子 δ_i 和相位迟后 θ_i 的办法更多地消除体应变潮汐干扰，而不破坏其他的信息。设体应变 t 时刻的值为

$$
\begin{aligned}
y_t &= a + bt + ct^2 + \sum_{i=1}^{n}\delta_i\sum_{j=1}^{k}A_j\sin(\omega_j t + \varphi_j + \theta_i) \\
&= a + bt + ct^2 + \sum_{i=1}^{n}(A_i x_i + B_i y_i)
\end{aligned}
\tag{9.43}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
x_i &= \delta_i\cos\theta_i; \\
y_i &= \delta_i\sin\theta_i; \\
A_i &= \sum_{j=1}^{k}A_j\sin(\omega_j t + \varphi_j); \\
B_i &= \sum_{j=1}^{k}A_j\cos(\omega_j t + \varphi_j); \\
\delta_i^2 &= x_i^2 + y_i^2; \\
\tan\theta_i &= \frac{y_i}{x_i}。
\end{aligned}
\tag{9.44}
$$

用观测值 y'_i 组成误差方程式：

$$
a + bt + ct^2 + \sum_{i=1}^{n}(A_i x_i + B_i y_i) - y'_t = V_t \tag{9.45}
$$

采用最小二乘法，便可得未知数 a、b、c、δ_i、θ_i。将它们代入式(9.45)便可消除大部分固体潮汐，求得余差 V_t，用于估算噪声水平(可低于 10^{-9} 应变)，或外推异常的存在。



第10章　地震活动的大地测量研究方法

在我国,大地测量应用于地震预报研究已有40年的历史。通过精密水准网复测、精密重力网复测、GPS网复测、断层网络和断层带各测站时间序列观测、定点形变台站(倾斜、应变、断层蠕变、连续GPS等)和定点重力台站不间断的连续记录,从点、线、面、层、体等不同的空间视角,研究位移、速度、加速度、地球潮汐、介质密度、勒夫数等各种力学物理参量,研究水平形变场、垂直形变场、重力场、构造板块、构造块体、断层带及其分段、断层网络等的时空运动,研究震前、震间、震后的地壳形变、重力变化过程及其动力学,取得了显著成果。现代大地测量的发展也为地震预测预报研究开辟了广阔的前景。

本章主要介绍地震活动的基本特点,地震分析预报的科学思路及大地测量研究地震等内容。

§10.1　中国地震活动的基本特点

中国是全球大陆地震最强的地区,是一个多地震和强地震的国家。自公元前1831年起有地震的历史记录以来,至今共记录到6级以上(含6级)强震800多次,遍布于除浙江、贵州以外的所有省份。就浙江、贵州两省而言,也都发生过5~6级地震。自20世纪有仪器记录以来,我国平均每年发生6级以上地震6次,其中平均每年发生7级以上地震1次,8级以上巨大地震平均10年左右1次。地震活动不仅频度高,分布面积广,而且强度亦为世界之冠。根据日本学者阿部胜征的研究,在20世纪全球发生8.5级以上的特大地震共3次,分别为1920年我国宁夏海原8.6级、1950年我国西藏察隅8.6级和1960年智利8.5级地震。由此可看到,我国地震在全球地震中的重要地位。此外,我国地震还有震源浅的特点,除东北和台湾一带少数中、深源地震以外,绝大多数地震的震源深度在40km以内,尤其是我国大陆的东部地区,震源更浅,一般都在10~20km的深度上。

因此,我国的地震活动可用"多、大、广、浅"四个字概括其特点,即地震多(频度高)、强度大、分布广、震源浅(张国民等,2001)。

中国地震活动具有时空分布不均匀性特点。从图10.1可见,中国大陆的地震活动在空间分布上具有很大的不均匀性。107°E以西的中国大陆西部地区,由于直接受印度板块的强烈碰撞,地震活动的强度和频度均大于中国大陆的东部地区。表10.1给出20世纪以来7级以上大震的分区统计,从表中可以看到,就中国大陆地区而言,近90%的7级以上大震发生在西部,且其释放的地震能量占整个大陆地震能量的95%以上。

地震活动空间分布不均匀性特点表现为地震的成带分布,而地震活动的时间分布不均匀性特点表现为地震活动高潮和低潮在时间轴上交替出现。

由于我国地震活动具有频度高、强度大、分布广、震源浅的特点,使我国成为世界上地震灾害最为严重的国家。我国有60%以上的国土处于地震烈度VI度以上地区,其中地震烈度为

Ⅶ度和Ⅶ度以上的高烈度区占全国面积的40%左右。就城市来看,60%的50万以上人口的城市位于Ⅶ度和Ⅶ度以上的高烈度区。

由于我国地震高烈度区分布广阔,许多大震发生在人口稠密地区,因而我国地震损失甚为惨重。就地震死亡人数来说,20世纪我国地震死亡人数达57万人,占全球的一半。

我国历史上地震灾情最为突出的是1556年陕西关中8级大地震,死亡人数达83万;1920年宁夏海原8.6级地震,死亡23万人;1976年唐山大地震,95%的建筑物倒塌,生命线工程全部失效,使一座百万人的新兴工业城市瞬间变成一片废墟,24余万人死亡,16万人重伤,直接经济损失不下100亿元人民币(张国民等,2001)。

就中华人民共和国成立后40多年中各种自然灾害的统计看,地震灾害在我国各种自然灾害中亦有非常重要的地位。从经济损失和人员死亡两个指数看,若论经济损失,气象灾害(主要是干旱和洪涝)是群害之首,占各类灾害经济损失总数的57%。但若论死亡人数,地震是群害之首,占各类灾害死亡人数总数的54%。因此研究地震、进行地震预测预报具有十分重要的意义。

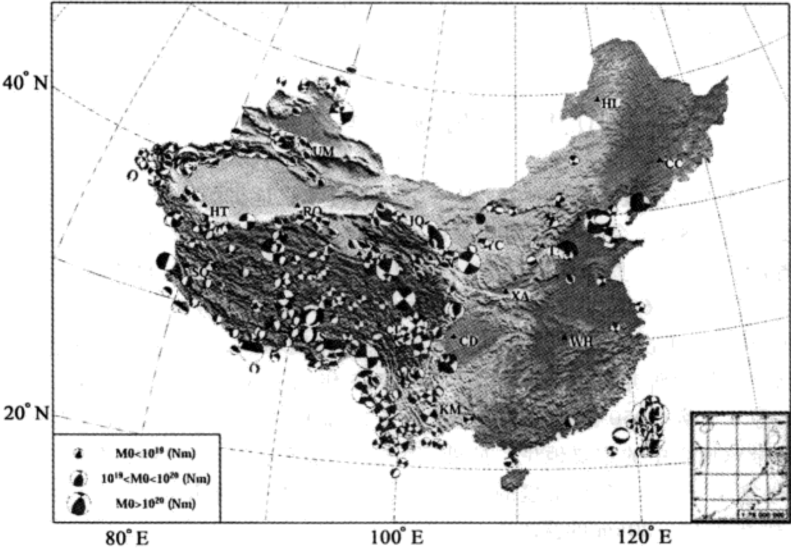


图10.1 1900-2003年中国大陆强震震中分布图

表10.1 **中国分区强震频度统计(1900-2003年)**

震级 地区	7.0~7.4	7.5~7.9	8.0~8.4	8.5~8.9	总和
大陆东部	5	1	0	0	6
大陆西部	23	15	5	2	45
台湾省	23	5	2	0	30
其他地区	1	1	0	0	2

§10.2 地震预报的科学思路

地震预测是一个国际性的科学难题,地震预测的难点有三:一是地震物理过程本身的复杂性;二是地球内部的“不可入性”即人们无法深入到地球内部在震源区内设置台站、安装观测仪器;三是大震重复时间的长期性,限制了作为一门观测科学对现象的观测和对经验认知的进展(陈运泰,1998)。从科学技术上来看,要完全实现地震预测预报成功,需要达到两点:第一,对地震机理、地震孕育发生的物理过程的全面的完整的认识;第二,能够有效地监视地震的孕育、发生过程,以便根据孕震过程的发展阶段进行地震预测。这两点一是科学理论,一是技术能力,现阶段的地震科技水平尚难以达到以上两点(江在森等,2001),故目前的地震预测预报研究还处于探索阶段。

对一个自然现象的预测,往往有两种科学途径(张国民等,2001):其一是研究并掌握该自然现象的生成机制和受控因素,通过测定有关因子的数值,按照该自然现象的成因规律对其作准确的预测和预报。其二是根据该自然现象与其他现象之间的关系,应用实践中积累的大量资料,总结各种现象与预测对象之间的经验性和统计性关系进行预测和预报。

地震预报也是通过上述两种途径进行广泛探索的。其一是关于孕震过程和地震模式的理论和实验研究。孕震过程的研究包括震源物理、地震力学等方面的理论、实验和观测研究,试图通过对震源过程物理力学机制的研究,逐步揭示和掌握地震孕育、发展和发生的规律,从而达到预报地震的目的。地震模式的研究从一定的理论前提出发,提出地震发生的模式,从理论上推导各种可能的前兆及不同的关联组合,并通过实际观测不断检验和修改理论模式。尽管这些理论研究结果尚难以给出实用性的预报方法.但是一系列研究成果,如岩石失稳破裂及各种破裂前兆理论和实验研究,孕震动力学方程组及各类前兆与孕震过程的理论关系式,以及岩石膨胀流体扩散模式(DD)、雪崩不稳定裂隙形成模式(IPE)和膨胀蠕动模式(DC)等,对于认识孕震过程及其前兆现象的物理意义等很有启发。

地震预报的另一途径是根据在长期实践中积累的大量震例资料,总结出经验性规律,推广应用于预测未来地震。自1966年邢台地震以来,在中国进行了前所未有的大量的地震预报实践,在大量的5级以上破坏性地震前取得了上千条前兆异常。通过对这些前兆资料的系统整理研究,分析总结地震不同孕育阶段异常变化的时间、空间、强度和频度特征及其与未来地震三要素的关系,建立经验性和统计性的预报判据、指标和方法,并在地震预报实践中不断检验、充实和改进。

近40年来,中国的地震预报在上述两条科学途径上探索前进,形成了依据地震异常群体特征对孕震过程实行追踪预报的科学思路,即通过大范围、长时间、多手段前兆的连续观测,监视区域应力场的动态变化,探测其在正常背景上的异常变化,并从场、源和环境相统一的整体观出发,分析异常群体的时空综合特征及其演化过程:应用从大量震例经验和理论、实验研究取得的对孕震过程阶段性发展的认识,以及各阶段中异常群体特征的综合判据与指标,对孕震过程进行追踪分析,并对地震发生的时间、地点、强度进行以物理为基础的概率性预报。这是适合板块内地震特点的地震分析预报科学思路。其基本思想有以下几个方面(张国民等,2001)。

10.2.1 长、中、短、临渐进式预报思路

中国地震工作者在20世纪70年代就提出了地震孕育阶段性发展的观点，即地震孕育有一个过程。这个过程的不同阶段显示了不同特征的异常，因而有可能依据观测到的阶段性特征的异常进行阶段性预报。震例资料和实验研究都指出，早期出现的异常具有变化速率小、形态稳定和持续时间长（几个月至数年）等特点，被称为趋势异常或中期异常。临近地震几天至十几天，则出现变化速率大、形态复杂的突发性异常。在这两类异常之间，往往有趋势异常加速、转折恢复等变化以及速率较大的新异常，被称为短期异常。依据上述异常发展的阶段性把地震预报分为长、中、短、临四个阶段，并建立了相应的工作程序。长期预报是依据历史地震的统计，对地质构造活动的地壳形变的观测分析，以及对近代地震活动图像的分析等多方面研究作出的对某地区今后数年至一二十年地震形势的预报。中期预报是根据地震活动图像、地壳介质的物理性质、地壳形变、地下水动态、水化学成分、地电阻率、地球磁场、重力场及地壳应力应变等多方面的监测研究，依据多种趋势性异常所作的一至数年的地震危险区及地震强度的预报：短期预报是根据趋势异常加速或转折性变化和短期异常的出现等所作的数月内的地震预报。临震预报则是根据突发性快速变化的异常所作的几天至十几天的地震预报。

阶段性地震预报思想就是使预报过程追踪地震孕育过程的发展，以渐进的方式向未来地震时空三要素逐步逼近。

10.2.2 源兆与场兆思想

源即震源，源的研究系指对震源形成及演变过程的研究。源兆即为在此过程中震源区及近源地区出现的各种效应。

场即区域应力场。地质构造块体在边界力作用下形成区域应力场，由于块体内部的不均匀结构，因而在一些特殊部位形成多个应力集中区，其中有的可能发展成为孕震区，有的则成为可能反映应力场变化的敏感点。场兆即在震源形成及演变过程中，大范围区域应力场在众多敏感点显示的异常现象。

10.2.3 源的过程追踪与场的动态监视相结合思想

源的过程追踪思想基于对孕震过程及其可能产生的效应的研究。孕震过程可分为弹性变形阶段、非弹性变形阶段和破裂加速阶段。长期预报阶段主要追踪弹性应变和应变能的积累过程。中期预报阶段追踪非弹性变形如微破裂发展（微破裂数量和线度增加）或扩容等，以及伴随的效应如流体运移等导致的中期异常发展过程。在短、临阶段主要追踪突发性异常，即由于岩体有效强度降低、破裂扩展加速及贯通、断层加速蠕动和不稳定形变区内宏观断裂形成等造成的一系列突发性短、临异常。

场的动态监视思想基于中国板块内地震具有异常范围较大，异常群体动态演化过程与上述震源孕震过程同步起伏等基本事实，固而大面积监视场的动态就可以获得震源孕育过程的相关信息或背景性变化。

由于场和源的相互作用，实现地震预报必须将源的过程追踪和场的动态监视两者结合起来，地震异常在时间上阶段性发展及在空间分布上集中性特点，主要反映源的发展演化过程，而前兆现象在空间上和时间上的离散性分布则更多地反映孕震过程中场的变化。

10.2.4 “块、带、源、场、兆、触、震”协同的思想

“块”即地震构造块体。大陆地壳是由大大小小的不同层次的块体嵌套而成的。

“带”为构造块体之间的边界带，亦称构造带。在地球动力因子作用下，地质构造块体间，出现“压、拉、扭、错”多种力学性质的相对运动。边界带是集中反映这种运动的剪切带、形变带、应力应变集中带、地球物理和地球化学等异常带。

“源”即边界带上摩擦强度大的阻挡构造块体运动的地段，显然这里将积累应力应变和能量，是可能孕育地震的震源区。

“场”即区域应力场，随着构造活动的持续，应力应变的积累，形成了不断变化和增强的构造应力场和震源应力场。

“兆”就是应力场发展过程中形成的反映地震孕育发展过程的异常变化。

“触”是指在孕震晚期震源处于不稳定状态，外场（如天体引力、太阳活动、气压场等）的某些微小扰动，可能对地震的发生起触发作用。

最后，在上述条件统一作用过程中发生地震。

此外，还有系统演化的思想。根据系统科学的观点，震源是一个复杂的开放系统。震源与其周围地质体之间具有能量、物质乃至信息的交流。在长期持续的构造活动中，构造块体的运动向震源区输入能量流、物质流，使系统积累应力、应变和能量，并逐渐远离平衡态。这个过程是减熵、降维和由无序向有序演化的过程，从而可以从系统科学的高度，应用确定性和随机性相结合的方法，寻求表述系统演化过程总体特征的参量，如熵值、分维、有序度等，为地震预报探索新的思想和方法。

§10.3 地震地壳形变

由于地壳结构的不均匀性，在内力与外力的作用下就会产生不均匀的地壳形变，它导致某些地壳特殊部位上的应力－应变积累，当这一累积应变达到地壳的极限应变值或已有断层上的应力积累达到了断层的抗剪强度时，地壳便突然破裂，发生地震，这种与地震的孕育和发生过程直接有关的地壳形变过程称为地震地壳形变。孕震过程中的地震地壳形变称为震前地壳形变或称地壳形变前兆；震时地壳破裂引起的地壳形变称为同震（震时）地壳形变；震后地壳形变继续调整的过程称为震后地壳形变（张国民等，2001）。

地震地壳形变可以通过地形变观测获得。地形变观测按时间分为连续观测和以数日、数月、数年为周期的离散观测；按空间域可分为定点形变（倾斜、固体潮）观测，数十米至数百米以及上千米范围的断层位移观测，几千米至几百千米大范围的区域形变场观测，以及上千至数千千米的构造块体和全球板块运动监测；按观测手段有空间技术（GPS、VLBI、SLR、SG、INSAR等）、常规大地测量技术（精密水准测量、电磁波测距、精密重力测量、基线测量、三角测量）等，以及洞体钻孔应变、倾斜、各类固体潮汐因子等观测。地壳形变是地壳构造运动的直接反映。

10.3.1 震前的地壳形变

震前的地壳形变主要包括：断层系和块体运动、近场地壳应变积累、扩容与地表隆起（张国民等，2001）。

10.3.1.1 断层系和块体运动

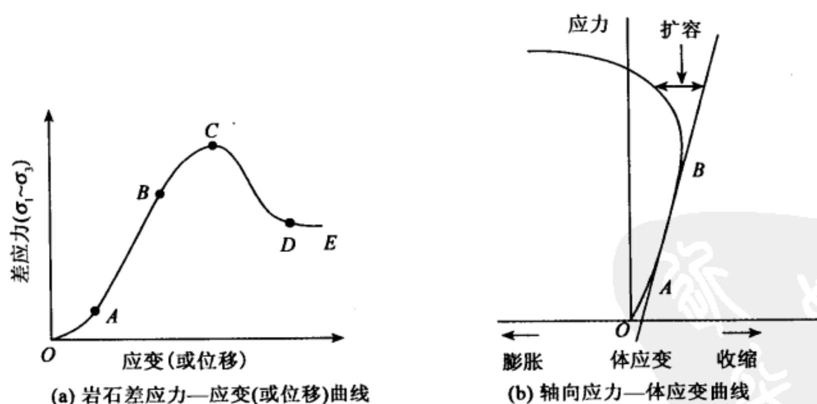
板块内部地质块体沿断层的相对运动，导致障碍体上的应变积累，从而形成地震。近年来，有关地壳形变的理论研究和对形变观测资料的分析获得的比较一致的结论是：断层运动及其近场块体的形变受构造运动的驱动，形变主要集中在断层近场，远场形变比较平缓，并且离断层越远形变越平缓。另一个重要的结论是：在断层近场块体介质的力学特性可以发生很大的变化，这种变化对于块体的变形与释放能量的方式和速度起着控制作用。

震前的前兆运动可以表现为长期形变率的加速或蠕动加速。加速经历的时间有很大差异，有的只是几分钟，有的可以到几年。地倾斜异常也是一种地震前兆运动，在距离倾斜仪测站 10km 范围以内，可以观测到 4.5 级地震的前兆倾斜；在沿断层布设有倾斜仪阵列的地段，可以观测到 2.5 级小地震的前兆倾斜。在海城地震前，位于震中以西 20km 处的倾斜仪从 1974 年 9 月起，观测到地倾斜有明显异常，其方向指向震中。

根据美国用电磁波测距方法监测圣安德烈斯断层的结果，发现沿该断层的各不同地段，在发生中等地震之前，运动速率都有变化，这种变化表现成为跨越断层的边的长度变化，这些边是伸长或缩短，视它们相对于断层的取向而定。如果蠕动地带中的断层被局部闭锁，则跨越断层的边长变化将放慢或停止。如果断层运动转移到另一相邻断层上，则运动方向甚至会变成相反。断层运动的锁闭或转移，都趋向于为中等地震创造条件。

10.3.1.2 近场地壳应变积累

通过对岩石做模拟实验，可以模拟地震发生的环境，了解地壳的运动模式。岩石加压模拟实验结果表明，岩石（尤其孔隙度小于 1% 的）在应力作用下的应变曲线是分段的，即岩石破裂过程中应力、应变关系呈现出阶段性特征（图 10.2）。岩石破裂前后应力、应变曲线大致可分为 5 个阶段：



(a) 岩石差应力—应变(或位移)曲线　(b) 轴向应力—体应变曲线

图 10.2 （引自张国民等，2001）

(1) *OA* 段——硬化阶段。随应力增加，应变增长速率缓慢，表明天然岩石在应力作用下闭合，使破岩石硬度增加。

(2) AB 段——线弹性阶段。

(3) BC 段——非弹性变形或弱化阶段，应变率增加(达到破裂强度的2/3左右)，岩石内产生新的微破裂裂纹或已有破裂的扩展和张裂而引起体积增加(扩容)，C 点是应力－应变关系的峰值点，表明岩石能够承受的最大载荷。

(4) CD 段——失稳阶段。峰值应力后的变形与地震发生有非常密切的关系。越过 C 点以后，样品承受能力下降，应变开始持续加速。比较 CD 段和 AB、AC 段变化的速度，不难发现在极值点 C 以后，变形的速度在 CD 段较 AC 段大，因此 CD 段即地震发生的短期阶段。

(5) DE 段——滑动阶段。岩石的宏观破裂已经形成，应力状态呈现低值或自然状态，比较小的扰动即可能激发断裂面的滑动。

10.3.1.3 扩容与地表隆起

如上所述，在应力达到破裂强度的2/3左右时，近场区开始扩容，在地表可以观测到隆起，但随着应力的继续增加，主破裂带的逐渐形成，应变将大量集中在一个有限的最终出现断裂的部位上。其余地区裂缝将闭合，应力-应变曲线将下降恢复，膨胀也将逐渐恢复。

伊豆半岛地震活动区，在1924～1933年期间以及从1975年到现在，间断的地壳隆升非常明显(如图10.3)。在异常地壳隆升期间，发生过几次7级左右的地震，其间还夹有地震群。在地震活动平静期间，震区地壳逐渐沉降。从伊豆半岛附近两水准点 A 和 B 的高程长期变化模式可以看出，地壳的异常隆升是伴随大地震开始的，例如1923年关东大地震(7.9级)和1974年伊豆半岛近海大地震(6.9级)等。这种隆升大约延续了10年之久。地壳隆升所需要的重力位能量，相当于7.5级的地震能量，而该半岛在此期间所释放的总地震能量是7.2级。因此，伊豆半岛东北部所累积的应变能量，大部分是由无震隆升释放的，以地震形式释放的只占

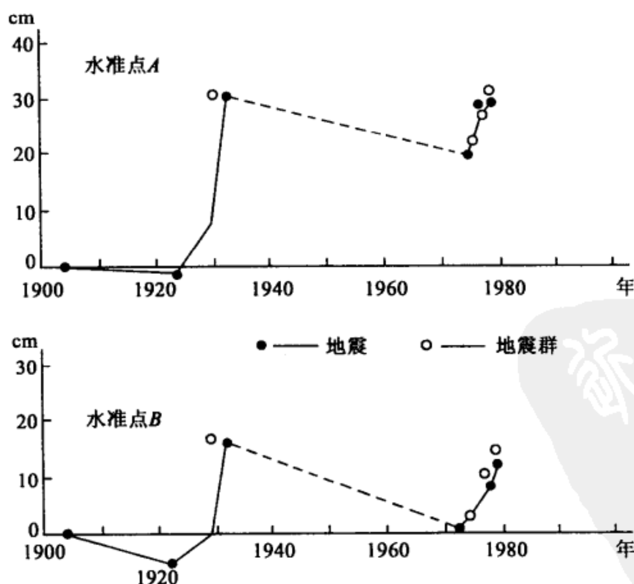


图10.3 伊豆半岛地震活动区的地壳隆升情况

(引自胡明城等，1994)

一小部分。这一事实证明，地壳表面的大部分位移是由无震滑动产生的。

10.3.2 同震(震时)地壳形变及模型

地震的同震运动，主要表现为地震断层和地裂缝。浅源大地震发生时，震源区的岩层断裂和错动延伸到地表，形成断层，例如 1931 年新疆富蕴大地震，形成长达 176km 的地震断层。也有许多地震不是形成新的地震断层，而是使原有的断层带上产生新的错动，例如，2001 年 11 月 14 日昆仑山库赛湖地震(M_s8.1)发生在东昆仑断裂带西部昆仑山南麓的库赛湖段上，地震地表破裂带总体走向 N 70° ~ 90°W，东端止于青藏公路以东 70km 附近，西端终止于布喀达板峰东缘附近，地震地表破裂带主体长度大于或等于 350km，以左旋走滑为主，最大水平位移 6m(徐锡伟等，2002)。1906 年美国旧金山大地震时，沿圣安德烈斯断层产生的错动，是最大水平位移达 6.4m 的右旋错动。在地表沉积层较厚的平原地区，在地震力作用下，地表往往形成各种形态的地裂缝。受挤压的地下水通过地下砂层沿裂缝喷出，形成喷砂冒水现象。发生在沿太平洋地震带深海沟内侧的地震和海底地震，其同震运动表现为其他形式。深海沟内侧的地震使海洋地区的地面隆升，例如，1964 年美国阿拉斯加大地震时，海岸地区隆升达 10m；1960 年的智利大地震，同震运动发生在长 1 000km、宽 200km 的地带内，使得瓜布林岛有 5.7m 的上升，而瓦尔的维亚则上升 2.7m。

通常用断层运动模型描述同震(震时)变形。断层是地球内部的一个滑动面，在其两侧发生了不连续的岩体运动(或称为错动)。它在地面下的形状无法观测到，一般通过地面观测资料(例如断层长度、地震时的错动等)来建立断层模型。常常假设断层面为长方形，并假定它有两个边平行于自由表面。这一假设可以作为一级近似，因为地表破裂通常是直的。研究表明，用这种理论模型可以相当好地解释断层周围的位移场(高锡铭等，1999；伍吉创等，2000；申重阳等，2001；张希等，2003；许才军等，2003)。

当断层运动时，断层两边的地壳将发生形变。断层两侧的地形变可以是看得见的，这就是断层错动。但在断层外面的形变场一般是看不见的，除非能找到像海平面一类的稳定标志作为参考。重复进行大地测量可获得地壳形变的大量数据，建立位移场，得出较准确的运动模型。

要建立断层的模型，我们需要从一些方面做出合理假设，因为实际地球内的破裂过程必定是相当复杂的，我们要将所研究过程的本质因素与次要因素区别开来。

实现简化的方法是对介质性质和边界条件引入理想模型。为简化介质性质，假设地壳为各向同性的弹性半空间，并假定有一种在远处作用的大范围构造力(或应力)驱动着应变积累过程。

在只考虑静力学效果的情况下(也就是只考虑在断层临错动前和错动后的力学状态的差别)，一个只模拟静力学效果的模型是以介质对一定震源状态的弹性响应为根据的，这种震源状态须反映地震引起的断层面上的应力变化。如果破裂后断层表面无应力(例如，不受切向应力)，则可引入一个负应力抵消断层面上的初始应力来模拟这一状态。这样一来，当只考虑地震引起的运动时，可以不考虑初始应力的存在。

位错模型是由 Steketee 在 1958 年首次引入地球物理学描述断层运动的，他提出在各向同性介质中，表面 $\sum$ 由于位错 $\Delta u_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 产生的位移场 $u_i(x_1, x_2, x_3)$ 如下：

$$u_i = \frac{1}{F}\iint_{\sum} \Delta u_j \left[\lambda \delta^{jk} \frac{\partial u_i^l}{\partial \xi^l} + \mu \left(\frac{\partial u_i^j}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_i^k}{\partial \xi_j} \right) \right] v_k \mathrm{d} \sum \tag{10.1}$$

式中:δ_{jk}是 Kronecker 符号;λ 和 μ 为拉梅常数;v_k 表示垂直平面的矢量;u_i^j 表示在点(ξ_1,ξ_2,ξ_3)的第 j 个方向上的作用力 F 在地表一点(x_1,x_2,x_3)产生的位移的第 i 个分量。

如图 10.4 所示,右手直角坐标系 $O-xyz$ 为断层坐标系,原点 O 位于地面,Oyz 平面将断层分成两个相等的部分。Oz 轴垂直于地面,方向向上,Ox 轴平行于断层走向,U_1,U_2,U_3 分别表示断层上点的走滑位错,倾滑位错,张裂位错分量,也是位错向量沿矩形位错面和其法线上的第 $i(i=1,2,3)$ 个分量;各分量的方向以上盘相对于下盘的运动为准。L 表示断层的半长度,W 为断层宽度,d 为断层的深度,δ 为断层的倾角。

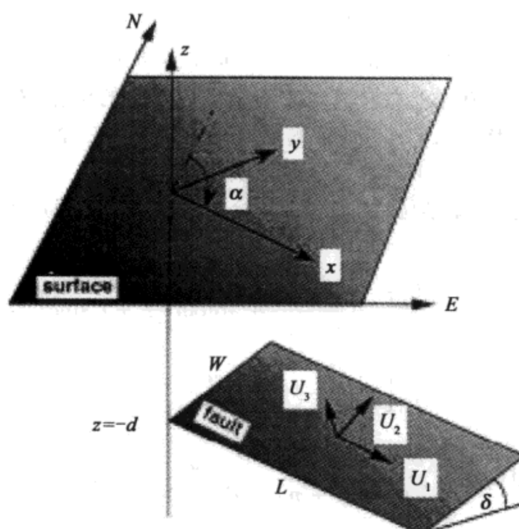


图 10.4　位错模式几何图

图 10.5 表示的是地面测量坐标系 $O-XYZ$ 与震源坐标系 $O-xyz$ 的相互关系。

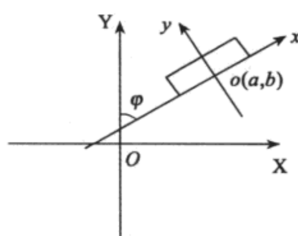


图 10.5　震源坐标系和测量坐标系的位置关系

设地面一点在测量坐标系中的位移为(U_x,U_y,U_z),相应的在震源坐标系的位移为(u_x,u_y,u_z),则由图 10.5 可得相互关系式

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{10.2}$$

$$\begin{bmatrix} U_X \\ U_Y \\ U_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \tag{10.3}$$

建立如下的关系式：

$$U_{X,Y,Z} = U_{X,Y,Z}(X,Y,O \parallel d,\delta,W,L,a,b,\theta,U_1,U_2,U_3) \tag{10.4}$$

上式表示既可以用断层的10个参数计算地表测量坐标系中的位移(U_X,U_Y,U_Z)，这是正演问题；也可以用通过地表位移(u_x,u_y,u_z)的观测值来确定断层的三个位错分量(U_1,U_2,U_3)及其位置参数和几何参数(a,b,α,L,W,d,δ)，这是反演问题。

根据Okada(1985)关于矩形位错的公式，其给出由矩形位错面产生的地表位移公式如下。

对于走滑分量：

$$\begin{cases} u_x = -\dfrac{U_1}{2\pi}\left[\dfrac{\xi q}{R(R+\eta)} + \arctan\dfrac{\xi\eta}{qR} + I_1\sin\delta\right] \parallel \\ u_y = -\dfrac{U_1}{2\pi}\left[\dfrac{\tilde{y}q}{R(R+\eta)} + \dfrac{q\cos\delta}{R+\eta} + I_2\sin\delta\right] \parallel \\ u_z = -\dfrac{U_1}{2\pi}\left[\dfrac{\tilde{d}q}{R(R+\eta)} + \dfrac{q\sin\delta}{R+\eta} + I_4\sin\delta\right] \parallel \end{cases} \tag{10.5}$$

对于倾滑分量：

$$\begin{cases} u_x = -\dfrac{U_2}{2\pi}\left[\dfrac{q}{R} - I_3\sin\delta\cos\delta\right] \parallel \\ u_y = -\dfrac{U_2}{2\pi}\left[\dfrac{\tilde{y}q}{R(R+\xi)} + \cos\delta\arctan\dfrac{\xi\eta}{qR} - I_1\sin\delta\cos\delta\right] \parallel \\ u_z = -\dfrac{U_2}{2\pi}\left[\dfrac{\tilde{d}q}{R(R+\xi)} + \sin\delta\arctan\dfrac{\xi\eta}{qR} - I_5\sin\delta\cos\delta\right] \parallel \end{cases} \tag{10.6}$$

对于张裂分量：

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{U_3}{2\pi}\left[\dfrac{q^2}{R(R+\eta)} - I_3\sin^2\delta\right] \parallel \\ u_y = \dfrac{U_3}{2\pi}\left[\dfrac{-\tilde{d}q}{R(R+\xi)} - \sin\delta\left\{\dfrac{\xi q}{R(R+\eta)} - \arctan\dfrac{\xi\eta}{qR}\right\} - I_1\sin^2\delta\right] \parallel \\ u_z = \dfrac{U_3}{2\pi}\left[\dfrac{\tilde{y}q}{R(R+\xi)} + \cos\delta\left\{\dfrac{\xi q}{R(R+\eta)} - \arctan\dfrac{\xi\eta}{qR}\right\} - I_5\sin^2\delta\right] \parallel \end{cases} \tag{10.7}$$

式中：

$$
\begin{cases}
I_1 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\dfrac{-1}{\cos\delta}\cdot\dfrac{\xi}{R+\tilde{d}}\right]-\dfrac{\sin\delta}{\cos\delta}\cdot I_5 \\
I_2 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}[-\ln(R+\eta)]-I_3 \\
I_3 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left[\dfrac{1}{\cos\delta}\cdot\dfrac{\tilde{y}}{R+\tilde{d}}-\ln(R+\eta)\right]+\dfrac{\sin\delta}{\cos\delta}I_4 \\
I_4 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{1}{\cos\delta}[\ln(R+\tilde{d})-\sin\delta\cdot\ln(R+\eta)] \\
I_5 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{2}{\cos\delta}\arctan\dfrac{\eta(X+q\cos\delta)+X(R+X)\sin\delta}{\xi(R+X)\cos\delta}
\end{cases}
\tag{10.8}
$$

如果 $\cos\delta=0$，则

$$
\begin{cases}
I_1 = -\dfrac{\mu}{2(\lambda+\mu)}\dfrac{\xi q}{(R+\tilde{d})^2} \\
I_3 = \dfrac{\mu}{2(\lambda+\mu)}\left[\dfrac{\mu}{R+\tilde{d}}+\dfrac{\tilde{y}q}{(R+\tilde{d})^2}-\ln(R+\eta)\right] \\
I_4 = -\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{q}{R+\tilde{d}} \\
I_5 = -\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{\xi\sin\delta}{R+\tilde{d}}
\end{cases}
\tag{10.9}
$$

其中：

$$
\begin{cases}
p = y\cos\delta + d\sin\delta \\
q = y\sin\delta - d\cos\delta \\
\tilde{y} = \eta\cos\delta + q\sin\delta \\
\tilde{d} = \eta\sin\delta - q\cos\delta \\
R^2 = \xi^2+\eta^2+q^2 = \xi^2+\tilde{d}^2+\tilde{y}^2 \\
X^2 = \xi^2+q^2
\end{cases}
\tag{10.10}
$$

公式中双竖线表示如下运算：

$$
f(\xi,\eta)\,\| = f(x+L,p)-f(x+L,p-W)-f(x-L,p)+f(x-L,p-W) \tag{10.11}
$$

式中：各分量分别代表点在矩形四个位置上的位移，有 L 为矩形位错面的半长，W 为宽，$p=y\cos\delta+d\sin\delta$，$x,y$ 为断层中心坐标值（在震源坐标系中），δ 为断层倾角，d 为断层深度。

由位错引起的应变如下。

对走滑分量：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_x}{\partial x} = \dfrac{U_1}{2\pi}[\xi^2 qA_\eta - J_1\sin\delta]\,\| \\
\dfrac{\partial u_x}{\partial y} = \dfrac{U_1}{2\pi}\left[\dfrac{\xi^3\tilde{d}}{R^3(\eta^2+q^2)}-(\xi^3A_\eta+J_2)\sin\delta\right]\| \\
\dfrac{\partial u_y}{\partial x} = \dfrac{U_1}{2\pi}\left[\dfrac{\xi q}{R^3}\cos\delta+(\xi q^2A_\eta-J_2)\sin\delta\right]\| \\
\dfrac{\partial u_y}{\partial y} = \dfrac{U_1}{2\pi}\left[\dfrac{\tilde{y}q}{R^3}\cos\delta+\left\{q^3A_\eta\sin\delta-\dfrac{2q\sin\delta}{R(R+\eta)}-\dfrac{\xi^2+\eta^2}{R^3}\cos\delta-J_4\right\}\sin\delta\right]\|
\end{cases}
\tag{10.12}
$$

对倾滑分量：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_x}{\partial x} = \dfrac{U_2}{2\pi}\left[\dfrac{\xi q}{R^3} + J_3\sin\delta\cos\delta\right] \Big\| \\
\dfrac{\partial u_x}{\partial y} = \dfrac{U_2}{2\pi}\left[\dfrac{\tilde{y} q}{R^3} - \dfrac{\sin\delta}{R} + J_1\sin\delta\cos\delta\right] \Big\| \\
\dfrac{\partial u_y}{\partial x} = \dfrac{U_2}{2\pi}\left[\dfrac{\tilde{y} q}{R^3} + \dfrac{q\cos\delta}{R(R+\eta)} + J_1\sin\delta\cos\delta\right] \Big\| \\
\dfrac{\partial u_y}{\partial y} = \dfrac{U_2}{2\pi}\left[\tilde{y}^2 q A_\xi - \left\{\dfrac{2\tilde{y}}{R(R+\xi)} - \dfrac{\xi\cos\delta}{R(R+\eta)}\right\}\sin\delta + J_2\sin\delta\cos\delta\right] \Big\|
\end{cases}
\tag{10.13}
$$

对张裂分量：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_x}{\partial x} = -\dfrac{U_3}{2\pi}\left[\xi q^2 A_\eta + J_3\sin^2\delta\right] \Big\| \\
\dfrac{\partial u_x}{\partial y} = -\dfrac{U_3}{2\pi}\left[-\dfrac{\tilde{d} q}{R^3} - \xi^2 q A_\eta\sin\delta + J_1\sin^2\delta\right] \Big\| \\
\dfrac{\partial u_y}{\partial x} = -\dfrac{U_3}{2\pi}\left[\dfrac{q^2}{R^3}\cos\delta + q^3 A_\eta\sin\delta + J_1\sin^2\delta\right] \Big\| \\
\dfrac{\partial u_y}{\partial y} = -\dfrac{U_3}{2\pi}\left[(\tilde{y}\cos\delta - \tilde{d}\sin\delta)q^2 A_\xi - \dfrac{q\sin 2\delta}{R(R+\xi)} - (\xi q^2 A_\eta - J_2)\sin^2\delta\right] \Big\|
\end{cases}
\tag{10.14}
$$

式中：

$$
\begin{cases}
J_1 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{1}{\cos\delta}\left[\dfrac{\xi^2}{R(R+\tilde{d})^2} - \dfrac{1}{R+\tilde{d}}\right] - \dfrac{\sin\delta}{\cos\delta}K_3 \\
J_2 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{1}{\cos\delta}\dfrac{\xi\tilde{y}}{R(R+\tilde{d})^2} - \dfrac{\sin\delta}{\cos\delta}K_1 \\
J_3 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left[-\dfrac{\xi}{R(R+\eta)}\right] - J_2 \\
J_4 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left[-\dfrac{\cos\delta}{R} - \dfrac{q\sin\delta}{R(R+\eta)}\right] - J_1
\end{cases}
\tag{10.15}
$$

$$
\begin{cases}
A_\xi = \dfrac{2R+\xi}{R^3(R+\xi)^2} \\
A_\eta = \dfrac{2R+\eta}{R^3(R+\eta)^2}
\end{cases}
\tag{10.16}
$$

若 $\cos\delta = 0$，则

$$
\begin{cases}
J_1 = \dfrac{\mu}{2(\lambda+\mu)}\dfrac{q}{(R+\tilde{d})^2}\left[\dfrac{2\xi^2}{R(R+\tilde{d})} - 1\right] \\
J_2 = \dfrac{\mu}{2(\lambda+\mu)}\dfrac{\xi\sin\delta}{(R+\tilde{d})^2}\left[\dfrac{2q^2}{R(R+\tilde{d})} - 1\right]
\end{cases}
\tag{10.17}
$$

由位错引起的倾斜位移如下。

对走滑：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_z}{\partial x} = \dfrac{U_1}{2\pi}\left[-\xi q^2 A_\eta \cos\delta + \left(\dfrac{\xi q}{R^3} - K_1\right)\sin\delta\right]\Big\| \\[2ex]
\dfrac{\partial u_z}{\partial y} = \dfrac{U_1}{2\pi}\left[\dfrac{\tilde{d}q}{R^3}\cos\delta + \left(\xi q^2 A_\eta \cos\delta - \dfrac{\sin\delta}{R} + \dfrac{\tilde{y}q}{R^3} - K_2\right)\sin\delta\right]\Big\|
\end{cases}
\tag{10.18}
$$

对倾滑：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_z}{\partial x} = \dfrac{U_2}{2\pi}\left[\dfrac{\tilde{d}q}{R^3} + \dfrac{q\sin\delta}{R(R+\eta)} + K_3\sin\delta\cos\delta\right]\Big\| \\[2ex]
\dfrac{\partial u_z}{\partial y} = \dfrac{U_2}{2\pi}\left[\tilde{y}\tilde{d}qA_\xi - \left(\dfrac{2\tilde{d}}{R(R+\xi)} + \dfrac{\xi\sin\delta}{R(R+\eta)}\right)\sin\delta + K_1\sin\delta\cos\delta\right]\Big\|
\end{cases}
\tag{10.19}
$$

对张裂：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_z}{\partial x} = -\dfrac{U_3}{2\pi}\left[\dfrac{q^2}{R^3}\sin\delta - q^3 A_\eta\cos\delta + K_3\sin^2\delta\right]\Big\| \\[2ex]
\dfrac{\partial u_z}{\partial y} = -\dfrac{U_3}{2\pi}\Big[(\tilde{y}\sin\delta + \tilde{d}\cos\delta)q^2 A_\xi + \xi q^2 A_\eta\sin\delta\cos\delta \\[1ex]
\qquad - \left\{\dfrac{2q}{R(R+\xi)} - K_1\right\}\sin^2\delta\Big]\Big\|
\end{cases}
\tag{10.20}
$$

式中：

$$
\begin{cases}
K_1 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{\xi}{\cos\delta}\left[\dfrac{1}{R(R+\tilde{d})} - \dfrac{\sin\delta}{R(R+\eta)}\right] \\[2ex]
K_2 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\left[-\dfrac{\sin\delta}{R} + \dfrac{q\cos\delta}{R(R+\eta)}\right] - K_3 \\[2ex]
K_3 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{1}{\cos\delta}\left[\dfrac{q}{R(R+\eta)} - \dfrac{\tilde{y}}{R(R+\tilde{d})}\right]
\end{cases}
\tag{10.21}
$$

若 $\cos\delta = 0$，则

$$
\begin{cases}
K_1 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{\xi q}{R(R+\tilde{d})^2} \\[2ex]
K_3 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\dfrac{\sin\delta}{R+\tilde{d}}\left[\dfrac{\xi^2}{R(R+\tilde{d})} - 1\right]
\end{cases}
\tag{10.22}
$$

当 $q=0$ 时，取 $\arctan\dfrac{\xi\eta}{qR}=0$；当 $\xi=0$ 时，取 $I_5=0$；当 $R+\eta=0$（当且仅当 $\sin\delta=0$ 并且 $\xi=q=0$）时，取所有分母含有 $R+\eta$ 的项为零，同时用 $-\ln(R-\eta)$ 代替 $\ln(R+\eta)$。

10.3.3 震后的地壳形变模型

地壳的震后运动，一般与震前的运动趋势成反向。例如，震前地形变异常图形、震前异常图像特征一般是反向上升异常—加速上升—地震。另一类表现为震前的大幅度加速变化。震后地形变效应图形与震前对比分析发现，上述观测在震后均呈现与震前反向的下降变化并逐渐恢复到基线值或取得一个新的稳定值，此属震后效应。震后滑动主要发生在主震后几天至几个月内。其特点是滑动速率成对数衰减，位错量可等于或超过同震滑动。用断层滑动理论模拟唐山地震后宁河测点的实测资料，如图 10.6。

图 10.6　用断层滑动理论模型模拟宁河测点的实测资料
（据赵国光，引自张国民等，2001）

Pollitz 最初在 1992 年给出基于球体分层粘弹性地球模型的时变震后应力释放的解析表达式。该模型主要计算在球体分层弹性－粘弹性介质内，某个弹性层内发生的断层滑动产生的应力变化所引起的震后响应，这种响应对应着球形运动分量和环形运动分量的球谐展开，每种分量代表一种具有特性的时间延迟和空间变形模式的应力释放，它可以灵活计算在任何深度的时间序列震后变形场－位移场和应变场。

该模型采用图 10.7 所示的球面震中坐标系统，r，λ 和 φ 分别代表观测点 $P=(r,\lambda,\varphi)$ 相对具体点源的半径、经度和纬度，点源的坐标为 $S(r=r_S,\varphi=0)$。该模型假设体积模量和弹性模量是侧向均匀的，仅与半径长度有关。变量 λ 的定义为以震源到观测点弧线南方向为基准，从震源逆时针旋转到观测点之间的角度。

图 10.7　球体坐标和震源几何图

点位错的位移场可以利用标准模式的求和形式获得，令 $Y_l^m(\varphi,\lambda)$ 表示 1 阶 m 级次完整的正则球体调和函数（Edmonds, 1960）。m 如果为正值，定义如下

$$Y_l^m(\varphi,\lambda) = (-1)^m\left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]P_l^m\cos(\varphi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\lambda} \tag{10.23}$$

P_l^m 为连带勒让德多项式，且

$$Y_l^{-m}(\varphi,\lambda) = (-1)^m Y_l^{m*}(\varphi,\lambda) \tag{10.24}$$

式中：* 表示复共轭，震后位移场可以分别表示为对应的基本球形分量（10.25）和环形分量（10.26）：

$$S_l^{m(S)}(r,\varphi,\lambda) = [y_1^{lm(S)}(r)\hat{r} + y_3^{lm(S)}(r)\ \ \nabla_1]Y_l^m(\varphi,\lambda) \tag{10.25}$$

$$S_l^{m(T)}(r,\varphi,\lambda) = -y_1^{lm(T)}(r)\hat{r}\times\ \nabla_1 Y_l^m(\varphi,\lambda) \tag{10.26}$$

其相对球面半径 r，在各向异性介质下产生的应力张量 T，有如下关系式：

$$\hat{r}\cdot T_l^{m(S)}(r,\varphi,\lambda) = [y_2^{lm(S)}(r)\hat{r} + y_4^{lm(S)}(r)\ \ \nabla_1]Y_l^m(\varphi,\lambda) \tag{10.27}$$

$$\hat{r}\cdot T_l^{m(T)}(r,\varphi,\lambda) = -y_2^{lm(T)}(r)\hat{r}\times\ \nabla_1 Y_l^m(\varphi,\lambda) \tag{10.28}$$

式（10.27）、（10.28）分别为球形分量与环形分量的应力张量关系式。求解变量 y 即可计算震后位移场、应变场。总的位移场表示如下：

$$S(r,\varphi,\lambda) = \sum_l\sum_m S_l^{m(S)}(r,\varphi,\lambda) + S_l^{m(T)}(r,\varphi,\lambda) \tag{10.29}$$

综合上述方程，给出基本计算方程：

$$u(r,t) = \sum_i u_i(r,t,E,F,\varphi_i,\lambda_i) \tag{10.30}$$

其中：变量 u 代表位移，r 代表半径，t 表示震后时间段，i 代表第 i 个位移分量。E 代表地球分层的介质参数，计有 λ,μ,ρ,η,H 等，分别表示各层弹性参数、剪切模量参数、密度、粘度系数以及深度；F 代表震源位错参数，如果震源为矩形断层，则参数有 $\Lambda_0,\Psi_0,\alpha,L,D,\delta,U,\gamma$，分别代表断层起始点的坐标、方位角、断层长度、深度、倾角、滑动量及滑动角；φ_i,λ_i 表示任意观测点的大地坐标。

根据方程（10.30）的解析表达式，如果给定具体的观测点，利用上述参数就可以灵活计算任意点在任何深度的时变震后变形场-位移场和应变场。

§10.4　InSAR 在地震研究中的应用

星载合成孔径雷达测量技术是指利用卫星在相同（相邻）轨道上所获取的同一地区两幅 SAR 图像，通过求两幅 SAR 相位差获取干涉图像，并通过相位解缠来获取地表高程信息的测量技术。差分干涉雷达测量技术（D－InSAR, differential InSAR）是指利用同一地区的两幅干涉图像，其中一幅是通过形变事件前的两幅 SAR 获取的干涉图像，另一幅是通过形变事件前后两幅 SAR 图像获取的干涉图像，然后通过两幅干涉图差分处理（除去地球曲面、地形起伏影响）来获取地表微量形变的测量技术。由于合成孔径雷达采用了主动式遥感方式，因而具有全天候、全天时作业优势。它与其他离散点测量技术相比，其测量结果具有连续的空间覆盖优势，是一项前所未有的、极具发展潜力的空间对地观测新技术。目前，InSAR 技术已在地震、火山、活动构造等动态形变测量工作中得到了广泛应用。

10.4.1 差分干涉测量的基本原理

设在同一地区有两幅干涉图，其中一幅为事件（地震、滑坡等）前两景 SAR 图像，通过干涉处理所得（包含了场景的地形信息）；另一幅由事件前后两景 SAR 干涉处理所得（包含了场景的地形信息和微量地形变信息）。在此基础上，把两幅干涉图像进行差分干涉处理，便可得出该地区的斜距向微量地形变（Zebker et al.，1994）。

如图 10.8，设 $A1$ 和 $A2$ 为地震/形变前卫星对同一地区两次成像（第 1、2 幅 SAR 图像）时的天线位置，两次传播路径分别为 ρ 和 $\rho+\delta\rho$，则测量的相位差（干涉相位）φ 为

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}\delta\rho \tag{10.31}$$

利用余弦定理有

$$(\rho+\delta\rho)^2 = \rho^2 + B^2 - 2\rho B\sin(\theta-\alpha) \tag{10.32}$$

$$2\rho\delta\rho + \delta^2\rho^2 = B^2 - 2\rho B\sin(\theta-\alpha) \tag{10.33}$$

对于星载雷达而言，以 ERS－1/2 为例，$\rho\approx 8\times10^5\text{m}$，$\delta\rho < B \approx 1\times10^3\text{m}$，有 $\delta\rho \ll \rho$；对于机载雷达而言，以 Zebker 试验使用的 NASA CV990 航空器为例，航空器航高为 $8\times10^3\sim14\times10^3\text{m}$，入射角为 $25°\sim55°$，则 ρ 取值范围为 $8.8\times10^3\sim24.4\times10^3\text{m}$，而 $\delta\rho < B = 11\text{m}$，也有 $\delta\rho \ll \rho$，因此可以忽略 $\delta^2\rho^2$ 项。此时有：

$$\delta\rho = -B\sin(\theta-\alpha) + \frac{B^2}{2\rho} \approx -B\sin(\theta-\alpha) = B_P \tag{10.34}$$

其中：B 为两天线基线距，B_P 是基线距的斜距向（视线方向）分量，θ 为雷达波入射角，α 为基线与水平方向夹角，λ 为雷达波长。

$$\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}B_P$$

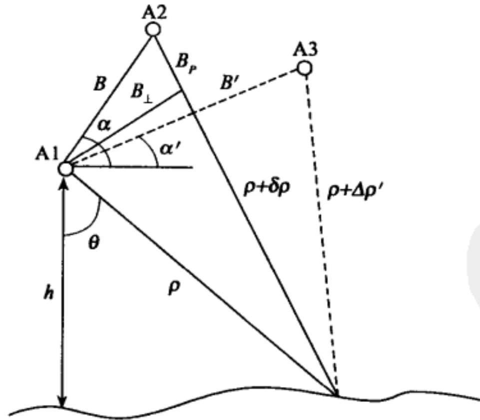


图 10.8　差分干涉测量的成像几何示意图

现在我们考虑在同一测区（仍在发生地震/形变前）进行的另一次观测，获取了第 3 幅

SAR 图像，A3 是此时的天线位置。第 1 幅和第 3 幅 SAR 图像可以形成第 2 幅干涉纹图,假设该干涉纹图与前一幅干涉纹图(由第 1 幅和第 2 幅 SAR 图像形成)的主图像相同(即 ρ 和 θ 不变),那么这两幅干涉纹图的相位可以比较,第 2 幅干涉纹图的基线距为 B',基线距与水平方向夹角为 α',仿前面有

$$\varphi' = \frac{4\pi}{\lambda}B'_P \tag{10.35}$$

两幅干涉纹图的相位比值为

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{B_P}{B'_P}$$

即相位的比值等于基线距水平分量的比值,此时它与地形无关。

但如果在第三次观测期间,地表发生了形变(即测区发生了地震/形变),假设这种形变与雷达分辨单元相比很小,可认为雷达信号仍是相关的。那么这时相位信息除了与地形有关外,还包含雷达视线方向的形变量 $\Delta\rho$,第 2 幅干涉纹图的相位值应为

$$\varphi' = \frac{4\pi}{\lambda}B'_P + \frac{4\pi}{\lambda}\Delta\rho \tag{10.36}$$

由式(10.36)和(10.31)可得视线方向的形变量 $\Delta\rho$ 所引起的相位为

$$\varphi_d = \varphi' - \frac{B'_P}{B_P}\varphi = \frac{4\pi}{\lambda}\Delta\rho \tag{10.37}$$

因此,可以推导出视线方向的形变量为

$$\Delta\rho = \frac{\lambda}{4\pi}\left(\varphi' - \frac{B'_P}{B_P}\varphi\right) \tag{10.38}$$

而基线距的比值

$$\frac{B_P}{B'_P} = \frac{B\sin(\theta - \alpha)}{B'\sin(\theta' - \alpha')} \tag{10.39}$$

是视角 θ 的函数,它取决于成像参数和图像上每一点的地形。

由于无高程变化的平坦地表也会产生线性变化的干涉相位,一般称之为平地效应。由于平地效应的影响,常常会造成干涉条纹过密,影响后面的相位解缠,所以在进行相位解缠之前,常常需要进行平地效应消除,降低相位解缠的难度。

从干涉纹图移去平地效应有新的相位值(Zebker et al.,1994;王超等,2002):

$$\varphi_{\text{flat}} = \frac{4\pi}{\lambda}\delta\theta B\cos(\theta_0 - \alpha) = \frac{4\pi}{\lambda}\delta\theta B_\perp \tag{10.40}$$

$$\begin{aligned}\varphi'_{\text{flat}} &= \frac{4\pi}{\lambda}\delta\theta B\cos(\theta_0 - \alpha') + \frac{4\pi}{\lambda}\Delta\rho \\ &= \frac{4\pi}{\lambda}\delta\theta B'_\perp + \frac{4\pi}{\lambda}\Delta\rho \end{aligned} \tag{10.41}$$

故

$$\varphi_d = \varphi'_{\text{flat}} - \frac{B'_\perp}{B_\perp}\varphi_{\text{flat}} = \frac{4\pi}{\lambda}\Delta\rho \tag{10.42}$$

在此式中,无须精确的 θ 值和地形信息,就可以确定视线方向的形变量 $\Delta\rho$。

10.4.2 由差分干涉测量获取地震地表同震形变场的实际处理流程

差分 InSAR 的主要工作步骤包括：像对选择、复图像对亚像元精度的配准、干涉图像的生成、干涉图像的平地校正、相位解缠、差分像对确定及参数调整、差分干涉图计算等。

以通常选用的“三轨法”模式进行差分干涉处理说明，分别对第一组和第二组按以下步骤进行处理：

(1) 首先根据三景 SAR 图像的经、纬度范围选取公共重叠区，以保证能在同一区域进行干涉和差分干涉处理。

(2) 进行图像配准，将 2 号图像作为主图像，分别与 1 号和 3 号图像进行基于轨道参数的自动配准，给定一个配准精度(例如 0.2 像素)，若配准达不到所需精度，则根据两景图像的地表标志物，选取地面控制点，同时进行滤波处理。

(3) 求取相位差，生成干涉图。把配准后的图像组成震前 - 震前、震前 - 震后两个干涉对，进行共轭相乘，生成两幅干涉图，并采用“去平地”方法除去地球曲面影响，然后进行相位解缠，获取震区高精度 DEM。

(4) 差分干涉处理，将两幅干涉图进行差分干涉处理，即在震前 - 震后干涉图中除去地形因素，得到反映同震位移地表形变场的差分干涉图，然后将得到的第一组和第二组地表干涉形变场进行地理编码、拼接，便得到了地震地表同震形变场。

图 10.9 示出星载差分干涉测量流程图。图 10.10 是 1999 年 8 月 17 日发生在土耳其 Izmit Ms 7.5 地震同震变形图。

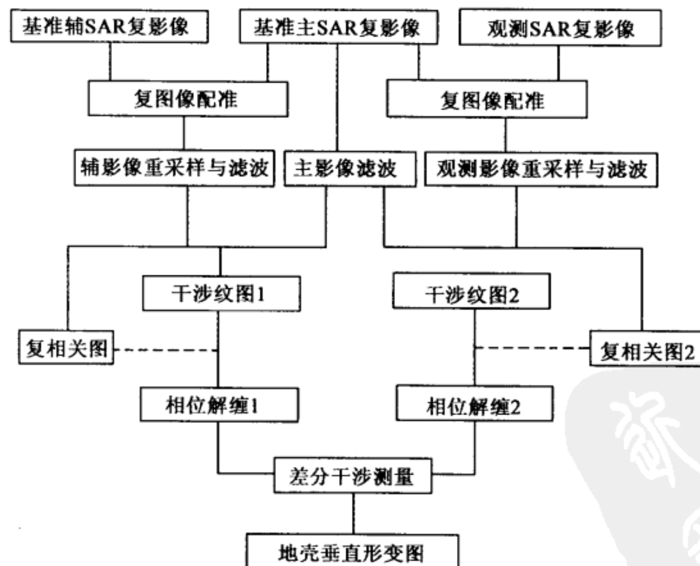
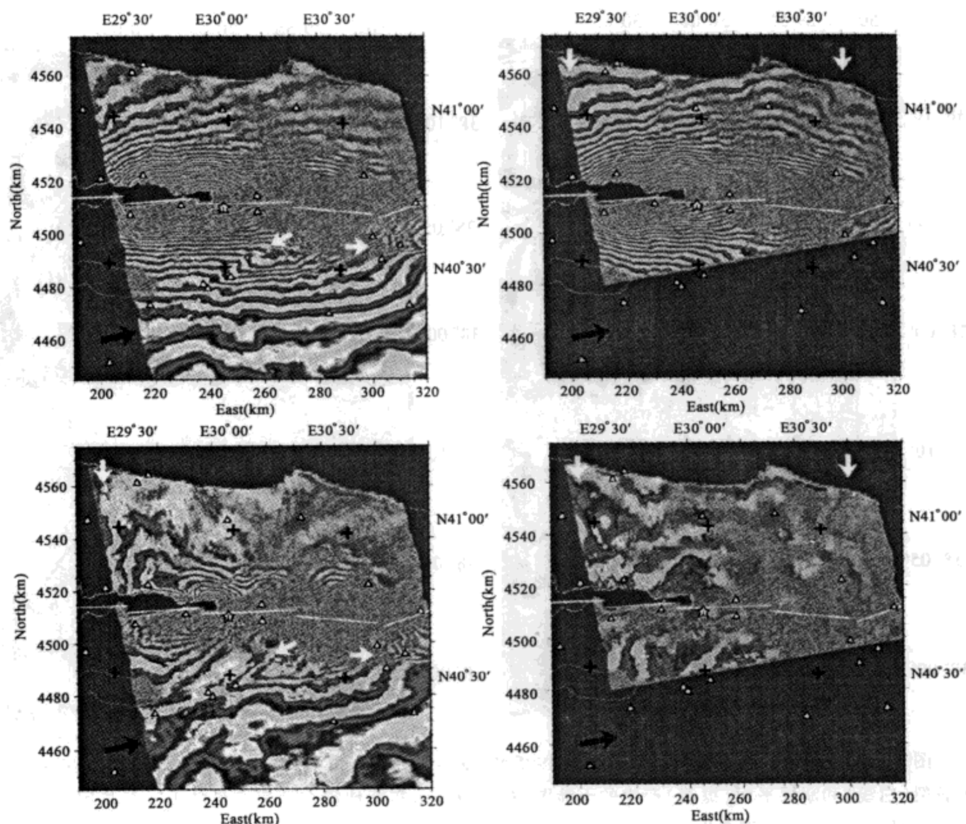


图 10.9 星载差分干涉测量流程图



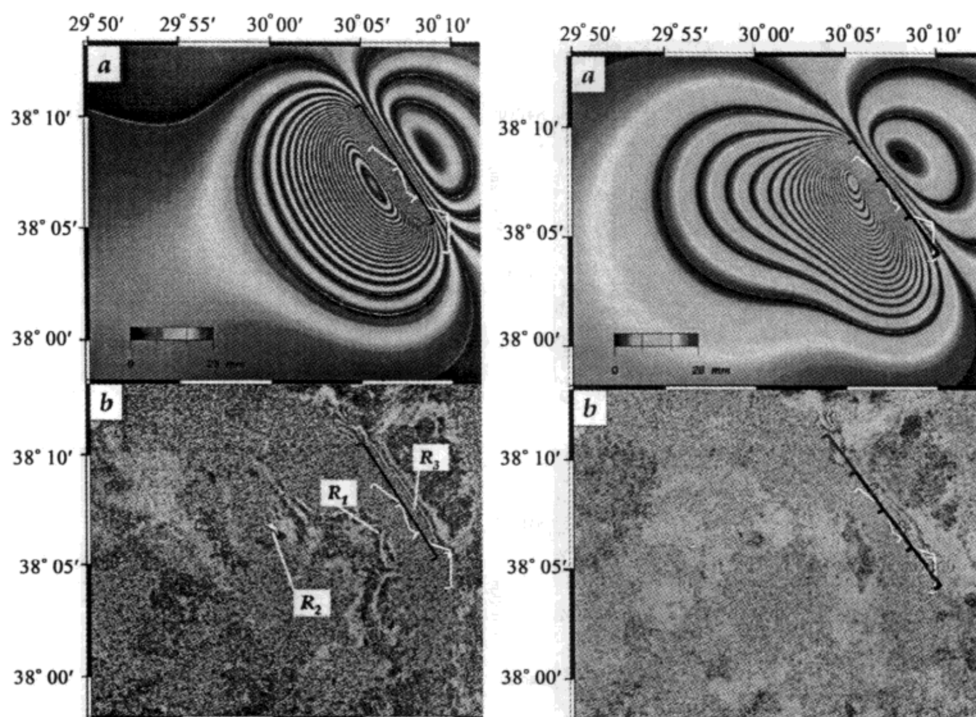
左上图是两幅 ERS-1 影像图(1999 年 8 月 12 日与 1999 年 9 月 16 日)导出的同震变形干涉图,右上图是两幅 ERS-2 影像图(1999 年 8 月 13 日与 1999 年 9 月 17 日)导出的同震变形干涉图,左下图是减掉由 GPS 观测导出的同震滑动模型得到的残差干涉图,右下图是 ERS-1 与 ERS-2 的干涉差分图。图中☆表示震源、Δ 表示 GPS 测站(引自 Reilinger etal. ,2000,Science)。

图 10.10　1999 年 8 月 17 日发生在土耳其 Izmit Ms 7.5 地震同震变形图

10.4.3　地震断层运动参数的确定

利用地震地表同震形变场,根据断层位错模型,模拟地震形变场,由最佳参数求得震源参数及震中位置,并分析地震机理和孕震构造(图 10.11)。

也可利用跨断层的 GPS 观测资料结合 INSAR 资料,通过 InSAR 与 GPS 数据融合建立高时空分辨率的三维形变场,进一步采用分段分层动力学反演模式和全球最优化算法,反演活动断层的几何学和运动学参数,研究断裂带现今构造运动速率分布与闭锁深度。



左上图表示利用最佳单断层模型模拟得出的 1995 年 10 月 1 日在土耳其 Dinar 发生的 Ms 6.1 地震在地表破裂(白线)和断层平面(黑线)产生的干涉图,左下图表示实际地震在地表产生的干涉图与用最佳单断层模型模拟得出的地震产生的干涉图的残差干涉图,R_1-R_3 表示模型产生最大系统误差的位置,右上图表示利用多断层模型模拟得出的 1995 年 10 月 1 日在土耳其 Dinar 发生的 Ms 6.1 地震在地表主破裂(黑线)产生的干涉图,右下图表示实际地震在地表产生的干涉图与用多断层模型模拟得出的地震产生的干涉图的残差干涉图。

(引自 Wright et al. ,1999,EPSL)

图 10.11

§10.5 地壳形变监测台网与地震预报

地壳形变测量能精确定量地监测到地震发生前后地壳的一系列运动、变形(位移、速度、加速度、应变、倾斜、蠕滑)、重力和介质物性(密度、勒夫数)的空间分布及其随时间变化。地壳形变测量和测震一样,被科学界公认为是力学型的最直接的地震前兆,是地震预报的基础。我国的地壳形变测量,特别是地壳形变监测台网经过近 40 年的努力,逐步形成了具有特色的点、线、面和空、地、深相结合的布局,积累了大量的观测资料,成为地球动力学和地震预测预报必不可缺的基础与支柱。地壳形变监测台网正在朝着综合地壳形变测量的多种手段,全景而实时地监测地球表层形变和重力场的时空动态变化过程,实现卫星重力、INSAR 监测以及 GPS

监测有机结合，实现水平形变网、垂直形变网和重力观测网的统一，联系跨断层剖面和定点形变台站，形成各手段相互配合、优势互补的综合监测系统的数字化综合观测地表台网(阵)。

地壳形变监测台网按功能的不同，分为全球地壳形变台网、国家地壳形变台网、区域地壳形变台网、社会地壳形变台网四级。中国地震局地壳形变学科技术协调组(2004)对地壳形变监测台网作了规划，本节主要介绍其规划内容。表10.2是我国目前地壳形变台网主要技术指标和仪器装备情况(中国地震局地壳形变学科技术协调组，2004)。

表10.2　　**我国地壳形变台网技术指标和仪器装备**

(中国地震局地壳形变学科技术协调组，2004)

观测方法	主要技术指标	仪器装备
GPS连续观测	坐标年变化率测定精度水平优于2mm，垂直优于3mm	连续观测站用双频GPS接收机和扼径圈天线 数据采集与传输系统、供电系统、避雷系统
GPS定期复测	坐标变化测定精度，水平分量优于5mm，垂直分量优于10mm	双频GPS接收机和扼径圈天线
精密水准测量	精度优于0.45mm/km	满足S05型水准仪参数的数字水准仪
地倾斜观测	分辨力优于1×10^{-8} 潮幅因子中误差优于0.02 日零漂优于1×10^{-8} 年零漂优于1×10^{-6}	水管倾斜仪 摆式倾斜仪或钻孔倾斜仪 数据采集与传输系统、供电系统、避雷系统
应变观测	分辨力优于1×10^{-9} 潮幅因子中误差优于0.05 日零漂优于1×10^{-8}	钻孔应变仪 洞体伸缩仪 数据采集与传输系统、供电系统、避雷系统
绝对重力测定	精度优于$5\times10^{-8}m\cdot s^{-2}$	绝对重力仪
重力连续观测	分辨力优于$1\times10^{-8}m\cdot s^{-2}$ 潮幅因子中误差优于0.01 日零漂优于$20\times10^{-8}m\cdot s^{-2}$	台站重力仪 数据采集与传输系统、供电系统、避雷系统
相对重力观测	联测精度优于$15\times10^{-8}m\cdot s^{-2}$	相对重力仪

10.5.1　全球地壳形变台网

全球地壳形变台网由我国投资建设的境内台站和通过国际合作在境外周边地区建立的台站构成。全球地壳形变台网的建设，将从观测系统建设和信息处理技术两方面使我国的地壳形变观测系统融入全球观测系统。全球地壳形变台网为开展全球地球动力学及潮汐效应研究、大陆岩石圈及边缘地球动力学、地球深部结构与物质组成及地震预测研究和确定全球形变参考框架提供依据，积累资料，实现我国地壳形变观测的全球化，为我国防震减灾事业、国防建

设、国家重大决策服务。

全球地壳形变台网包括空间定位(GPS)台网、倾斜应变台网和重力台网。

空间定位(GPS)台网即IGS全球跟踪站网,目前IGS的全球跟踪网由全球2000多个基准站组成(主要的跟踪站200多个,我国的IGS基准站有8个,是上海、武汉、拉萨、西安、昆明、北京、乌鲁木齐和台北),IGS通过Internet提供卫星精密星历和主要跟踪站的坐标、位移速率及GPS观测数据。今后计划纳入全球IGS站的我国国内的GPS基准站将增加到20个,均匀分布于我国大陆一级、二级块体上;在中国周边国家(地区)建立10个GPS连续观测站并纳入IGS站;在我国建立IGS的资料中心(资料备份镜站);建立全球资料(包括VLBI和SLR)中国分析中心;将我国的SLR和VLBI站纳入国际交流。

倾斜应变台网则拟在我国内陆和沿海地区的兰州、乌鲁木齐、武汉、北京、上海、厦门、广州、成都、牡丹江建设9个倾斜应变国际固体潮台站,纳入国际固体潮中心的全球潮汐形变基准、比测、研究和资料交流。

为在地震预报和构造运动观测中与美国、日本等在建的板块边界倾斜应变和GPS多尺度综合形变观测开展对比实验与研究,在多震区和构造运动剧烈区域建设川滇(2个)、柴达木—祁连(2个)、华北(3个)地区共计7个块体边界倾斜应变和GPS多尺度综合形变观测台。

重力台网拟在武汉、北京、上海、广州、昆明、拉萨、乌鲁木齐、兰州建设8个重力观测及固体潮基准台,纳入全球重力与固体潮台网,作为全球大地水准面联测站点和卫星重力的地面基准。

10.5.2 国家地壳形变台网

国家地壳形变台网由空间定位(GPS)台网、倾斜应变台网、重力台网、水准台网、地块边界观测、地壳形变综合观测实验场组成。国家形变台网是我国未来数字形变的基本框架,以观测我国主要块体及其边界的变形运动和与地震有关的地形变为目标。

国家GPS台网及周边国家(地区)GPS观测站,用以监测我国大陆及近海二级地块的运动,为强震预测和地学研究服务。在“中国地壳运动观测网络”的基础上,规划在中国大陆20个次级活动地块内部均匀布点,在活动地块的边界带和主要地震活动区应适当加密。按照布网原则,连续观测的基准网是监测网的基本框架,由300个GPS站组成,均匀分布于中国大陆次级活动地块内部(其中有10个台站建在中国周边地区的国家),大部分地块内基准站平均站间距约300km,在块体边界带及主要地震活动区间距约100km,甚至更短(以监测7级地震的地壳形变中短期前兆为目标,在地震活动区,基准站的点距应小于60km)。定期复测的区域站是基准站的补充,在原“中国地壳运动观测网络”的基础上,取消基本站、扩大布设范围、适当加密点位,由现有的1 000个增加到2 500个。在活动地块的边界带和主要地震活动区,以监测东部5.5级、西部6.5级以上地震的中期前兆为目标,站距分别为小于40km和小于50km。

倾斜应变观测由倾斜、应变两种观测手段构成。至2020年,国家倾斜应变台网规模要达到150个台站,在全国范围内基本均匀布设,台站间距约260km,单台控制面积约为8万km^2;在我国每个一、二级构造块体内,至少布设3个以上的台站;在地震带、主要构造带及沿海地区适当加密。

国家重力台网,台站间距约为400km,应能模拟每个一级地块变化趋势面;国家级重复测网布设点间距100~200km,应能模拟每个二级地块变化趋势面;绝对重力测点间距约300km,

应能模拟一级地块变化趋势面，并对台站观测和重复重力测量网形成控制。国家重力台网拟由 65 个连续观测台站构成。

10.5.3 区域地壳形变台网

区域地壳形变台网是建立在特定的构造单元、以监测特定的区域地震活动和构造活动为主要对象的监测台网。区域地壳形变台网的建设，以研究活动地块的变形与地震活动为科学目标。区域地壳形变台网的主要功能是：与国家台网相配合，加密地壳形变台网的观测密度，提高监测信息的精度，为台网覆盖区域及其邻近地区的中期与短临地震预测、区内高精度的地壳形变监测提供连续可靠的观测资料。

10.5.4 社会地壳形变台网

社会地壳形变台网由社会有关行业、部门和地方为其专项任务而建设，是全国形变监测台网的补充，例如三峡水库形变台网，新丰江水库形变台网，北京、上海、深圳 GPS 综合服务网等。

社会地壳形变台网的建设要求，原则上与上述全球、国家、区域台网相当，以求能纳入全国地震监测台网体系，达到数据共享。

10.5.5 地壳形变与地震活动关系

根据长期的地壳形变观测结果，人们认识到与地震活动有关的地壳形变一般可以分为长时期平稳、震前异常、发震和余震四个阶段。第一阶段的特征是应变积累平稳而缓慢，经历时间长；第二阶段的特征是积累速度加快，方向改变，但经历时间不长；到了第三阶段，积累达到极限，介质破裂，应变能量突然释放；第四阶段释放剩余应变能量，速度转慢，逐渐恢复正常。

为了了解地震孕育过程，前提条件是需要大地测量提供震前和震后构造运动详细而精确的记录。震前记录是地震预测的重要依据，震后记录可为岩石圈下部（或软流圈上部）对于突然地震滑动所产生的冲击负荷的反响提供唯一信息，而余震分布则是确定地震过程断层面边界的基本数据之一。

地震的前兆地壳运动，有的几十年以前就开始了。利用大地测量方法，可以测出震前的形变率加速、地壳隆升异常、重力变化和倾斜变化，等等。在大地震之后，区域性的震后运动或者以余震形式表现为非连续运动，或者是以蠕动形式表现为连续运动，或者兼有这两种运动。这些运动可能持续许多年，是可以用大地测量方法测定的。然而，震前和震后的地壳运动记录目前还很不充分，因此，关于地震孕育过程中的特别是震前的地壳形变特征，还没有被人们所充分认识，成为地震预测的重大障碍之一。

一次地震所释放的应变能，只有重新孕育得到恢复之后，才能发生下一次地震。因此，上一次地震的同震应变场的大小和形状对于预测再次发生地震的潜在可能性是至关重要的。但是，在过去所发生的地震中，只有极少数具有精确的同震形变测量结果，这是因为过去监测网的精度和密度都不够。为了获取同震形变信息，要求以大约每 10km 一点的密度布设高精度监测网。由于很多地震都是发生在板块边界上，所以沿板块边界观测的两次地震间的长期形变，是了解应变积累机制的重要线索。为了监测震前、同震和震后地壳运动的全过程，大地测量是惟一的手段。

地形变与地震活动之间存在着多种层次的时空关系，最基本的时空关系是：

(1) 孕震过程中近源区的形变异常更为显著。

(2) 震级越大,震前出现的异常越显著。

(3) 一般情况下,孕震过程进入中期阶段,特别是进入中短期阶段之后,形变异常更为显著。

以大地测量学科为基础的地壳形变测量将为进行地震预测研究提供重要的基础资料,但利用地壳形变预报地震,以下3个问题是主要障碍(江在森,2001):

(1) 地壳形变与应变的关系问题。从地震预测来看,我们通过大地形变观测,直接能得到的是观测点的相对位移,可以得到形变场的空间分布,而对于地震预测有直接意义的是地壳弹性应变能的积累情况。如果能够建立地壳形变与应变的关系,通过大地形变复测确定地壳弹性应变的空间分布,这对于判定强震危险区就有特别重要的意义。介质不均匀性是产生应变分布不均匀的条件,也是应变能在特定地区得以迅速积累的条件(也即孕震条件)。一般讲的地形变中包含应变和蠕变,问题在于如何取得真正的地壳应变的空间分布、如何区分应变与蠕变等。从应变积累的角度,亦有人认为弹性应变可以部分地转换为塑性应变,一旦转换为塑性应变之后,也就不储备应变能了。而介质的复杂性使得很难对具体区域的形变与应变的关系客观定量地给出,这可能是大地形变观测异常并不一定对应地震的一个原因。

(2) 地表形变与深部的关系。大地形变监测得到的是地表形变量,而地震通常发生在地下10km以下,虽然较强烈的地震孕育信息不可能不传递到地表,但由于目前对深部构造与浅部构造的关系不很清楚,我们很难建立比较可靠的深部与浅部和地表的形变或应变之间的关系。由地表观测值反演深部的情况,通常因深浅构造结构及介质物性参数不清,使得难以逼近实际。

(3) 地壳形变观测难以确定应力临界值。即使我们知道岩石的介质力学参数(如作理论与经验假设),由于地壳介质始终处于围压过程中,我们只能通过某一时段的大地形变观测结果来推算该时间段内的应力应变、应变能的增量值,无法推求实际绝对量值的大小。从这个意义上来看,所谓大地形变资料反映的应变积累量只是相对观测时间段内的增量(相对第一期观测时的变化量)。因而不能根据观测资料得到的应力、应变、应变能水平和岩石抗破裂(错动)强度来判定是否到达临界值。只能研究构造形变、应变变化的非平稳过程,根据理论和经验上不同构造环境下地壳介质在不同应力水平(不同阶段)的应力-应变的变化特性来判定孕震过程可能进入什么阶段,来进行地震预测。这些依赖于多种构造孕震环境下(多种类型的地震)孕震过程的较完整的形变观测资料的积累,目前的条件还不成熟。

随着地壳形变台网的建设,各种观测数据的积累,目前已能获得高时空分辨率的速度场、应变-应力场。再结合数值模拟方法,研究各种构造孕震环境、复杂介质条件和动力条件下强震孕育过程的地壳形变场演变,可以逐步探讨地震机理,推进地震预测研究的深入,逐渐由经验的地震预测向物理模型预测过渡。

第11章　海洋学大地测量监测方法

§11.1　概　　述

大地测量学的基本任务是测定地面点位置、地球重力场和地球的形体以及它们随时间的变化,测量范围包括海洋在内的整个地球表面。传统的地面大地测量技术不能用于占地球表面71%的广阔海洋,这不仅限制了大地测量学基本任务的实现,也大大限制了为海洋学研究提供大地测量信息的能力,如测定海洋重力场和海面形状(海面地形)及其随时间的变化等。大地测量涉足海洋学监测和研究始于卫星大地测量的兴起和发展,20世纪60年代出现卫星激光测距(SLR)技术,特别是其后70年代出现并得到迅速发展的卫星海洋雷达测高(SRA,即Satellite Radar Altimetry)技术,为用大地测量方法监测海洋提供了精密手段,也实现了真正意义上的全球大地测量及学科的基本任务。

SLR利用地面站对卫星的激光跟踪测距,测定卫星的轨道摄动,以此作为观测数据求解卫星运动的动力学方程,确定作用于卫星的各种摄动力的模型参数,主要包括地球重力场扰动位球谐展开系数以及全球海洋潮汐模型参数,由此在物理大地测量中首次实现了以分米级的精度确定长波(>500km)海洋大地水准面,并据此解释了海洋岩石圈构造,为全球板块的划分提供了参考依据。但该项技术本身只能恢复低阶海洋重力场,也不能直接观测海面,SRA则适时地弥补了这一缺陷。

SRA测高仪又称卫星高度计,可直接测定海面星下点至参考椭球面的法向高度,即大地高,称简海面高,并以一定的周期进行重复测量,由此可精密确定不同时间尺度的平均海面。若将其视为经典意义下的大地水准面,则意味着可以用SRA技术"直接"测定海洋大地水准面,再通过逆Stokes公式计算重力异常,并可进一步计算其他海洋重力场参数,这是大地测量精确测定海面形状和确定海洋重力场取得的突破性进展。由于该技术空间采样率非常高,数据分辨率可达几公里,联合SLR低阶重力模型和地面重力测量数据可构建高阶(≥360阶)全球重力场模型;利用SLR低阶重力模型和SRA测定的平均海面高可建立低阶海面地形(平均海面相对于大地水准面的起伏)模型,由此可计算大洋环流系统;利用海面高重复测量时序观测数据可建立高精度的全球海洋潮汐模型,在这里每一个海面高重复测点可以看成一个采样时间分辨率较低的"验潮站"。通过对SRA雷达回波的分析可获取海况(风、浪等)信息,建立相应的统计分布模型,支持海况预报、预警。分析SRA的海面高监测数据,可探测热带海洋海面的月平均异常(与正常月平均之差),这种异常量是与厄尔尼诺事件发生和发展密切相关的重要信息。SRA技术使大地测量在很大程度上介入了海洋学的监测和研究。

SRA技术从1973年美国宇航局(NASA)发射天空实验室卫星(SKYLAB)首次成功进行海洋卫星雷达测高实验开始,30年来先后陆续发射了多代测高卫星。其中有美国NASA等部门发射的地球动力卫星GEOS-3(1975年)、海洋卫星SEASAT(1978年)、大地测量卫星GEOSAT

(1985 年)；欧洲空间局(ESA)发射的遥感卫星 ERS-1(1991 年)和 ERS-2(1994 年)；NASA 和法国空间研究中心(CNES)合作发射的海面地形实验/海神卫星 TOPEX/POSEIDON(缩写为 T/P,1992)。1998 年美国又发射了 GFO(GEOSAT Follow On)卫星,是 GEOSAT 测高卫星计划的延续;T/P 卫星测高计划的后续卫星 JASON-1 也于 2001 年 12 月发射,2002 年 3 月 ESA 发射了具有最新测高功能的全球环境卫星 ENVISAT,可看成新一代 ERS 卫星。SRA 技术经历了不断改进和完善的过程,技术和性能已成熟。目前测高精度已达 3 ~ 5cm,数据分辨率达 5 ~ 10km 水平,利用 SRA 近 30 年丰富的观测数据,大地测量及相关海洋学科在各自的研究领域取得了瞩目的成果,特别在海洋重力场及其海洋地球物理解释,海平面变化、海洋潮汐、全球尺度海流和中尺度涡旋等方向取得了大量高精度数值结果或模型系列。可以展望,SRA 将成为对全球海洋实施长期大地测量监测的常规技术。

本章介绍、讨论利用 SRA 观测数据确定平均海面及其变化、恢复海洋重力场及大地水准面、建立海面地形模型及分析与其相关的大洋环流、精化全球海洋和近岸海域潮汐模型,以及反演海底地形等的原理和方法。

§11.2 卫星测高技术监测海平面变化

11.2.1 卫星测高基本原理

卫星测高仪是一种星载微波测距雷达。雷达测距仪沿垂线方向向地球表面发射雷达脉冲,并接收从地面(海面)反射回来的脉冲信号,星载计时系统同步记录雷达信号往返传播的时间 Δt,已知光速 c,则雷达天线相位中心到瞬时海面的垂直距离 h_a 为(参见图 11.1):

$$h_a = c \cdot \frac{\Delta t}{2} \tag{11.1}$$

雷达波束宽角 $\varepsilon = 1.5° \sim 3.0°$,到达海面波迹半径为 3 ~ 5km,测高仪所测高度 h_a 为这个圆形波迹面积内卫星至海面的平均高。

在图 11.1 中,h 为瞬时海面的椭球高(大地高),h_a 是测高仪的直接观测量,r_S 是卫星至地心的距离。P 点是瞬时海面上卫星的垂向星下点,P_G 是大地水准面上 P 点的垂向投影点,P_e 是 P_G 在参考椭球面上的法向投影点,其地心距为 r_P。图中略去了垂线偏差,$SP_e = H_S$ 是卫星的椭球高,N 为大地水准面高,若地球参考椭球是圆球。则 OS 和 OP_e 重合,并有简单关系

$$h = r_S - r_P - h_a \tag{11.2}$$

顾及参考椭球扁率,上式应加一改正项 C_r,即

$$h = r_S - r_P - h_a + C_r \tag{11.3}$$

$$C_r = \frac{r_P}{8}\left(1 - \frac{r_P}{r_S}\right) e^4 \sin^2 2B \tag{11.4}$$

对于 GEOSAT 卫星,轨高 800km,$\angle P_e OS \approx 77''$,$C_r$ 最大为 4.0m;对于 T/P 卫星,轨高 1 336km,$\angle P_e OS \approx 120''$,$C_r$ 最大为 6.2m。JASON - 1 卫星与 T/P 情况类似,ERS 卫星情况类似于 GEOSAT 卫星。因此计算 h 必须加 C_r 改正,可由式(11.4)精确计算。

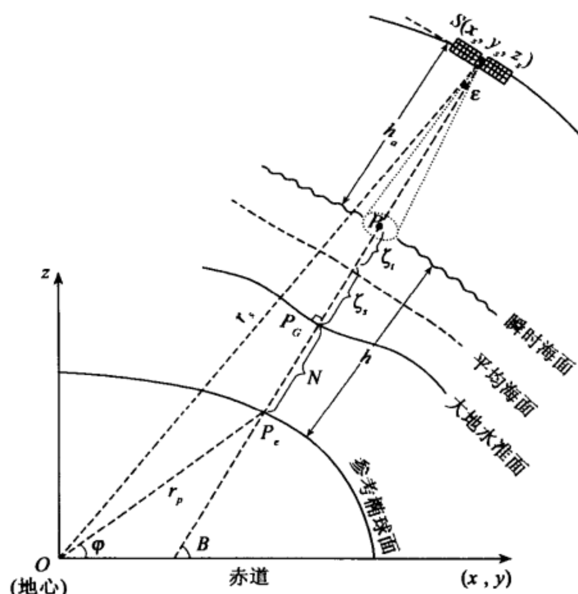


图 11.1 卫星测高几何原理

显然,h 也可按以下简单公式计算:

$$h = H_S - h_a \tag{11.5}$$

式中:H_S 可由已知的卫星星历坐标(X_S,Y_S,Z_S)反算为大地坐标(B_S,L_S,H_S)得到。

式(11.2)或式(11.3)称为卫星测高的基本方程,式(11.2)是无误差的几何关系,并认为其中已加了 C_t 改正。现设 h_a 的测定误差为 ε_h,卫星轨道径向误差为 ε_r,则式(11.2)可写成

$$h = r_S - r_P - h_a + \varepsilon_r - \varepsilon_h \tag{11.6}$$

另一方面,海面高 h 又可表示为以下关系:

$$h = N + \zeta_S + \zeta_t + \tau + w \tag{11.7}$$

式中:ζ_S 和 ζ_t 分别为海面地形(海面相对于大地水准面的起伏,见图 11.1)的稳态部分和非潮汐时变部分,τ 为海潮和固体潮对海面高的影响,w 为海况(风、浪和大气压等)引起海面高的变化。令

$$h_c = r_S - r_P - h_a \tag{11.8}$$

$$N = N_0 + \Delta N^c + \Delta N^0 \tag{11.9}$$

式中:h_c 为计算的海面高,即海面高的间接观测值;N_0 为用于测高卫星定轨的全球重力位模型计算得到的模型大地水准面高;ΔN^c 为该位模型(系数)误差产生的大地水准面高的误差;ΔN^0 为与位模型截断误差相应的大地水准面高的误差。

联合式(11.6)和式(11.7),得

$$h_c = N_0 + \Delta N^c + \Delta N^0 + \zeta_S + \zeta_t + \tau + w - \varepsilon_r + \varepsilon_h \tag{11.10}$$

上式是海面高的一种观测方程,N_0 可视为 h_c 的近似值,其余各项为待求未知量。

又令

$$\Delta h = h_c - N_0 \tag{11.11}$$

则式(11.10)可写成残差观测仪的形式

$$\Delta h = \Delta N^c + \Delta N^0 + \zeta_S + \zeta_t + \tau + w - \varepsilon_r + \varepsilon_h \tag{11.12}$$

上式表示各种因素对海面高(残差)观测值的影响之和,但其中并未包括所有物理因素的影响(参见下节),只是认为这些未列入的影响都有足够精密的改正模型,并经改正已从观测值中消除。留在式(11.12)中的影响项是我们要从残差海面高观测值中提取的各类信息,也是我们目前用卫星测高技术监测海面高变化所要获取的信息,其中包括海洋大地水准面(海洋重力场)信息和某些海洋动力环境信息(如海面地形、潮汐和海况),还有测高误差信息,利用卫星测高对海面高的大量重复监测数据可以反演和提取这些大地测量学和海洋学共同关注的信息。式(11.12)是目前采用的卫星测高基本观测方程。根据不同的研究目的,这一方程还可以简化为其他形式。

11.2.2 卫星测高的误差源

利用卫星测高技术测定海面高,就大地测量和海洋监测应用来说,主要是精确确定一定时间尺度上的平均海面和海洋大地水准面,并由此确定稳态海面地形,其中高分辨率、高精度的平均海面高是卫星测高提供的最基础数据。分析卫星测高的误差源,在大多数情况下,实际上就是研究确定平均海面高的各种可能的误差来源。这种误差源大致包括三类(Seeber,1993;Rummel,1993):

(1) 卫星定轨误差。主要是径向轨道误差。

(2) 测高误差。主要是测高仪误差和测高信号传播误差。

(3) 海面高时变误差。主要是潮汐和海况的影响。

在卫星测高技术的应用中,由于测距误差的量级以及所需提取的大地测量和海洋学信号(如残差海面高、海面地形)的量级一般都小于或远远小于大气和海洋物理环境对测高影响的量级,因此在卫星测高中模拟各种误差影响,进行相应的改正,是应用该项技术的重要环节。

11.2.2.1 轨道误差

卫星的轨道误差是卫星的真运行轨道与计算轨道之差,即发布的卫星星历坐标($X_S(t)$, $Y_S(t)$, $Z_S(t)$)或($B_S(t)$, $L_S(t)$, $H_S(t)$)与真实坐标之差。卫星测高是确定海面点的垂向位置,主要受径向轨道误差的影响。水平方向的轨道误差影响测点的水平位置。由于卫星定轨给出的水平分量精度高于垂向分量的精度,且对测点水平位置要求的精度低于垂向位置的精度,因此在卫星测高中主要研究径向轨道误差。卫星轨道的径向位置是确定测点径向位置的基准。

早期的卫星测高,如20世纪70年代的GEOS-3卫星最初的径向轨道误差为5m,SEASAT为1.5m; 80年代的GEOSAT为0.4m;90年代发射的测高卫星(如T/P和ERS-2)径向轨道精度已达到或优于0.05m;20世纪初最新一代后续测高卫星(如JASON-1和ENVISAT),径向轨道精度已提高到0.03m或更优。现今,在卫星测高技术中径向轨道误差影响已经不是一个特别突出的问题,但仍然有其重要性。因为我们在利用早期卫星测高资料时,必须利用新的地球重力场模型并联合最新一代高精度的测高数据削弱其径向轨道误差的影响。

轨道误差主要由以下原因引起:轨道计算采用的地球重力场模型的分辨率和精度(主要

是精度)；地面跟踪站的坐标误差以及跟踪系统(SLR,Doppler 等)的误差或局限性；轨道计算中的模型误差。每颗卫星由于轨道参数的差别,对位系数的某一子集特别敏感,因此早期针对特定的卫星考虑了研制特定的重力场模型,并不断加以改进；跟踪站的地心坐标是利用全球观测技术(SLR,Doppler,VLBI 和 GPS 等)测定的,精度同样处于不断改进中,目前已达到0.02m或更优；跟踪系统已同时采用多种技术,如 SLR,DORIS 和 GPS,特别是在新一代卫星上已装有动态 GPS 接收机,成为精密定轨的主要保障。轨道计算的模型误差主要是力模型误差,其中主要来源于重力模型误差,其次还有太阳辐射压模型误差,包括直接影响和间接影响。直接影响是太阳辐射压作用在卫星运动方向上,几小时可达 10m 以上,其精确模拟取决于卫星表面形状；间接影响是地球表面反射到卫星上的辐射压,由于地球表面环境复杂,其影响相当难以模拟,但在大多数情况下其影响小于直接影响的 10%。这类力模型误差影响主要通过精密轨道跟踪技术来控制。对径向轨道误差的谱分析表明,其误差主要分布在 1cpr (one circle per revolution),即卫星绕地球一周的周期上,可采用简单的截距——斜率式或三角函数模拟短弧径向轨道误差(Engelis,1987；翟国君,1997),并通过交叉点平差加以削弱。

11.2.2.2 测高误差

这项误差指的是测高仪发射的脉冲信号在其传播路径上受到的干扰和歪曲,包括仪器偏差和介质对信号传播的影响。

仪器偏差主要包括如下几种：

(1) 信号跟踪器系统偏差。是跟踪器对回波波形离散采样校准产生的系统性偏差。由于采用的现场跟踪器算法是假定测高仪无径向加速度(高度是线性变化),故当测高仪的在轨高度变化有加速度时,如经过一个窄的海沟上空时,必须补偿一个相应的高度偏差。

(2) 回波波形放大校准偏差。指由于接收信号的放大程度随观测表面变化产生的偏差。仪器的自动放大控制器用于补偿信号衰减,但回波强度的快速变化将使跟踪脉冲的上升边位置回路产生错误,从而导致校正误差。

(3) 平均脉冲形状的不确定性与时间标志偏差。用于计算的平均回波脉冲是随机变化的,且有不确定性,因此产生返回脉冲形状偏差。平均后所余残差将导致测量噪声。微波仪部件的老化和长期的钟漂也将导致测高误差。钟漂可将测高仪上的钟同其他参考钟对比确定,由于仪器老化导致的测高偏差可利用测高仪内部校正模式补偿。

仪器偏差还有雷达天线相伴中心与卫星质量中心之间的偏离、测高仪电子线路中的传播延迟、雷达波束方向偏离垂直方向(天底误差),以及天线采集模式偏差等。

传播路径上的误差主要包括如下几种：

(1) 电离层折射误差。电离层位于高度 60 ~ 1000km 之间,测高卫星轨道高度都高于700km,电离层含有一定密度的带电等离子体,雷达微波脉冲信号经过电离层产生折射效应,导致信号传播延迟。其折射率与大气电子密度成正比,与信号频率平方成反比。电子密度取决于太阳及其他天体的辐射强度,也与季节和地理位置有关,其中太阳黑子活动影响最大。14GHz 频率的电磁波信号受到的电离层折射影响范围为 5 ~ 20cm。电离层改正可用双频微波仪测得,T/P 及其后续 JASON-1 卫星和 ENVISAT 卫星均采用了双频微波测高仪。通过比较,双频微波测高仪两波段(例如 Ku 波段和 C 波段)信号返回时间可准确估计电子总量(TEC),并由此确定测高改正值。TEC 也可由监测太阳的活跃性和描述太阳辐射对电离层影响的模型做出估计,还可由双频跟踪系统如 DORIS 或 PRARE 得出,并用于对单频测高仪的电离层

改正。

(2) 对流层影响。对流层是近地面约20km范围的大气层，占大气质量的90%以上，测高信号因对流层折射产生的影响为2～3m。使用适当的大气层折射模型进行改正可达到几厘米的精度，若卫星上安装了水汽辐射计测得信号路径上的水汽含量，可作更精密的改正，新一代测高卫星ENVISAT和JASON-1都已采取了这一措施。目前根据气象卫星观测的水汽场资料，用大气折射延迟改正的精度可达2m。

(3) 海况电磁偏差影响。这是信号的平均散射面与平均海面之间的系统偏差。通常海浪的波谷较“平坦”，对信号有较高的反射率，而波峰较“尖锐”，反射率低，使测高仪接收的回波功率大部分来自波谷，偏离雷达脉冲波迹区域平均海面，使 h_a 测量值偏大，即海面高 h 系统偏小，这种偏差称电磁偏差(EM偏差)。其量值与有效波高(SWH)大致成正比关系，即EM偏差约为SWH的0.02～0.07倍。有效波高定义为最大波高(波峰与波谷的距离)1/3处的平均值，用 $H_{1/3}=4\sigma$ 表示。设海面位移的方差为 σ^2，则通常取 $H_{1/3}=4\sigma$。电磁改正也有多参数模型，例如T/P卫星采用四参数模型，其中考虑了风速的影响。对于SWH = 10m的粗糙海面改正数可达70cm，对于SWH = 0.5m的平均海面改正数可达3.5m。

11.2.2.3 时变海面高的影响

确定理论上不随时间变化的平均海面，在测高数据的处理中，需将所有相对平均海面的时变部分消除，这个时变部分称为时变海面地形 ζ_t(参见图11.1)，主要包括潮汐作用引起海面高的周期性变化，与时间相关的非稳态海流，以及海面大气压变化产生的附加时变海面地形。潮汐是时变海面高的主要部分，卫星测高所观测到的海面潮汐变化为绝对的地心潮，其中包括海洋潮汐、固体潮和负荷潮影响。在几种潮汐现象中，海潮的量值最大。每一类潮汐现象的影响都有比较精密的计算模型，用于开阔海洋精度可达厘米级。但用于近岸海域，由于这里海潮的复杂性，改正的精度较低，需要发展局部近岸区域海潮模型校正全球海潮模型。稳态海流即全球大洋环流，流速稳定，由稳态海面地形(ζ_S)维持。有多种非稳态海流，流速随时间而变，并引起海面高的变化，包括中尺度涡(旋)、黑潮、赤道流、西部和东部边界流、湾流等，其影响一般难以精确模拟。例如中尺度涡(旋)，其生成的位置和持续时间(一般为几个月)都不确定，而且在时间平均中不能完全消除对确定平均海面高的影响，这方面目前还缺乏深入研究。海流是动力海洋学研究的主要问题，海洋学家根据流体力学原理和海洋现场观测数据试图给出描述各类海流的模型，但限于物理海洋观测数据目前还很不完善，一般局限于定性研究。卫星测高数据包含丰富的海流信息，对此已有不少研究成果，例如利用卫星测高数据研究墨西哥湾流。随着海洋观测技术和观测网站的发展，联合卫星测高数据，未来可望出现量化的精密非稳态海流模型提供给大地测量和海洋学应用。海面大气压的变化产生一种附加的时变海面地形，气压增大，海面降低，故称为逆气压效应，通常气压变化100Pa，海面高变化1cm。我们需要一种理想的不受气压变化影响的海面，设定一个“标准”海面大气，例如取全球海面大气压的平均值1013.25Pa，据此可导出逆气压改正模型。目前采用的公式为 $IB_{逆气压改正}=-9.948(p-1013.25)$(mm)，其中 p 为现场气压(以100Pa为单位)，可由海洋大气信息中心提供，或用海洋大气模型近似计算，气压变化引起全球海面形变的量级大约为10～50cm，而区域性效应只有几厘米。

时变海面高是多种海洋动力过程(现象)的综合响应，针对研究不同的海洋动力现象，需要从中提取相关的时变海面高的信号，而将其他不相关的时变信号分离，这些动力现象包括前

述的海潮、多种非稳态海流以及厄尔尼诺现象引起的海面高异常等。

11.2.3 平均海面高模型

平均海面高是指海面上一确定点在一定的时间尺度（如月、年、几年、十几年、上百年等）上其椭球高的时间平均值，其中排除了潮汐产生的周期性时变海面高的影响。理论上平均海面是一个有起伏变化的连续曲面，也可用一个球函数的级数展开来表达，但这种展开要求对陆地区域引入某些人为的约束条件，并有连续分布的平均海面高数据，结果是平均海面的一种数字意义上的解析模型。由于卫星测高技术的出现和发展，可提供覆盖全球海洋区域平均海面高的离散观测值，有很高的分辨率和精度，可求解相应分辨率（级数展开的最高阶）的解析模型，用平均海面球函数级数展开的系数集合表示。目前国际上已发布多种此类模型，常用于理论研究。实用上多采用具有一定分辨率的格网化平均海面高数值模型，分辨率由格网的尺度表示。建立格网数值模型的优点是不涉及建立的解析模型面临的严密数学处理问题和复杂的计算过程。

建立平均海面高模型是确定海洋大地水准面和分离海面地形的基础，其精确度和分辨率在很大程度上直接影响大地水准面确定的精度和分辨率（见11.3节）。自从卫星测高技术出现至今，人们首先致力于利用其海面测高观测数据建立精密可靠的平均海面高数值模型，常称为“测高平均海面模型”，20世纪90年代国际上一些著名研究机构先后推出多个模型，其中有代表性的是OSU MSS95，CLS—SHOM98.2和GFZ MSS95A。OSU MSS95是美国俄亥俄州立大学（OSU）联合GEOSAT、ERS—1和T/P数据求得的一个较高精度的平均海面高模型，分辨率为3.75′×3.75′（约7km×7km）；CLS—SHOM98.2是法国的卫星数据采集与定位部（CLS）同样联合GEOSAT、ERS—1和T/P数据确定的分辨率为3.75′×3.75′的一个高精度平均海面模型，采用数据的时间跨度略长于前者；GFZ MSS95A是德国地学研究中心（GFZ）建立的平均海面模型，采用的数据类似于前两个模型，分辨率为3.0′×3.0′。这些模型都已广泛应用于海洋学和海洋地球物理的研究中。我国大地测量研究人员也在20世纪90年代末和21世纪初进行了测高平均海面模型的研究（王海瑛，1999；姜卫平，2001；章传银，2000等），其中姜卫平等（2001）研制的模型WHU2000MSS，其分辨率为2′×2′，精度优于±5cm。该模型的研制采用了比前述三个国际模型更长的数据，主要包括了到2000年全部7年的T/P数据，还加入了ERS—2的大地测量任务（GM）的数据，代表了更长时间跨度的全球平均海面，虽然其精度与这三个国际模型相当，但有更高的分辨率。

建立测高平均海面模型（包括全球海洋或区域性海洋模型）的计算工作主要包括以下几步：

（1）测高观测数据的预处理。

（2）不同卫星测高任务参考椭球和参考框架的统一。

（3）重复测高轨迹的共线平差。

（4）不同测高轨迹的交叉点平差。

（5）离散测高点值的格网化。

以下仅对各步计算作简要介绍。

11.2.3.1 测高观测数据的预处理

对收集的原始测高观测数据文件按一定的编辑标准对数据进行编辑和筛选，删除各类不符合标准的无效数据。这种编辑标准通常采用数据发布机构在用户手册中给出的标准，但用

户也可根据现有不同测高任务多种不同编辑标准,作综合研究和修订确定自行采用的标准。进而对作了编辑处理的数据(文件)进行如 11.2.2 节所述各种误差影响的改正计算。同样,也可采用数据用户手册中推荐给出的相应误差改正模型,也可根据用户自己的研究试验对某些改正模型进行改进。有关测高观测数据预处理的技术细节,读者可参阅其他参考文献(如姜卫平等,2001;王海瑛,1999 等)。

11.2.3.2 不同卫星测高任务参考椭球和参考框架的统一

利用不同卫星测高任务的数据联合确定平均海面,需要将海面高数据归并到一个统一的参考椭球和参考框架,建立数据转换模型。就参考椭球而言,目前新版 GEOSAT,ERS—1 和 T/P 卫星测高数据都采用 WGS84 椭球,但椭球参数实际上仍有差别。例如,GEOSAT 和 T/P 卫星参考椭球长半径 $a=6378136.3\text{m}$,而 ERS 卫星的参考椭球则与 OSU91A1 重力位模型所采用的 GRS80 椭球一致,$a=6378137.0\text{m}$。椭球参数变化的转换公式为(陈俊勇等,1995):

$$\begin{cases} \mathrm{d}B = \dfrac{N}{(M+H)^2}\mathrm{e}^2\sin B\cos B\Delta a + \dfrac{M(2-\mathrm{e}^2\sin^2 B)}{(M+H)(1-f)}\sin B\cos B\Delta f \\ \mathrm{d}H = -\dfrac{N}{a}(1-\mathrm{e}^2\sin^2 B)\Delta a + \dfrac{M}{1-f}(1-\mathrm{e}^2\sin^2 B)\sin^2\Delta f \\ \mathrm{d}L = 0 \end{cases} \tag{11.13}$$

$$\begin{cases} B = B_0 + \mathrm{d}B \\ H = H_0 + \mathrm{d}H \\ L = L_0 \end{cases} \tag{11.14}$$

式中:N、M 分别为卯酉圈和子午圈曲率半径,Δa 为统一椭球长半轴与被转换椭球长半轴之差;Δf 为相应椭球扁率之差,(B_0,L_0,H_0) 和 (B,L,H) 分别为转换前后测高点的大地坐标。

处理参考框架不一致的转换是先确定一个标准参考框架,在这里它是一个测高卫星的精密轨道框架。例如,目前公认 T/P 卫星的定轨和测高精度最高,则选择 T/P 卫星的参考框架作为统一的“标准”框架,其中的引号表示是一种相对标准。其他非 T/P 卫星测高任务在同一测高观测点上与 T/P 测高数据之差可用四参数模型表示,即 Δx,Δy 和 Δz 及 C 分别为坐标系原点的三个偏移量和一个整体偏移量(Rapp et al.,1994),其中,整体偏移量 C 可理解为其他非 T/P 卫星的测高数据中含有的残余系统误差,诸如残余轨道误差、测高仪偏差和海洋时变(与 T/P 不同观测时刻之间的变化)等的综合影响。将非 T/P 框架的海面高(SSH_0)转换到统一框架(T/P 框架)的海面高 SSH 的关系式为:

$$\begin{aligned} \text{SSH}(\text{T/P 框架}) = {} & \text{SSH}_0(\text{非 T/P 框架}) + \Delta x\cos\varphi\cos\lambda \\ & + \Delta y\cos\varphi\sin\lambda + \Delta z\sin\varphi + C \end{aligned} \tag{11.15}$$

表 11.1 是目前采用的几种测高卫星的框架转换参数。

表 11.1　几种测高卫星的框架转换参数(单位:cm)

	Δx	Δy	Δz	C
ERS-1(35)	-2.38	3.40	3.31	-5.41
ERS-1(168)	-2.38	1.97	5.37	-6.15
GEOSAT	-0.31	8.96	4.74	-28.24

11.2.3.3 重复测高轨迹的共线平差和共线法

测高卫星在其运行期间通常设计实施两种轨道任务：一种是按一定的周期的精密重复任务（Exact Repeat Mission，缩写为 ERM），另一种是无重复轨道的大地测量任务（Geodetic Mission，缩写 GM）。ERM 的目的是对海面轨迹进行高重复度的精密海面高测定，所有的重复轨迹形成一个覆盖全球海洋的菱形格网，且格网的大小由赤道起向两极收敛（缩），类似全球经纬度格网的情况。其在赤道上的间距，因测高卫星不同而异，约在 70～300km 之间，重复周期长的间隔短。反之，间隔长。重复轨迹的时序测高数据，可反映海面高随时间的变化，用于研究各种动力海洋现象。另外，将多年重复轨迹测高数据按不同时间尺度去平均，可得到不同时间尺度的平均海面，其中基本上可消除各种不同周期的时变海面高对平均海面的影响。GM 轨道是一种无重复的漂移轨道，其任务执行期通常为 1～2 年，这种无重复的测高轨迹形成了一个覆盖全球海洋的高分辨率的格网，格网大小同样从赤道向两极收缩，其在赤道上的间距也因测高卫星任务不同而异，约在 5～20km 之间。GM 的目的是进行高分辨率的海面高测量，以期获得高分辨率的平均海面和海洋大地水准面的格网数值模型。由于没有重复轨迹，需要采取措施消除时变海面高对确定平均海面的影响。

重复轨道的设计要求卫星从一个初始轨道和初始位置出发开始运行，当卫星运行了一个确定的周期（天数）后，卫星又回到初始轨道和初始位置，在第二个周期又重复第一个周期的运动，由此形成覆盖全球的一系列重复轨迹。卫星相对于地球的运动可视为两种运动的合成，一种是卫星沿其轨道（面）的运动，另一种是轨道面已近于固定的倾角 i 绕地球自转轴 z 的运动，这是由于轨道升交点 Ω 的摄动（进动）和地球自转效应产生的，表现为卫星轨道的最高（低）纬度点以一定的速率绕 z 轴以半径 $\frac{\pi}{2}-i\left(\text{或 } i-\frac{\pi}{2}，\text{当 } i>\frac{\pi}{2}\right)$ 做圆周运动，图 11.2 是这两种运动的示意图。

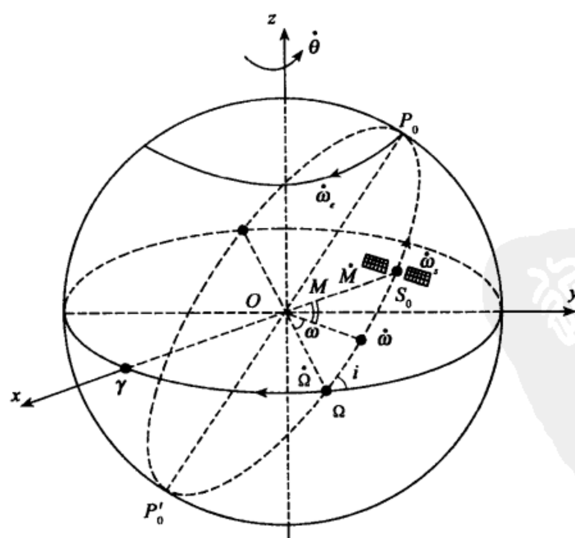


图 11.2 卫星相对地球的两种运动

在图 11.2 中，设 P_0 代表轨道面某时刻初始位置，也表示轨道面的最高纬度点，受摄动力作用升交点 Ω 在赤道上由东向西运动，即轨道面绕 z 轴进动。由于地球自转，轨道面表现为绕 z 轴相对于地球自东向西旋转，这两种旋转运动效应总的角速率为 $\dot{\omega}_e$。设 S_0 为同一初始时刻卫星在轨道上运行的相应初始位置，运动的角速率为 $\dot{\omega}_S$，这里指的都是平均角速率。假若经过 T_R 时间段（周期），P_0 和 S_0 都同时回到原来的初始位置，此期间 S_0 运动了 α 整圈，而 P_0 运动了 β 整圈，接下去的运动必然重复第一个 T_R 时段的运动，因而形成重复轨道。这个重复运动的条件可表示为

$$T_R = \alpha T_{S_0} = \beta T_{P_0} \tag{11.16}$$

其中：T_{S_0} 和 T_{P_0} 分别为 S_0 和 P_0 运动一圈所需的时间。上式也可写成

$$T_R = \alpha \frac{2\pi}{\dot{\omega}_{S_0}} = \beta \frac{2\pi}{\dot{\omega}_e} \tag{11.17}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\dot{\omega}_{S_0}}{\dot{\omega}_e} \tag{11.18}$$

这表明，我们进行轨道设计时使这两个速率之比为两个不可公约的整数比，理论上即可形成重复轨迹，其充要条件为（Colombo，1984；Schrama，1989）：

$$\frac{\dot{\omega} + \dot{M}}{\dot{\Omega} - \dot{\theta}} = \frac{\dot{\omega}_S}{\dot{\omega}_e} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{11.19}$$

其中：$\dot{\omega}$ 为近地点角距摄动；$\dot{M}$ 为平近点角变率；$\dot{\Omega}$ 为升交点赤经摄动；$\dot{\theta}$ 为格林尼治时角变率；T_R 是重复周期。

表 11.2 所列是各类测高卫星轨道的重复周期。

表 11.2 **各类测高卫星轨道重复周期（单位：d）**

卫星	GEOS-3	SEASAT	GEOSAT	ERS-1/2	T/P	GFO	FASON-1
T_R	23	3,17	3,17	3,35,168	10	3,17	10

从表 11.2 可看出，对一颗卫星可以分阶段设计 1 个，2 个或多个（一般不超过 3 个）重复周期，重复周期越长，则重复轨道越密，即分辨率越高。

共线平差的目的是求解共线轨迹的线性径向轨道误差参数，以期减小其影响，同时确定平均海面高及其时变部分。早期用于由测高数据建立的地球重力场模型，最初将测高平均海面高返测视为海洋大地水准面高，由于具有高采样率的测高数据中包含丰富的短波长信息，需根据重力场模型的最高阶（相应最高分辨率的波长），对原始测高数据作滤波处理，滤去重力场模型不定的短波成分，避免对模型的建立产生混频效应。滤波方法就是计算所谓的“正常点”，即剔除由于局部海底地形产生的短波成分。例如卫星通过某些海山、海沟和浅水区获得的数据应予剔除，其次是剔除误差超限的异常值，测高数据采样率大多为 1Hz（每秒一次），目前的处理方法是用大约每 10s 的观测数据作直线拟合，删除残差大于 3 倍拟合中误差的测高数据，在拟合直线中部由拟合直线计算平均海面高，即得正常点。如果拟合中误差超过 15cm，或者用于直线拟合的有效点只有或少于 7 个，则无正常点。

重复轨迹理论上应严格重合，或者说共线。但由于不同周期受力环境变化等各种因素的

影响，卫星重复轨迹不能精确共线，其间偏离可达 1 ~ 2km，但仍称共线轨迹。共线平差以正常点的海面高数据为观测数据，将所有共线轨迹分为若干组，各组分别平差，每组选择一个适当的参考历元，按相对时间（相对参考历元）相同的点内插出同组内每条共线轨迹的海面高、纬度和经度，再对共线轨迹进行平差，由此可解得所求点的海面高平差值及径向轨道误差参数。平差的观测方程为：

$$l_{ij} + V_{ij} = A(i,j)x_i + h_j \tag{11.20}$$

式中：l_{ij}为第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 条共线轨迹第 $j(j=1,2,\cdots,m)$ 个内插网点的测高海面高，$A(i,j)$ 为线性误差模型（见交叉点平差模型）系数的行向量，x_i 为第 i 条共线轨迹的径向轨道误差模型的待求参数向量，V_{ij} 包括观测噪声和海面高的时变量，h_j 为待求平均海面高。设第 i 条共线轨迹数据完整无丢失，则式(11.20)的矩阵形式为

$$l_i + V_i = A_i x_i + h \qquad (\text{观测权 } P_i) \tag{11.21}$$

式中：$l_i = (l_{i1}, l_{i2}, \cdots, l_{im})^{\mathrm{T}}$，$V_i = (V_{i1}, V_{i2}, \cdots, V_{im})^{\mathrm{T}}$，$A_i = [A(i,1), A(i,2), \cdots, A(i,m)]^{\mathrm{T}}$，$h = (h_1, h_2, \cdots, h_m)^{\mathrm{T}}$，$P_i = \mathrm{diag}(P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{im})$ 为对角阵。

每条共线轨迹一般都有数据丢失，为此，令 $m_i(m_i \leqslant m)$ 为有测值的网点数，并令

$$A'_i = E_i A_i, h' = E_i h, P'_i = E_i P_i E_i^{\mathrm{T}} \tag{11.22}$$

式中：E_i 是一个 $m \times m$ 阶矩阵，由同阶单位矩阵将第 i 条共线轨迹上丢失数据的网点所对应的对角元置零而得。由此，同一组 n 条共线轨迹总的观测方程可写成如下形式：

$$l + v = Ax + h \qquad (\text{有完整数据，观测数为 } P) \tag{11.23}$$

或

$$l + v = A'x + h' \qquad (\text{有数据丢失，观测数为 } P') \tag{11.24}$$

式中：$l = (l_1, l_2, \cdots, l_m)^{\mathrm{T}}$，$v = (v_1, v_2, \cdots, v_m)^{\mathrm{T}}$，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$，$h = (h_1, h_2, \cdots, h_m)^{\mathrm{T}}$，$h' = (h'_1, h'_2, \cdots, h'_m)^{\mathrm{T}}$；其中矩阵 A, A', P, P' 分别为 $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \cdots, A_n)^{\mathrm{T}}$，$A' = \mathrm{diag}(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n)^{\mathrm{T}}$，$P = \mathrm{diag}(P_1, P_2, \cdots, P_n)^{\mathrm{T}}$，$P' = \mathrm{diag}(P'_1, P'_2, \cdots, P'_n)^{\mathrm{T}}$。由观测方程(11.23)或(11.24)可组成法方程，并均可写成以下分块矩阵形式

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{11.25}$$

对观测方程(11.23)，$N_{11} = \mathrm{diag}(A_1^{\mathrm{T}} P_1 A_1, A_2^{\mathrm{T}} P_2 A_2, \cdots, A_n^{\mathrm{T}} P_n A_n)$，$N_{22} = (A_1^{\mathrm{T}} P_1, A_2^{\mathrm{T}} P_2, \cdots, A_n^{\mathrm{T}} P_n)^{\mathrm{T}}$，$N_{21} = N_{12}^{\mathrm{T}}$，$N_{22} = \sum_{i=1}^{n} E^{\mathrm{T}} P_i$，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$F_1 = (A_1^{\mathrm{T}} P_1 l_1, A_2^{\mathrm{T}} P_2 l_2, \cdots, A_n^{\mathrm{T}} P_n l_n)^{\mathrm{T}}$，$F_2 = \sum_{i=1}^{n} E^{\mathrm{T}} P_i l_i$，其中 E 为 $m \times m$ 阶单位阵。对观测方程(11.24)，其法方程完全类似，只需将以上各矩阵中的 A_i, P_i 和 h 分别换为 A'_i, P'_i 和 h'，E 则换成 E_i。

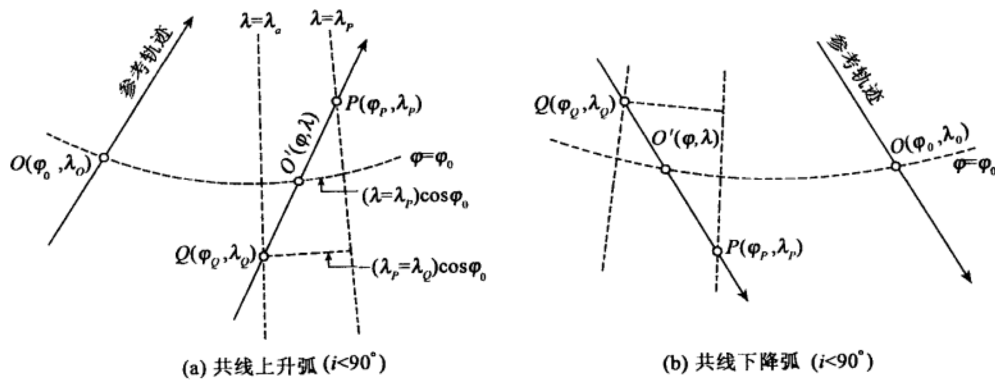
由总法方程(11.25)及其中各子块元素构成可以看出，若每个径向轨道误差模型包含 q 个待定参数，则在矩阵(N_{11}, N_{12})和矩阵(N_{21}, N_{22})之间存在 q 个相关的线性组合，即方程组(11.25)中有 q 个方程是不独立的，而 N_{11} 和 N_{22} 每个子阵都是满秩的，因而此共线平差系统的法方程的秩亏数为 q，其产生的原因是在共线轨迹的测高观测中缺少确定卫星径向位置的基准，此基准由径向轨道误差模型的 q 个已知参数组成。为求得问题的惟一解，需对共线平差施加约束条件，其形式详见以下关于交叉点平差秩亏问题的处理。

建立高分辨率的平均海面数值模型，若采用上述顾及径向轨道误差的共线平差法，需要进

行超大规模的平差计算，为此引入一种简单的计算重复轨迹时间平均轨迹的所谓“共线法”，其中不考虑径向轨道误差，主要消去时变海面高的影响，径向轨道误差则通过交叉点平差步骤削弱。共线法可看成是一种取时间均值得简单共线平差。

共线法的基本思想是首先在一组共线轨迹中选择一条数据完整的轨迹作为固定的参考轨迹，再参考轨迹弧段上过所有测点（已知测点纬度、经度和测高值）作纬圈（平行圈），在每一条纬圈上确定与所有共线迹的交点，这些交点一般不正好是相应共线迹上的测点，交点的经度和海面高则利用共线迹上与交点相邻的两实测点内插得到，求同一纬圈上所有共线迹测高值（包括实测值和内插值）的平均，即时间平均海面高，其对应位置则为共线迹在此纬圈上交点的平均位置。

共线法内插方法如图 11.3 所示。



(a) 共线上升弧 ($i<90^\circ$)　　(b) 共线下降弧 ($i<90^\circ$)

图 11.3　共线法内插方法图示（引自李建成等，2003）

在图 11.3 中，对升弧的情况，O 为参考轨迹上的一个测点，O'为另一共线轨迹弧段上与过 O 点的纬圈的交点，当 O'不是该共线轨迹上的测点时，其海面高利用与该点相邻的两测点 P,Q 的测高值按线性内插确定。O 点位置(φ_0,λ_0)已知，因此 $\varphi'_0=\varphi_0$，λ'_0 则需通过已知点 $P(\varphi_P,\lambda_P)$ 和 $Q(\varphi_Q,\lambda_Q)$ 作线性内插得到，设轨道倾角 $i<90^\circ$，则有

$$\lambda'_0 = \lambda = \lambda_P - K_a(\varphi_P - \varphi_0) \tag{11.26}$$

式中：K_a 为一次项系数（相当于斜率），因是“向后”内插，前加负号，其表达式为

$$K_a = \frac{(\lambda_P - \lambda_Q)\cos\varphi_Q}{(\varphi_P - \varphi_Q)\cos\varphi_0} \tag{11.27}$$

对于降弧，类似地有

$$\lambda'_0 = \lambda = \lambda_P - K_d(\varphi_0 - \varphi_P) \tag{11.28}$$

$$K_d = \frac{(\lambda_P - \lambda_Q)\cos\varphi_Q}{(\varphi_Q - \varphi_P)\cos\varphi_0} \tag{11.29}$$

对于轨道倾角 $i>90^\circ$的情况，同理可导出升弧和降弧的相应公式

$$\lambda = \lambda_P + K_a(\varphi_P - \varphi_0) \tag{11.30}$$

$$K_a = -\frac{(\lambda_P - \lambda_Q)\cos\varphi_Q}{(\varphi_P - \varphi_Q)\cos\varphi_0} \tag{11.31}$$

$$\lambda = \lambda_P + K_d(\varphi_0 - \varphi_P) \tag{11.32}$$

$$K_d = \frac{(\lambda_P - \lambda_Q)\cos\varphi_Q}{(\varphi_P - \varphi_Q)\cos\varphi_0} \tag{11.33}$$

当 O' 的位置 (φ,λ) 已定,则又可通过线性内插求得该点的海面高 $h_0' = h$:

$$h = h_Q + (h_P - h_Q)\frac{(\varphi_0 - \varphi_Q)}{(\varphi_P - \varphi_Q)} \tag{11.34}$$

共线法利用重复轨迹上同纬度点海面高的时间平均,可有效地消除周期短于所用共线轨迹时间跨度(即时序测高数据的相应时段长度)的时变海面高影响,例如海潮潮汐的影响。当然,其中还包括具有随机特性的时变量。所求得的平均海面可以认为至少在观测时间跨度(如几个月,几年或更长)内是稳态平均海面。

执行 GM 的测高轨迹是一种非共线的漂移轨迹,要消除测高数据中的时变成分(即时变动力海面地形)则比较困难,它产生于多种复杂的动力海洋现象,主要是各种不同空间尺度的海流,特别是区域性湾流(如墨西哥湾流)和中尺度涡,目前对其还难以精确描述。动力海面地形的季度平均变化和年度平均变化是由于亚热带和温带的暖(水)冷(水)循环以及赤道地区风场的变化引起的(Wyrtki,1975)。最大的季节性变化发生在亚热带环流的西部边界处。例如,世界大洋中最强的暖流之一的黑湖(Kuroshio)环流地区($\varphi = 30°$, $\lambda = 135°$ 附近)可达 20cm。这种时变海面高称海面异常(SLA)。利用对测高数据的时变分析,可建立 SLA 模型。美国 CSR 采用多年的 T/P 数据得到月和年的 SLA 模型,图 11.4 给出了该模型 1995 年 6 月(相当于 T/P 数据按重复周期(cycle)顺序编号的第 100cycle,每个 cycle 为 10 天,从 1992 年 10 月起算)的海面异常图,因此各种 GM 测高数据(如 GEOSAT/GM, ERS-1/168)可利用此类 SLA 模型作时变海面高的改正,用于削弱其影响。

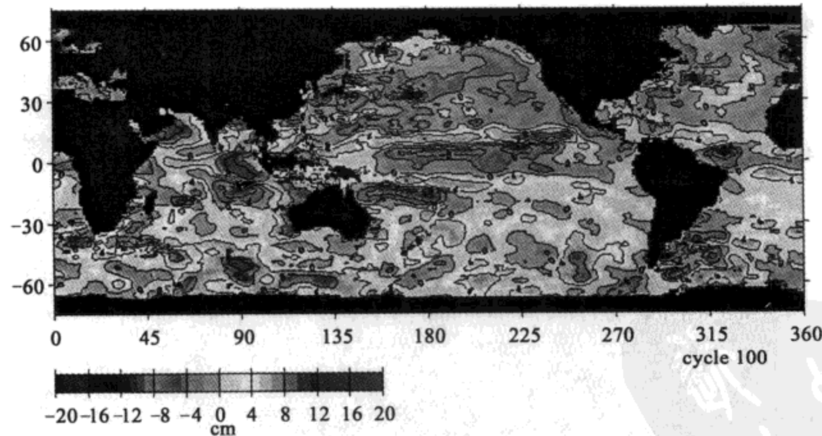


图 11.4 CSR SLA 模型 1995 年 6 月海面高异常图

11.2.3.4 不同测高轨迹的交叉点平差

卫星从南半球向北半球运行时在地面的投影轨迹称为升弧,从北半球向南半球运行的轨迹称为降弧。卫星绕地球运行经过一定的周期将在地面形成一个由升弧和降弧织成的菱形轨

迹网络(见图 11.5 和图 11.6),并覆盖由卫星倾角确定的对称于赤道的球带区域。通常将升弧和降弧相交的点称交叉点,即轨迹网络的结点。在交叉点上,用升弧和降弧的测高数据可分别算出两个海面高值。若没用任何误差影响,理论上这两个值应严格相等。实际上,测高过程和采用的计算模型存在多种误差源(见11.2.2节),这两个海面高必然出现不符值。大部分

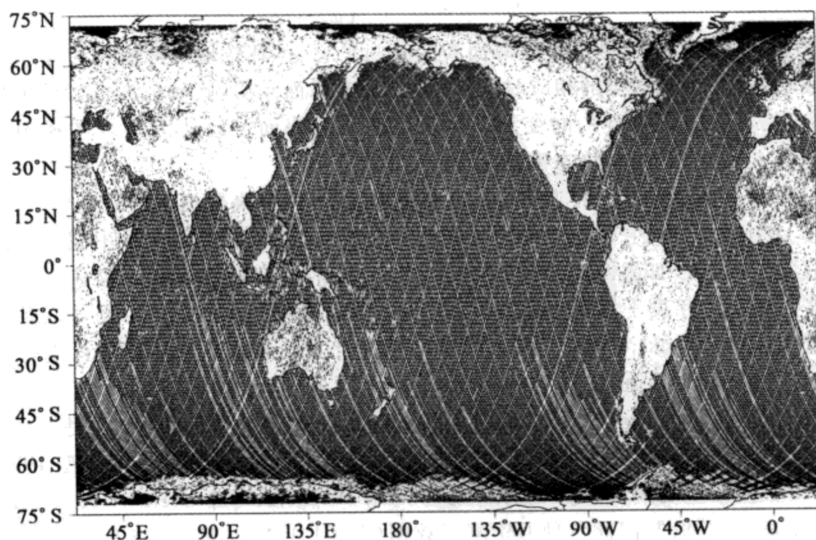


图 11.5 GEOSAT 卫星地面轨迹网络

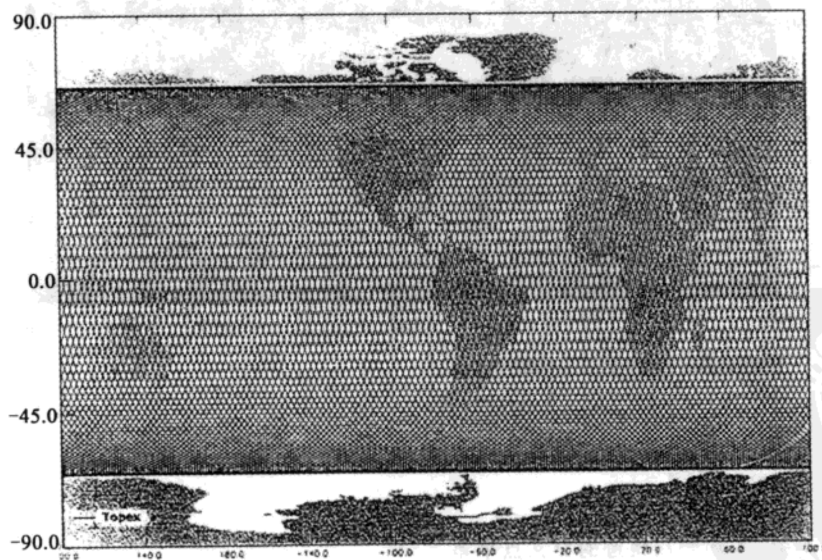


图 11.6 T/P 卫星地面轨迹网络

误差影响可以用模型对测高值进行改正，但其中的轨道径向误差没有改正模型，因为只有当用于定轨的力模型（特别是重力位模型），有了新的更精密的模型代替原用模型时才能改正或重新计算轨道。假定已对测高数据作了除径向轨道误差外的其他物理环境的改正（包括潮汐改正），那么交叉点上海面高的不符值主要反映径向轨道误差。

早期测高卫星定轨精度较低，径向轨道误差是数据处理中要考虑的主要误差。利用交叉点的测高闭合差对海面高观测值进行平差，是削弱径向轨道误差影响的基本方法，称交叉点平差，对此曾进行过大量研究。同时为构建平差模型，又对径向轨道误差的时域和空域特性作了深入理论研究（Colombo，1984；Wagner，1985；翟国君，1997），揭示了测高卫星径向轨道误差的长波特性及其显著的以每转一周（1cpr）为周期的谱特征，证明了径向轨道误差在空域可表示为两个部分：一部分是升弧和降弧共有的，且大小相等符号相同，这部分在交叉点平差中是不可估计的，或称是不可观测的；另一部分是升弧和降弧各有绝对值相等但符号相反的误差，只有这部分径向轨道误差在交叉点平差中是可估计的。这两部分在量级上相同，因此可估计部分一般不会超过总误差的50%，这是交叉点平差用于降低径向轨道误差影响的局限性之一。

设径向轨道误差可用以下线性模型模拟：

对于升弧
$$\hat{H} = H^{a}_{\text{obs}} + x^{a}_{0} + x^{a}_{1}\Delta t^{a} \tag{11.35}$$

对于降弧
$$\hat{H} = H^{d}_{\text{obs}} + x^{d}_{0} + x^{d}_{1}\Delta t^{d} \tag{11.36}$$

式中：$\Delta t = t - t_0$，t_0 为弧段起始观测时刻，$\hat{H}$ 为交叉点海面高的平差值（在11.2.1节中用 h 表示），H^{a}_{obs} 为海拔高观测值，上标 a 和 d 分别表示升弧和降弧，x_0 和 x_1 是待估径向轨道误差参数。将式（11.35）减式（11.36）得观测方程

$$l^{ij}_{k} = (H^{a}_{\text{obs}})^{i}_{k} - (H^{d}_{\text{obs}})^{j}_{k} = (x^{d}_{0})^{j} - (x^{a}_{0})^{i} + x^{d}_{1}(\Delta t^{d})^{j} - (x^{a}_{1})^{i}(\Delta t^{a})^{i} \tag{11.37}$$

式中：上标 i 为升弧编号；j 为降弧编号；下标 k 为交叉点编号。上式相应的误差方程的矩阵形式为

$$V = A\hat{X} - L \tag{11.38}$$

式中：A 为系数矩阵；L 为观测值向量（交叉点海面高不符值向量）；$\hat{X}$ 为未知误差参数向量，其最小二乘解为

$$\hat{X} = (A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}PL \tag{11.39}$$

式中：P 为观测值的权阵。

平差区域最好选择由两条升弧和两条降弧为边界的菱形区（见图11.7），分别交于菱形区的4个顶点 A、B、C 和 D，升弧编号为 $i(i=1,2,\cdots,q)$ 共 q 条；降弧编号为 $j(j=1,2,\cdots,s)$ 共 s 条。误差方程的组成，从升弧 $i=1$ 开始，每条降弧（$j=1,2,\cdots,s$）和这条升弧有一个交叉点，编号为 $k=1,2,\cdots,s$；$k=1$ 的交叉点即为点 A，$k=s$ 的交叉点即为点 B，对每一交叉点按式（11.37）列一个误差方程，共 s 个。对每一条弧，不论是升弧还是降弧，都只用两个参数表征其径向轨道误差，即一个偏差参数 $(x^{a}_{0})^{i}$ 或 $(x^{d}_{0})^{j}$，一个倾斜参数 $(x^{a}_{1})^{i}$ 或 $(x^{d}_{1})^{j}$，只和弧的升降及弧的编号对应，与交叉点的编号无关，观测值（常数项）与交叉点编号对应。完成第一条升弧上的交叉误差方程的组成，再依次进行升弧 $i=2$ 与每条降弧 $j=1,2,\cdots,s$ 交叉点误差方程的列立，依此类推，至最后一条升弧 $i=q$，列立与每条降弧 $j=1,2,\cdots,s$ 交叉点的误差方程，与 $j=1$ 的交叉点即点 C，与 $j=s$ 的交叉点即点 D。总共要处理 $q\times s$ 个交叉点，观测向量 L 的维数为 $n=q\times s$，矩阵 A 的阶数为 $n\times m$，$m=2(q+s)$ 为未知参数的个数，其排列规则为

$$
\begin{aligned}
X &= (x^a \mid x^d)^{\mathrm{T}} \\
&= (x_{01}^a, x_{11}^a; x_{02}^a, x_{12}^a; \cdots; x_{0q}^a, x_{1q}^a \mid x_{01}^d, x_{11}^d; x_{02}^d, x_{12}^d; \cdots; x_{0s}^d, x_{1s}^d)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
\tag{11.40}
$$

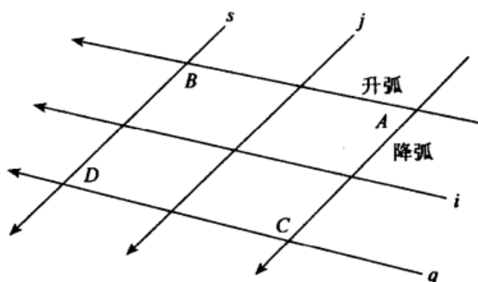


图 11.7　菱形交叉点平差

在图 11.7 中，我们可以假定所有的升弧被同一条降弧相截得出的 q 个交叉点上，升弧的观测时差 Δt^a 都近似相等，即 $\Delta t_{1j}^a = \Delta t_{2j}^a = \cdots = \Delta t_{qj}^a = \Delta t_j^a$，下标 $1,2,\cdots,q$ 为升弧序号，j 为降弧序号。同理，有 $\Delta t_{i1}^d = \Delta t_{i2}^d = \cdots = \Delta t_{is}^d = \Delta t_i^d$，下标 $1,2,\cdots,s$ 为降弧序号，i 为升弧序号。据此，系数矩阵 A 中的结构为

$$
\underset{n,m}{A} = [\underset{n,2q}{A^a} \mid \underset{n,2s}{A^d}]
\tag{11.41}
$$

式中：$A^a = \mathrm{diag}[A_1^a, A_2^a, \cdots, A_q^a]$，$A^d = \mathrm{diag}[A_1^d, A_2^d, \cdots, A_s^d]$，

$$
A_i^a = \begin{pmatrix} -1 & -\Delta t_1^a \\ -1 & -\Delta t_2^a \\ \vdots & \vdots \\ -1 & -\Delta t_s^a \end{pmatrix},\quad A_i^a = \begin{pmatrix} +1 & +\Delta t_1^d \\ +1 & +\Delta t_2^d \\ \vdots & \vdots \\ +1 & +\Delta t_s^d \end{pmatrix}
\tag{11.42}
$$

当观测数 $n = q \times s$ 大于未知数个数 $m = 2(q+s)$ 时，方程(11.37)是"超定的"，即有多余观测，一般情况下有惟一最小二乘解。但交叉点网络中没有固定的海面高作为基准，或者说没有一条升弧或者降弧其径向轨道误差参数是已知的，是一个自由网，如同自由水准网一样，存在基准问题。固定一个交叉点需要已知 4 个径向轨道误差参数，可以证明其法方程系数矩阵 $N = (A^{\mathrm{T}}PA)$ 秩亏数为 4。如果径向轨道误差用一个关于 Δt 的 n 次多项式模拟，则秩亏数为 $(n+1)^2$，因此交叉点平差是一个秩亏平差问题。对此有三种可行的处理方法：

(1) 固定弧段法。对两参数模型，固定两条平行弧段，选择网中认为精度最高的两条平行弧段；当有 n 个模型参数，则固定 n 条平行弧段。

(2) 秩亏网平差法。即在最小二乘准则 $V^{\mathrm{T}}PV = \min$ 和最小范数条件 $X^{\mathrm{T}}X = \min$（或者 $X^{\mathrm{T}}P_X X = \min$）下求解，其解为 $\hat{x} = (A^{\mathrm{T}}PA + P_X)^{-1}A^{\mathrm{T}}PL$，其中 P_X 为 x 的先验权阵。

(3) 拟合与平差同步法。在进行交叉点平差的同时，进行测高海平面与大地水准面之间的拟合。假定已知一个模型大地水准面和一个先验海面地形，取其波长大于平差区域尺度的模型值，将观测的海面高减去大地水准面高和海面地形，得残差海面高（见式(11.11)），它包含大地水准面和海面地形的短波部分以及径向轨道误差之和，在每一个交叉点上分别对升弧和降弧写出残差海面高观测方程，得

$$
\delta h_k^i = h_k^i - N_0 - \zeta_0 = x_0^i + x_1^i \Delta t_k^i + r_k^i
\tag{11.43}
$$

式中:δh_k^i 和 h_k^i 分别表示在第 k 个交叉点上第 i 条弧(升弧或者降弧)的残差海面高和海面高的观测值;N_0 和 ζ_0 分别为大地水准面和海面地形的长波模型值,在此起一种"松弛基准"的作用;x_0^i 和 x_1^i 为第 i 条弧的径向轨道误差参数;r_k^i 表示波长小于第 i 条弧段长度的大地水准面和海面地形。

联合(11.37)和(11.43)两类观测方程,按以下最小二乘准则求解径向轨道误差参数

$$V^{\mathrm{T}}PV + \gamma^{\mathrm{T}}W\gamma = \min \tag{11.44}$$

式中:W 是两曲面残差拟合所取的权,这种方法有惟一解。研究表明,适当选择相对权 W/P,有利于解算精度和可靠性的改进。

对前面介绍的共线平差秩亏问题,可完全类似地选择上述交叉点平差处理此问题的三种方法求惟一解。

对于测高观测值的定权问题,我们假定每单一观测是等精度的,理论上可设定 P 为单位矩阵。另一方面,由于卫星测高地面轨迹网格的尺度随纬度的升高而快速减小,网格向两极收敛,高纬度区测点密,低纬度测点稀,分布不匀,当取 P 为单位阵,则整个权重偏向于高纬度地区,平差结果将强化高纬度地区海面高,弱化低纬度地区海面高,是一个空间分辨率不均匀的格网数据平差问题。等权观测处理的结果将造成平均海面平差结果所含频谱成分空间结构的歪曲和精度分布的不匀。测点密度是纬度的函数,当取某一标准纬度 φ_0 处测点的观测权为 p_0,相应的测点密度为 n_0,则以下的定权准则可能是比较合理的,即要求

$$np = n_0 p_0 \text{ 或 } p = \frac{n_0}{n}p_0 \tag{11.45}$$

式中:n 为纬度 φ 处的测点密度;p 为该纬度处的观测权。

若令 $\varphi_0 = 0°$,$p_0 = 1$,则可导出(翟国君,1997)

$$p = \frac{n_0}{n}p_0 = \frac{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 i}}{\sin i} \tag{11.46}$$

式中:i 为卫星轨道面的倾角。上式适用于非交叉点的定权,交叉点分布对称于赤道,但因测高卫星实际分布有别,而定权准则不变,只是 n_0/n 不同。以 T/P 卫星为例,交叉点可按下式定权

$$p = \frac{n_0}{n}p_0 = \frac{N_2\cos\varphi}{N_\varphi\cos 2°} \tag{11.47}$$

式中:N_2 为纬度 $\varphi = 2°$时的密度,N_φ 为任意纬度(φ)上的测点密度。

为组成交叉点平差的观测数据,平差前需计算交叉点的位置,并分别利用升弧和降弧测点,实测测高观测值内插交叉点的测高值。计算交叉点位置的方法有按轨道理论的全球解析算法和按轨道拟合的局域解法,对区域交叉点平差以局域解法为宜。在同一地区,一条升弧段与一条降弧段可形成一个交叉点,也可不形成交叉点。当 $i < 90°$时,该类弧段称为顺行轨道(与地球自转方向一致),当 $180° > i > 90°$时,则称为逆行轨道(与地球自转方向相反)。对每一对逆行轨道是否可能形成交叉点可按以下两个条件进行检查:

条件一:升弧段第一点的经度应大于降弧段最后一点的经度。

条件二:升弧段最后一点的经度应小于降弧段第一点的经度。

对于顺行轨道,上面两条件中的"大于"和"小于"则相反。这两个条件是交叉点存在的必要条件,但非充分条件,这时要作弧段的二次项拟合来确定,首先在可能形成交叉点的附近选择若干实测点,其点位纬度 φ 和经度 λ 已知,因此可列出两个"观测"方程

$$\begin{cases} \varphi_i = A_a\lambda_i^2 + B_a\lambda_i + C_a \\ \varphi_j = A_d\lambda_j^2 + B_d\lambda_j + C_d \end{cases} \tag{11.48}$$

式中:A、B、C 为待求二次项系数和常数项作为未知参数,应用最小二乘法,可分别解得升弧和降弧段相应未知参数。之后再将 φ 和 λ 作为未知数,求解联立二次方程(11.48),由此确定交叉点得未知(φ,λ)。

联合多类卫星测高数据确定平均海面高,为提高不同类型测高数据的径向轨道精度,需作多种测高数据的联合交差点平差,它包括同一类卫星轨道的“自交叉”和不同类型卫星轨道的“互交叉”。在前述统一参考框架的处理中选择 T/P 轨道为“标准”轨道。同样,在联合交叉点平差中则将 T/P 轨道全部固定,并认为交叉点的不符值包含沿轨道方向的残余轨道误差、海洋时变和各种物理改正的残余误差。研究试验表明(Yi,1995),联合交叉点平差也以 2 参数截距—斜率式直线方程(即式(11.37))拟合误差模型为好。在前面提到的平均海面模型 WHU2000MSS 的研制中采用了一种近似于全组合式的联合交叉平差方案(姜卫平等,2001),在固定 T/P 弧的原则下,即采用处理交叉点平差秩亏问题的前述第一种方法,这一方案包括 9 种组合:ERS-2 ~ GEOSAT/ERM, ERS-2 ~ ERS-2, ERS-2 ~ ERS-1/168, ERS-2 ~ T/P, ERS-1 ~ GEOSAT/ERM, ERS-1 ~ ERS-1, ERS-1 ~ T/P, GEOSAT/ERM ~ GEOSAT/ERM, GEOSAT/ERM ~ T/P。这种交叉点联合平差方案进一步增强了联合多种卫星测高数据的统一性(如参考框架的统一)和协调性(如均衡降低各类数据中的系统误差)。

11.2.3.5 离散测高点值的格网化

经过以上四步处理可获得整个计算区域各类测高卫星轨迹上的离散点平均海面高,最后一步对离散点值进行格网化计算,完成平均海面高格网数字模型的建立。

对离散点的格网化,首先是考虑格网间隔的选取。卫星测高的观测采样不是空域上的均匀等间隔采样,而是分布在由升弧和降弧组成的轨迹网络上,轨迹上的观测点值密集,网络空格处无测点,同时不同类测高轨迹网络疏密不一。但可估计整个计算区的测点平均密度,再根据尼奎斯特(Nyquist)采样定理确定一个合理的模型格网间距。同时还要考虑测点值的精度,使精度和分辨率达到一定程度的协调,使相应波段平均海面高的信噪比达到足够的水平,可通过对计算区域平均海面高离散数据集作频谱分析得到各波段信号强度的谱估计,以及相应的精度分析确定信噪比,但平均海面高格网数值模型的主要质量指标还是模型格网结点平均海面高的精度,它将由以下采用的格网化方法和过程提供。

格网化拟合内插算法很多,实际应用中应针对不同情况,综合考虑数据的密度、分布及精度等因素,选取适当的算法,使拟合内插的格网结点值有足够的精度和可靠性。以下介绍格网化拟合内插的最小二乘配置法,这种方法适于局部区域的格网化,比较常用。

最小二乘配置法处理的是具有零均值的随机变量,因此,一般都要选定一个先验模型,从观测值中先移去对应的模型值,将所得残差视为上述随机变量,再由最小二乘配置法求解残差的最优统计估计,并加到相应点的模型值上,求得平均海面高的最优估值,称为移去—恢复法。设先验模型的平均海面为 $h_M = N_M + \varsigma_M$,其中 N_M 和ς_M 分别为模型大地水准面高和海面地形,例如采用由地球位模型 EGM96 确定的模型大地水准面以及某一已知海面地形模型(例如 POCM - 4B 或 EGM96SST),由此可计算所有测高数据点的残差平均海面高

$$\delta h = h - h_M \tag{11.49}$$

式中:h 为平均海面测高观测值,视为零均值随机变量,需首先确定其协方差函数,由于测高数

据密度很大，平均海面的最小二乘配置解对协方差函数的敏感度不高，可用一简单方法确定。如利用 Forsberg(1987)编制的 GEOGRID 格网化软件采用的模型，假设协方差函数是一个二阶 Markov 过程的一维函数

$$\mathrm{cov}(d) = C_0\left(1 + \frac{d}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{d}{2}} \tag{11.50}$$

式中：d 是两点之间的距离；C_0 是局部协方差参数，即该随机变量（场）的自协方差（$d=0$），可用计算区域所有残差 δh 的方差确定；设 ξ 为相关长度参数，则 $\alpha = 0.595\xi$。ξ 可采用全球平均海面高相关长度 $\xi = 70\mathrm{km}$（Basic et al.，1992），也可由计算区域沿测高轨迹的点值 δh 按距离变量 $d_i(i=1,2,\cdots)$ 分别计算每一距离值 d_i 的协方差均值 $\mathrm{cov}(d_i)$，设其采用值个数为 n，则

$$\cos(d_i) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}[h(x_j)\cdot h(x_k)]_l \tag{11.51}$$

式中：x_j, x_k 为位置向量；$d_i = |x_k - x_j|(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots;k=1,2,\cdots)$。由函数 $\mathrm{cov}(d)$ 的采用值 $\mathrm{cov}(d_i)$，可由式(11.50)按最小二乘法进行拟合。若 α 取定值 $0.595\xi = 0.595\times 70\mathrm{km} = 41.65\mathrm{km}$，则是以 C_0 作待定参数的线性拟合；若 C_0 和 α 均作为待定参数，则为非线性拟合。C_0 和 α 确定后，由式(11.50))可计算距离为 d 的任意两点之间的协方差，并组成协方差矩阵 $C_{\delta h\cdot\delta h}$，则格网点 j 的残差平均海面高 $\delta\hat{h}_j$ 的最小二乘配置解为

$$\delta\hat{h}_j = C_{\delta h_j\cdot\delta h}(C_{\delta h\cdot\delta h} + D)^{-1}\delta h \ (j = 1,2,\cdots,m) \tag{11.52}$$

式中：j 为格网结点号；m 为待求推估残差 $\delta\hat{h}_j$ 总数；$\delta h = (\delta h_1, \delta h_2, \cdots, \delta h_S)^{\mathrm{T}}$ 为观测的残差海面高向量；下标 s 为测点总数；D 是 δh 的误差方差 - 协方差矩阵（对角阵）；$C_{\delta h_j\cdot\delta h}$ 是待推估内插格网点 j 的 δh_j 与 δh 之间的协方差向量。

最后恢复移去的模型值，得内插格网点平均海面高的最小二乘配置解 $\hat{h}$：

$$\hat{h} = \hat{h}_M + \delta\hat{h} \tag{11.53}$$

该方法的主要困难在于由观测数据确定一个经验协方差函数 $\mathrm{cov}(d)$，若确定了参数（C_0，ξ），可在一个适当的拟合半径 $R > \xi$ 范围内应用式(11.52)进行格网点的插值，此时向量 δh 要有足够的长度，一般要求其维数 $A = 10 \sim 20$。也可在整个计算区应用式(11.52)，但此时矩阵（$C_{\delta h\cdot\delta h} + D$）可能阶数过高难以求逆。在一个拟合半径范围内求配置解，由于未能应用全部观测数据，理论上不严格，但计算工作量小；全区域配置，可求得严格解，但计算工作量大，可考虑采用一种快速谱算法（李建成等，2003）。

§11.3 海洋重力场的确定

11.3.1 测高海洋大地水准面和重力场研究的进展

在卫星重力探测技术（SLR，SRA）出现以前，由于海洋重力测量资料的缺乏，对海洋重力场的研究和认识近于空白。20 世纪 60 年代以来，随着精密海洋重力仪的发展，一些沿海发达国家出于海洋资源开发和军事目的的需要，在其周边近岸海域开展了船载重力测量或海底重力测量。由于投入大，施测周期长，因而所测范围有限，但可以联合陆地重力数据确定一个国家包括海域在内的区域性大地水准面。

SRA 技术可精密测定全球海洋平均海面的大地高，简称测高平均海面高。若将平均海面

看做大地水准面，则意味着该技术可“直接”测定海洋大地水准面，考虑到海面地形，其测定精度可达米级。若有一个海面地形模型（海洋学家由实测物理海洋数据（海水的平均温度、盐度和含氧量等，或多年的平均海流）基于海洋学方法提供的动力海面地形模型，例如1982年Levitus模型）可供应用，且同样具有厘米级精度，则将测高平均海面高减去对应点海面地形模型值，即得消去海面地形影响的海洋大地水准面高。这是应用测高数据间接确定海洋大地水准面最简易的方法。然而目前用纯海洋学方法和数据建立动力海面地形，事实上很难达到优于分米级的精度，主要原因在于不可能在海盆尺度上采集到具有相应空间分辨率的物理海洋实测数据，实际采用的数据比较粗略且不完善，因而限制了此类海洋模型的精度。确定海面地形的问题，一度是应用SRA技术确定海洋大地水准面的一个难题。在分米级精度要求上，早期曾采用过所谓“整体解法”，即在测高观测方程中将海面地形用球谐展开级数表示，同时求解位系数改正和海面地形球谐展开系数。目前通常是直接采用现有的认为可靠性较高的海洋学模型，由测高平均海面确定大地水准面，或是在测高数据处理中用某种近似方法削弱海面地形对确定大地水准面的影响。在厘米级精度要求上，消除海面地形对确定大地水准面的影响，还是一个待研究探讨的问题。近20多年来，在多代卫星测高计划的支持下，海洋重力场的确定得到迅速发展，取得了瞩目的成果。

20世纪80年代利用SEASAT和GEOSAT数据确定海洋大地水准面，略去了海面地形影响，精度为米级或亚米级，由逆Stokes公式反算的重力异常，50km分辨率的格网平均值精度达到$3\times10^{-5}m/s^2$；90年代初低阶重力位模型有了新发展，先后出现了3 GEM-T_3和JGM3（70阶）等，测高卫星定轨采用了准确度更高的重力位模型，定轨精度和测高精度都有了大幅度提高，达到或优于分米级水平，在大地水准面的确定中开始考虑海面地形的影响，采用Levitus海面地形模型，或采用整体解法消除海面地形影响，海洋测高大地水准面的精度由此提高到分米级水平，推动了全球高阶（180和360阶次）位模型的发展。其中一度广泛应用的OSU 91（360阶次）就是美国俄亥俄州立大学（OSU）联合当时的海洋测高数据、纯卫星低阶位模型及地面重力数据研制的全球位模型，用于计算海洋大地水准面的精度达到了分米级水平，其中对海面地形的处理采用了“整体解法”。目前T/P、Jason-1、ERS-2测高卫星及具有测高任务的ENVISAT卫星在星载GPS、SLR和DORIS等多种精密定轨技术以及最新全球重力场模型的支持下，测高精度已达到厘米级、联合已作轨道改进的GEOSAT/（ERM、GM）数据以及ERS-1/（GM）数据，分辨率可优于5km（在开阔海洋），因此联合应用多年多代卫星积累的大量测高数据，以及不断改进全球海面地形模型，使由此确定的海洋大地水准面优于分米级并接近厘米级水平。

应用SRA数据确定海洋大地水准面及其他海洋重力场参数，解算方法大致可分为统计方法和解析方法两大类。前者包括整体求解法和最小二乘配置法，还有所谓“共线迹波数相关滤波法”（kim，1996）等。后者主要包括垂线偏差反演法和Stokes公式、Vening-Meinesz公式求逆法。整体解法初步实现了同时确定海洋大地水准面和海面地形的设想，优于简单略去海面地形的处理方法，但其本身尚有一些理论上的缺陷。例如，海面地形球谐展开的一阶项，lcpr频率（卫星每转一圈为一周）径向轨道误差的正弦项以及地心漂移误差的正弦项之间存在接近100%的相关性（Denker et al.，1990），还有海面地形球谐展开的陆地部分的处理和地转流的约束问题有待解决。由于这些原因，这一方法至今未能得到广泛应用。最小二乘配置法由于具有能容纳多种类观测数据的灵活性，求解的数值稳定性好，结果“平滑”。早期的做法是将平均海面高直接作为大地水准面高用配置法求解海洋测高重力异常，后期将平均海面高作

了海面地形改正，将陆地重力异常和海洋测高重力异常联合，用配置法求解陆海统一的大地水准面。这一方法由于确定协方差函数和相应协方差矩阵计算工作量大，一般只适用于局部小范围(例如，地中海，中国南海)或开阔海区的计算，而近岸海域协方差函数一般难以准确确定，这一方法尚未得到很有效的应用。垂线偏差反演法，有时又称 Sandwell 方法(Sandwell, 1984, 1992)，近年来得到重视和比较广泛的应用，即由测高剖面梯度数据计算海洋重力垂线偏差，作为"观测值"，再由逆 Vening-Meinesz 公式反解重力异常，或用 Molodensky 公式由垂线偏差直接反解大地水准面高。Sandwell 最初是利用扰动位的 Laplace 方程导出关于重力异常与垂线偏差的一阶偏微分方程，再利用导函数的 Fourier 变换求解重力异常，此法略去了重力异常与扰动重力的差别，是一种近似解法。Haxby et al. (1983)导出的 Vening-Meinesz 公式在频域的反演公式，Molodensky 在 1962 年给出的 Vening-Meinesz 的空域反演公式，是两类比较严密的反演公式。测高垂线偏差之所以受到重视，是因为此类型数据可以削弱多种系统误差(Hwang, 1997)。例如，测高垂线偏差由测高观测值的一次差分得出，可以消除与地理位置相关的长波径向轨道误差，以及长波海面地形等类似的系统误差。垂线偏差含有丰富的重力场高频成分，对恢复高分辨率海洋重力场很有利，所涉及的积分公式均可化为卷积形式，应用快速 Fourier 变换(FFT)技术作高效数值解。所以由测高垂线偏差确定海洋重力场的解析法，是目前确定海洋(测高)重力场参数有良好发展和应用前景的方法，本章仅对此法作较详细的介绍。对统计方法有兴趣的读者可参阅文献(李建成等, 2003)有关章节或其他相关文献。

11.3.2 测高垂线偏差及其反演法

考虑一条测高海面轨迹，沿轨测高观测值为海面高(SSH)，经过海洋物理环境和仪器误差的改正，又经过对重复或共线轨迹的共线分析，可获得在足够长的时间尺度(例如几年或十几年)上 SSH 的时间平均值，由此得到一个近于静态的测高剖面。沿轨密集的 SSH 数据，包含了高分辨率的平均海面梯度(SSG)信息。设平均海面高为 h，则沿轨海面梯度为$\partial h/\partial s$，其中 s 为沿轨距离。海面高是大地水准面高 N 和海面地形 ζ 之和，即 $h = N + \zeta$，在一个局部海域(例如几千平方公里)内，海面相对于大地水准面的起伏 ζ 可以认为近似于线性变化，即

$$\zeta = \zeta_0 + c \cdot s \tag{11.54}$$

式中：ζ_0 为一常数偏差；c 是表示海面沿轨方向倾斜的常系数。则海面梯度$\partial h/\partial s$ 和大地水准面梯度$\partial N/\partial s$ 有以下关系

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial N}{\partial s} + c \tag{11.55}$$

其中：$\partial N/\partial s$ 即沿轨方向上垂线偏差的负值。在参考椭球面局部切平面直角坐标系(x, y)中，垂线偏差在子午圈和卯酉圈方向的分量(ξ, η)分别为：

$$\xi = -\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{R}\frac{\partial N}{\partial \varphi} \tag{11.56}$$

$$\eta = -\frac{\partial N}{\partial y} = -\frac{1}{R\cos\varphi}\frac{\partial N}{\partial \alpha} \tag{11.57}$$

式中：x 轴指向北，y 轴指向东；φ 和 λ 分别为纬度和经度；R 为地球平均半径。

设测高轨迹的方位角为 α，用 u^α 表示该方向上的垂线偏差，则有

$$u^\alpha = -\frac{\partial N}{\partial s} = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha \tag{11.58}$$

对于海面，可类似地写出

$$\xi_{ss} = -\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{R}\frac{\partial h}{\partial \varphi} \tag{11.59}$$

$$\eta_{ss} = -\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{1}{R\cos\varphi}\frac{\partial h}{\partial \lambda} \tag{11.60}$$

$$u_{ss}^{\alpha} = -\frac{\partial h}{\partial s} = \xi_{ss}\cos\alpha + \eta_{ss}\sin\alpha \tag{11.61}$$

式中：下标“ss”表示相应于海面的量；u_{ss}^{α}为沿轨方向海面梯度的负值；ξ_{ss}和η_{ss}同样分别是海面倾斜沿子午圈和卯酉圈方向上的分量。于是有

$$u^{\alpha} = u_{ss}^{\alpha} + c \tag{11.62}$$

设大地水准面法线（垂线）相对于椭球面法线的倾角为u（即总垂线偏差），倾斜方向的方位角为θ；海面法线相对椭球面法线的倾角为u_{ss}，倾斜方向的方位角为θ_{ss}。利用沿轨海面高数据，采用数值求导（微分）法，按式（11.59）和（11.60）可计算ξ_{ss}和η_{ss}，可由下式计算u_{ss}和θ_{ss}：

$$u_{ss} = \sqrt{\xi_{ss}^2 + \eta_{ss}^2} \tag{11.63}$$

$$\tan\theta_{ss} = \eta_{ss}/\xi_{ss} \tag{11.64}$$

又设$u = u_{ss} + \Delta u, \theta = \theta_{ss} + \Delta\theta$，则

$$\xi = u\cos\theta = (u_{ss} + \Delta u)\cos(\theta_{ss} + \Delta\theta)$$

$$\eta = u\sin\theta = (u_{ss} + \Delta u)\sin(\theta_{ss} + \Delta\theta)$$

展开以上两式，得

$$\begin{aligned}\xi = {} & u_{ss}\cos\theta_{ss}\cos\Delta\theta - u_{ss}\sin\theta_{ss}\sin\Delta\theta + \Delta u\cos\theta_{ss}\cos\Delta\theta \\ & - \Delta u\sin\theta_{ss}\sin\Delta\theta\end{aligned} \tag{11.65}$$

$$\begin{aligned}\eta = {} & u_{ss}\sin\theta_{ss}\cos\Delta\theta + u_{ss}\cos\theta_{ss}\sin\Delta\theta + \Delta u\sin\theta_{ss}\cos\Delta\theta \\ & + \Delta u\cos\theta_{ss}\sin\Delta\theta\end{aligned} \tag{11.66}$$

类似地，有

$$\xi_{ss} = u_{ss}\cos\theta_{ss} \tag{11.67}$$

$$\eta_{ss} = u_{ss}\sin\theta_{ss} \tag{11.68}$$

因$\Delta\theta$为微小角，可令$\cos\Delta\theta \approx 1, \sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$。令

$$\Delta\xi = \Delta u\cos\theta_{ss} \tag{11.69}$$

$$\Delta\eta = \Delta u\sin\theta_{ss} \tag{11.70}$$

略去高阶微小量$\xi \cdot \Delta\theta, \eta \cdot \Delta\theta, \Delta\xi \cdot \Delta\theta$和$\Delta\eta \cdot \Delta\theta$，则式（11.65）和（11.66）可表示为

$$\xi = \xi_{ss} + \Delta\xi \tag{11.71}$$

$$\eta = \eta_{ss} + \Delta\eta \tag{11.72}$$

由于在式（11.54）中设定c为常数，则Δu和θ_{ss}均可视为常数，故$\Delta\xi$和$\Delta\eta$亦为常数。以上两式和式（11.62）是一致的，$\Delta\xi$和$\Delta\eta$就是用ξ_{ss}和η_{ss}分别代替垂线偏差分量ξ和η所产生的误差。

由测高观测值（SSH）导出的海面梯度（SSG）作为一类测高间接观测量用以确定海洋重力场。许多研究者的实际应用表明，这种方法优于直接用 SSH 计算大地水准面和重力异常，因此对 SSG 所含系统误差的分析也开始得到重视。例如，Hwang（1996）对此作了比较详细的研究，下面介绍其主要研究结论。

作者研究了 5 种误差源，包括：测高仪仪器误差对 SSG 的影响，卫星定轨地面参考框架偏

离地心框架及参考椭球元素差异产生的系统误差，径向轨道误差的影响，海潮模型误差的影响，海面地形的影响。在分析中采用了 1～1.5 年四类测高卫星观测数据，初步结论是：

（1）影响显著且应考虑进行改正的主要是 SEASAT，GEOSAT/GM 和 ERS-1/GM 任务的 SSH 观测数据，其中仪器误差的系统性残差量值偏大，对 SSG 的影响平均为 ±5.3μrad(1.1″)，最大为 ±2.2″，是主要影响。

（2）卫星参考框架与地心框架的平移量影响，仅需对 SEASAT 沿轨 SSG 考虑加以影响的改正，其在子午圈方向的最大影响为 0.129μrad(0.027″)，但比其仪器误差影响 10.5μrad (2.2″)约小两个数量级，其中 Euler 角的影响尚需作出估计。

（3）每转 1 周的径向轨道误差，同样仅需考虑对 SEASAT 和 GOESAT/GM 数据作改正，其平均影响分别为 0.115μrad(0.024″)和 0.09μrad(0.018″)，对其余卫星的影响量级较之于仪器误差可忽略不计。

由于计算 SSG 的一次差分可自动消去局部地区径向轨道误差中的常偏差，不需作仅含常偏差参数的交叉总平差；海潮的影响理论上可通过对有足够长时间跨度的重复数据取平均消除，对无重复周期任务的卫星，在开阔海洋，全球潮汐模型改正已有很高的精度，模型误差很小，但在近岸浅海区域，研究表明，模型误差可远大于仪器误差，对 SSG 的计算将产生显著影响，不能用全球海潮模型作潮汐改正，要联合验潮站记录建立局部潮汐模型；稳态海面地形长波分量占优，SSH 的一次差分可基本上消去其影响，小于 1°波长的短波影响微弱，可忽略不计，但在某些海洋动力现象产生的强海流地区，时变 SST 量值大的和时变率偏小的不能对重复数据取平均消除影响，以及对无重复周期的卫星数据，需要建立时变海面地形模型改正其影响。

计算测高剖面垂线偏差的基本原理，是利用测高记录中的位置和时间信息，用测高观测值的一次差分计算测高剖面的数值导数，并在一个交叉点上联合升弧和降弧差分方程求解垂线偏差。

大地水准面沿升弧和降弧对时间 t 的导数分别为

$$\dot{N}_a = \frac{\partial N_a}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial \varphi}\dot{\varphi}_a + \frac{\partial N}{\partial \lambda}\dot{\lambda}_a \tag{11.73}$$

$$\dot{N}_d = \frac{\partial N_d}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial \varphi}\dot{\varphi}_d + \frac{\partial N}{\partial \lambda}\dot{\lambda}_d \tag{11.74}$$

式中：下标“a”和“d”分别表示升弧和降弧，$\dot{N}$ 表示沿轨点大地水准面高对时间的导数，$\dot{\varphi}$ 和 $\dot{\lambda}$ 分别为卫星星下点沿轨迹运动在纬度（子午圈方向）和经度（平行圈方向）方向上的速率，在交叉点上有以下近似关系（精度优于 1%）：

$$\dot{\varphi}_a \approx -\dot{\varphi}_d \tag{11.75}$$

$$\dot{\lambda}_a \approx \dot{\lambda}_d \tag{11.76}$$

顾及式(11.73)～(11.76)，可联合解得

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi} = \frac{1}{2|\dot{\varphi}|}(\dot{N}_a - \dot{N}_d) \tag{11.77}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\dot{\lambda}}(\dot{N}_a + \dot{N}_d) \tag{11.78}$$

式中：$\dot{\varphi}$，$\dot{\lambda}$，$\dot{N}_a$，$\dot{N}_d$ 均可由测高剖面测点记录的时间和位置信息应用数值求导法得到。由以上

两式分别计算$\frac{\partial N}{\partial \varphi}$和$\frac{\partial N}{\partial \lambda}$分量，于是可按式(11.56)和(11.57)计算垂线偏差子午圈方向分量ξ和卯酉圈方向分量η。

注意近极轨道，如 GEOSAT 星下点最高纬度为 ±72°，ERS-1 为 ±81.5°，卫星在近极地区速率$\dot{\lambda}$很小，且$\dot{N}_a \approx -\dot{N}_d$。在此情况下，由式(11.77)和(11.78)可以看出，ξ可以可靠地确定；对于 SEASAT、GEOSAT 和 ERS 卫星，η则难以准确确定(因为卫星倾角$i \approx 90°$)。

考虑到多种卫星轨迹混和交叉，有可能出现多对升、降弧近似地交叉于同一点，例如有两对升、降弧交叉于同一点，分别用下标a_1,d_1和a_2,d_2表示，则式(11.73)和(11.74)可用以下矩阵方程表示：

$$\begin{bmatrix} \dot{N}_{a1} \\ \dot{N}_{d1} \\ \dot{N}_{a2} \\ \dot{N}_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{a1} & \dot{\lambda}_{a1} \\ \dot{\varphi}_{d1} & \dot{\lambda}_{d1} \\ \dot{\varphi}_{a2} & \dot{\lambda}_{a2} \\ \dot{\varphi}_{d2} & \dot{\lambda}_{d2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial N}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \tag{11.79}$$

该"观测"方程组有多余"观测量"，即方程个数多于未知参数个数，可按不等权最小二乘平差方法求解，并分别对不同卫星任务估计N的方差，确定平差的权矩阵，N的误差估计并不太容易，一般可采用比较可靠的先验值。

对所有各类测高数据可组成自交叉或互交叉，获得密集的交叉点分布，但分布很不均匀，在求得所有交叉点的(ξ,η)后，需要将不规则数据点分布格网化，以便下一步利用 FFT 谱算法计算大地水准面和重力异常。例如，取均匀格网间隔为2.5′，则需要通过拟合内插方法计算所有格网结点的垂线偏差(ξ,η)值，其方法与本章 11.2.3 节对平均海面高离散数据格网化方法相同。

由垂线偏差计算似大地水准面高(在海洋上我们假定似大地水准面与大地水准面一致，认为海面地形的影响可忽略)的基本公式为(Molodensky et al.,1962)

$$N = S = -\frac{1}{4\pi}\iint_\sigma \cot\frac{\psi}{2}\frac{\partial N}{\partial \psi}\mathrm{d}\sigma \tag{11.80}$$

式中：σ是单位球面，ψ是计算点P与积分流动点间的球面角距，$\frac{1}{R}\frac{\partial N}{\partial \psi}$是$\psi$方向上的垂线偏差分量，用$\xi$和$\eta$表示为

$$\frac{1}{R}\frac{\partial N}{\partial \psi} = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha \tag{11.81}$$

式中：α是ψ方向上的方位角，亦即计算点P到积分流动点方向的方位角，由球面三角关系有

$$\sin\alpha = -\frac{\cos\varphi\sin(\lambda_p - \lambda)}{\sin\psi}) \tag{11.82}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos\varphi_p\sin\varphi - \sin\varphi_p\cos\varphi\cos(\lambda_p - \lambda)}{\sin\psi} \tag{11.83}$$

顾及式(11.82)和式(11.83)，将式(11.81)代入式(11.80)得

$$\zeta = -\frac{R}{4\pi}\iint_\sigma\left(\xi\cos\alpha\cot\frac{\psi}{2} + \eta\sin\alpha\cot\frac{\psi}{2}\right)\mathrm{d}\sigma \tag{11.84}$$

式(11.84)是球面二维积分形式，可化为精确的一维卷积表达式，其原理和算法可参阅有关文

献(Haagmans et al.,1993;李建成等,2003)。将式(11.84)写成以下形式:

$$\zeta(\varphi_p,\lambda_p) = -\frac{R}{4\pi}\iint_\sigma (\xi IQ_\xi + \eta IQ_\eta)\mathrm{d}\sigma \tag{11.85}$$

式中:

$$IQ_\xi = \cos\alpha\cot\frac{\psi}{2} = \frac{\cos\varphi_p\sin\varphi - \sin\varphi_p\cos\varphi\cos(\lambda_p - \lambda)}{2\sin^2(\psi/2)} \tag{11.86}$$

$$IQ_\eta = \sin\alpha\cot\frac{\psi}{2} = -\frac{\cos\varphi\sin(\lambda_p - \lambda)}{2\sin^2(\psi/2)} \tag{11.87}$$

且

$$\sin^2(\psi/2) = \sin^2\frac{1}{2}(\varphi_p - \varphi) + \sin^2\frac{1}{2}(\lambda_p - \lambda)\cdot\cos\varphi_p\cos\varphi \tag{11.88}$$

则式(11.84)一维卷积的谱表达式为

$$\begin{aligned}\zeta(\varphi_i,\lambda_p) &= -\frac{R}{4\pi}\int_\varphi \{[\xi(\varphi_i,\lambda)\cos\varphi] * IQ_\xi(\varphi_i,\varphi,\lambda_p-\lambda) \\ &\quad + [\eta(\varphi_i,\lambda)\cos\varphi] * IQ_\eta(\varphi_i,\varphi,\lambda_p-\lambda)\}\mathrm{d}\varphi \\ &= -\frac{R}{4\pi}F_1^{-1}\left\{\int_\varphi \{F_1[\xi(\varphi_i,\lambda)\cos\varphi]F_1[IQ_\xi(\varphi_i,\varphi,\lambda_p-\lambda)]\right. \\ &\quad \left. + F_1[\eta(\varphi_i,\lambda)\cos\varphi]F_1[IQ_\eta(\varphi_i,\varphi,\lambda_p-\lambda)]\}\mathrm{d}\varphi\right\}\end{aligned} \tag{11.89}$$

式中:F_1 和 F_1^{-1} 分别表示一维 Fourier 变换和逆变换,φ_i 是以等经纬度间隔格网化数据中第 i 个纬圈的纬度。

式(11.85)也可以化为二维球面卷积的谱表达式,但带 $s^2 = \sin^2(\psi/2)$ 有近似性,不能严格用球坐标(φ,λ)表达为满足卷积形式的展式。由球面三角公式,s^2 可表示为

$$(\varphi_p - \varphi)s^2 = \sin^2\frac{\psi}{2} = \sin^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_p - \varphi)\right] + \sin^2\left[\frac{1}{2}(\lambda_p - \lambda)\right]\cos\varphi_p\cos\varphi \tag{11.90}$$

上式表示 s 不仅是$(\lambda_p - \lambda)$的函数,还包含变量 $\cos\varphi$,φ_p 在式中视为常数,因此该函数 IQ_ξ 和 IQ_η 不能化为仅含变量$(\varphi_p - \varphi)$和$(\lambda_p - \lambda)$的形式。引入近似处理,展开 $\cos\varphi_p\cos\varphi$,有

$$\begin{aligned}\cos\varphi_p\cos\varphi &= \cos^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_p + \varphi)\right] - \sin^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_p - \varphi)\right] \\ &\approx \cos^2\varphi_m - \sin^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_p - \varphi)\right]\end{aligned} \tag{11.91}$$

式中:$\varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_p + \varphi)$取为计算区平均纬度。对于一给定区域,$\varphi_m$ 是常数,则 s 可近似表示为

$$\begin{aligned}s = \sin\frac{\psi}{2} \approx s' = &\left\{\sin^2\left[\frac{1}{2}(\varphi_p - \varphi)\right]\right. \\ &\left. + \sin^2\left[\frac{1}{2}(\lambda_p - \lambda)\right]\cdot\left[\cos^2\varphi_m - \sin^2\left(\frac{\varphi_p - \varphi}{2}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{11.92}$$

在式(11.86)中,IQ_ξ 表达式的分子含 $\cos\varphi_p\sin\varphi$ 和 $\sin\varphi_p\cos\varphi$,可作类似近似处理,令

$$\begin{aligned}cs = \cos\varphi_p\sin\varphi &= \frac{1}{2}[\sin(\varphi_p + \varphi) - \sin(\varphi_p - \varphi)] \\ &\approx \frac{1}{2}[\sin(2\varphi_m) - \sin(\varphi_p - \varphi)]\end{aligned} \tag{11.93}$$

$$sc = \sin\varphi_p\cos\varphi = \frac{1}{2}[\sin(\varphi_p + \varphi) + \sin(\varphi_p - \varphi)]$$

$$\approx \frac{1}{2}[\sin(2\varphi_m) + \sin(\varphi_p - \varphi)] \tag{11.94}$$

在式(11.87)中，IQ_η 表达式仅含 $\cos\varphi$ 单因子，可并入数据函数 $\eta(\varphi,\lambda)\cos\varphi$，不需近似处理，则式(11.85)可以近似表示为以下二维球面卷积形式：

$$\zeta(\varphi_p,\lambda_p) \approx -\frac{R}{4\pi}\iint_\sigma(\xi \cdot IQ'_\xi + \eta\cos\varphi \cdot IQ'_\eta)\mathrm{d}\sigma \tag{11.95}$$

式中：

$$IQ'_\xi = \frac{cs - sc\cos(\lambda_p - \lambda)}{2(s')^2} \tag{11.96}$$

$$IQ'_\eta = -\frac{\sin(\lambda_p - \lambda)}{2(s')^2}) \tag{11.97}$$

于是，式(11.91)的二维球面卷积的谱表达式为

$$\begin{aligned}\zeta(\varphi_p,\lambda_p) &= -\frac{R}{4\pi}\{[\xi(\varphi,\lambda)\cos\varphi] * IQ'_\xi(\varphi_p - \varphi,\lambda_p - \lambda) \\ &\quad + [\eta(\varphi,\lambda)\cos^2\varphi] * IQ'_\eta(\varphi_p - \varphi,\lambda_p - \lambda)\} \\ &= -\frac{R}{4\pi}F_2^{-1}\{F_2[\xi(\varphi,\lambda)\cos\varphi]F_2[IQ'_\xi(\varphi,\lambda)] \\ &\quad + F_2[\eta(\varphi,\lambda)\cos^2\varphi]F_2[IQ'_\eta(\varphi,\lambda)]\}\end{aligned} \tag{11.98}$$

下面引入局部切平面直角坐标系，可得二维球面卷积用一个高精度二维平面的卷积表达(李建成等，1997，1999，2003)。定义一个以计算点 P 为原点，X 轴指向北极，Y 轴指向东，且 XY 平面为过 P 点的水平面的局部平面直角坐标系，于是有

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{l}{2R} = \frac{1}{2R}[(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{11.99}$$

式中：(x_p,y_p) 和 (x,y) 分别为计算点 P 和积分流动点的直角坐标。由此可得

$$\cot\frac{\psi}{2} = \left[\frac{4R^2}{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{11.100}$$

同样设计算点 P 至积分流动点方向的方位角为 α，则有

$$\cos\alpha = -\frac{y_p - y}{[(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{11.101}$$

$$\sin\alpha = -\frac{x_p - x}{[(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{11.102}$$

将式(11.100)、(11.101)、(11.102)以及 $\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 代入式(11.84)，得

$$\begin{aligned}\zeta(x_p,y_p) &= -\frac{1}{4\pi R}\iint_\sigma[\xi(x,y)IQ_\xi(x_p - x,y_p - y) \\ &\quad + \eta(x,y)IQ_\eta(x_p - x,y_p - y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{11.103}$$

由垂线偏差计算似大地水准面的高精度二维平面卷积表达式为

$$\zeta(x_p,y_p) = -\frac{1}{4\pi R}[\xi(x,y) * IQ_\xi(x,y) + \eta(x,y) * IQ_\eta(x,y)] \tag{11.104}$$

式中：

$$IQ_\xi = \cos\alpha\cot\frac{\psi}{2} \tag{11.105}$$

$$IQ_\eta = \sin\alpha\cot\frac{\psi}{2} \tag{11.106}$$

其中：$\cot\dfrac{\psi}{2}$、$\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 应分别按式(11.100)、(11.101)和式(11.102)计算。式(11.104)理论上仍然是一近似公式，但大量实例计算表明，其计算精度显著高于近似的二维球面卷积公式(11.98)(李建成等，2003)。

11.3.3 由测高数据计算重力异常

由于测高数据的累积日益丰富多样，数据分辨率也随之不断提高，因而由测高数据反演高分辨率海洋重力异常的方法和实用模型在不断发展。20 世纪 70 年代末将测高平均海面高视为大地水准面高，用逆 Stokes 公式反演重力异常的方法仍在使用，但计算过程已趋于精细，力求排除测高数据中的各种非静态信号和海面地形的影响，以求得更纯净的测高大地水准面观测值，再用逆 Stokes 公式求解重力异常。20 世纪 80 年代初最小二乘配置法也常用于局部海域的计算，此统计法仍在应用和发展，特别是北欧海域和地中海地区的研究。Hwang(1998)利用测高数据联合实测重力数据用最小二乘配置法计算了台湾地区周边海域高分辨重力异常。20 世纪 80 年代末 90 年代初，用测高垂线偏差计算重力异常的方法开始发展起来，Sandwell(1992)用由 GEOSAT/GM 数据得到的垂线偏差计算了南极地区高分辨率海洋重力异常，他从 Laplace 方程出发，导出重力异常和垂线偏差的一阶微分方程，其中略去了重力异常和扰动重力的差别，利用 Fourier 变换求解重力异常。20 世纪 90 年代中期，开始采用严密的逆 Vening-Meinesz 公式由垂线偏差反演重力异常，经典公式是 Molodensky(1962)的逆 Vening-Meinesz 公式，Hwang(1998)用不同的推导方法导出了完全等价的逆 Vening-Meinesz 公式。本节介绍逆 Stokes 公式和逆 Vening-Meinesz 公式，并给出这两类公式的 FFT 谱算法模型，最后简要介绍 Sandwell 方法。

(1) 逆 Stokes 公式及其卷积式

大地水准面上任意一点 P 的扰动位 T 和重力异常 Δg 的关系式为：

$$\Delta g_P = \left(-\frac{\partial}{\partial h} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)T_P \tag{11.107}$$

式中：γ 和 h 分别为正常重力和正高。

在球面近似假设下，有$\dfrac{\partial}{\partial h}\approx\dfrac{\partial}{\partial r}$，$r$ 为球的矢径方向。根据 Bruns 公式，以地球平均重力 $\bar{\gamma}$ 代替 γ，并假设扰动位的零次项为 0，则式(11.107)可写成：

$$\Delta g_P = \left(-\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{R}\right)\bar{\gamma}N_P \tag{11.108}$$

式中：R 为地球平均半径。大地水准面的径向导数为(Molodensky et al., 1960; Rummal, 1977)

$$\frac{\partial N_P}{\partial r} = -\frac{1}{R}N_P + \frac{R^2}{2\pi}\iint_\sigma \frac{N - N_p}{l^3}\mathrm{d}\sigma \tag{11.109}$$

式中：l 为计算点 P 与积分流动面元间的空间距离，且 $l = 2R\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$；$N$ 为积分流动面元的大地

水准面高。将上式代入(11.108),得逆 Stokes 公式为

$$\Delta g(\varphi_P,\lambda_P) = -\frac{\bar{\gamma}N(\varphi_P,\lambda_P)}{R} - \frac{\bar{\gamma}R^2}{2\pi}\iint_\sigma \frac{N(\varphi,\lambda) - N(\varphi_P,\lambda_P)}{l^3}\mathrm{d}\sigma \tag{11.110}$$

或写成

$$\Delta g(\varphi_P,\lambda_P) = -\frac{\bar{\gamma}}{R}N(\varphi_P,\lambda_P) - \frac{\bar{\gamma}}{16\pi R}\iint_\sigma \frac{N(\varphi,\lambda) - N(\varphi_P,\lambda_P)}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\lambda \tag{11.111}$$

略去详细推导,上式的一维卷积表达式(李建成,1996)为:

$$\begin{aligned}\Delta g(\varphi_i,\lambda_P) &= -\frac{\bar{\gamma}}{R}N(\varphi_i,\lambda_P) - \frac{\bar{\gamma}}{16\pi R}\iint_\sigma [N(\varphi_i,\lambda) - N(\varphi_i,\lambda_P)]\cdot \\ &\quad IS(\varphi_i,\varphi,\lambda_P-\lambda)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\lambda \\ &= -\frac{\bar{\gamma}}{R}N(\varphi_i,\lambda_P) - \frac{\bar{\gamma}}{16\pi R}\int_\varphi \{[N(\varphi_i,\lambda)\cos\varphi] * \\ &\quad IS(\varphi_i,\varphi,\lambda_P-\lambda) - N(\varphi_i,\lambda_P) * [IS(\varphi_i,\varphi,\lambda_P-\lambda)\cos\varphi]\}\mathrm{d}\varphi \\ &= -\frac{\bar{\gamma}}{R}N(\varphi_i,\lambda_P) - \frac{\bar{\gamma}}{16\pi R}F_1^{-1}\{\int_\varphi \{F_1[N(\varphi_i,\lambda)\cos\varphi]\cdot F_1[IS(\varphi_i,\varphi,\lambda_P-\lambda)] - \\ &\quad F_1[N(\varphi_i,\lambda_P)]F_1[IS(\varphi_i,\varphi,\lambda_P-\lambda)\cos\varphi]\}\mathrm{d}\varphi\}\end{aligned} \tag{11.112}$$

式中:

$$\begin{aligned}IS(\varphi_i,\varphi,\lambda_P-\lambda) &= \sin^3(\varphi/2) \\ &= \left[\sin^2\frac{1}{2}(\varphi_i-\varphi) + \sin^2\frac{1}{2}(\lambda_P-\lambda)\cos\varphi_i\cos\varphi\right]^{\frac{3}{2}}\end{aligned} \tag{11.113}$$

(2) 逆 Vening-Meinesz 公式及其卷积式

Molodensky 逆 Vening - Meinesz 公式为

$$\Delta g = \frac{\gamma}{4\pi R}\iint_\sigma\left(3\csc\varphi - \csc\varphi\csc\frac{\varphi}{2} - \tan\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\partial N}{\partial\varphi}\mathrm{d}\sigma \tag{11.114}$$

式中:各符号的意义同前。

顾及式(11.81)、(11.82)和式(11.83),上式可写为

$$\begin{aligned}\Delta g(\varphi_P,\lambda_P) &= \frac{\gamma}{4\pi}\iint_\sigma\left(3\csc\varphi - \csc\varphi\csc\frac{\varphi}{2} - \tan\frac{\varphi}{2}\right)(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha)\mathrm{d}\sigma \\ &= \frac{\gamma}{4\pi}\iint_\sigma\left\{\xi\cos\alpha\left(3\csc\varphi - \csc\varphi\csc\frac{\varphi}{2} - \tan\frac{\varphi}{2}\right) + \eta\sin\alpha\cdot\right. \\ &\quad \left.\left(3\csc\varphi - \csc\varphi\csc\frac{\varphi}{2} - \tan\frac{\varphi}{2}\right)\right\}\mathrm{d}\sigma\end{aligned} \tag{11.115}$$

类似于式(11.84),上式可以用一维卷积表达

$$\Delta g(\varphi_P,\lambda_P) = \frac{\gamma}{4\pi}\iint(\xi IV_\xi + \eta IV_\eta)\mathrm{d}\sigma \tag{11.116}$$

式中：

$$IV_{\xi} = \cos\alpha\left(3\csc\varphi - \csc\varphi\csc\frac{\varphi}{2} - \tan\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \left[\frac{\cos\varphi_P\sin\varphi - \sin\varphi_P\cos\varphi\cos(\lambda_P - \lambda)}{4\sin^3\frac{\varphi}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}\right]$$

$$\cdot\left(-2\sin^3\frac{\varphi}{2} + 3\sin\frac{\varphi}{2} - 1\right) \tag{11.117}$$

$$IV_{\eta} = \sin\alpha\left(3\csc\varphi - \csc\varphi\csc\frac{\varphi}{2} - \tan\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= -\frac{\cos\varphi\sin(\lambda_P,\lambda)}{4\sin^3\frac{\varphi}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}\left(-2\sin^3\frac{\varphi}{2} + 3\sin\frac{\varphi}{2} - 1\right) \tag{11.118}$$

式中：

$$\sin(\varphi/2) = \left[\sin^2\frac{1}{2}(\varphi_P - \varphi) + \sin^2\frac{1}{2}(\lambda_P - \lambda)\cos\varphi_P\cos\varphi\right]^{\frac{1}{2}} \tag{11.119}$$

则式(11.116)的一维卷积表达式为

$$\Delta g(\varphi_i,\lambda_P) = \frac{\gamma}{4\pi}\int_{\varphi}\{[\xi(\varphi_i,\lambda)\cos\varphi] * IV_{\xi}(\varphi_i,\varphi,\lambda_P - \lambda) +$$

$$[\eta(\varphi_i,\lambda)\cos\varphi] * IV_{\eta}(\varphi_i,\varphi,\lambda_P - \lambda)\}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\gamma}{4\pi}F_1^{-1}\left\{\int_{\varphi}\{F_1[\xi(\varphi_i,\lambda)\cos\varphi]F[IV_{\xi}(\varphi_i,\varphi,\lambda_P - \lambda)]_1 +\right.$$

$$\left.F_1[\eta(\varphi_i,\lambda)\cos\varphi]F_1[IV_{\eta}(\varphi_i,\varphi,\lambda_P - \lambda)]\}\mathrm{d}\varphi\right\} \tag{11.120}$$

引用式(11.93)和(11.94)的符号定义，则相应的二维球面卷积的谱表达式可写为

$$\Delta g(\varphi_P,\lambda_P) = \frac{\gamma}{4\pi}\iint_{\sigma}(\xi IV'_{\xi} + \eta IV'_{\eta})\mathrm{d}\sigma \tag{11.121}$$

式中：

$$IV'_{\xi} = \frac{cs - sc\cos(\lambda_P - \lambda)}{4\sin^3\frac{\varphi}{2}\left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}\left(-2\sin^3\frac{\varphi}{2} + 3\sin\frac{\varphi}{2} - 1\right) \tag{11.122}$$

$$IV'_{\eta} = -\frac{\sin(\lambda_P - \lambda)}{4\sin^3\left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}\left(-2\sin^3\frac{\varphi}{2} + 3\sin\frac{\varphi}{2} - 1\right) \tag{11.123}$$

$$\Delta g(\varphi,\lambda) = \frac{\gamma}{4\pi}\iint_{\sigma}\left[\begin{array}{l}\xi(\varphi,\lambda)IV'_{\xi}(\varphi_P - \varphi,\lambda_P - \lambda)\\ + \eta(\varphi,\lambda)IV'_{\eta}(\varphi_P - \varphi,\lambda_P - \lambda)\end{array}\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{\gamma}{4\pi}\{[\xi(\varphi,\lambda)\cos\varphi] * IV'_{\xi}(\varphi_P - \varphi,\lambda_P - \lambda) +$$

$$[\eta(\varphi,\lambda)\cos^2\varphi] * IV'_{\eta}(\varphi_P - \varphi,\lambda_P - \lambda)\}$$

$$= \frac{\gamma}{4\pi}F_2^{-1}\{F_2[\xi(\varphi,\lambda)\cos\varphi] + F_2[IV'_{\xi}(\varphi,\lambda)] +$$

$$F_2[\eta(\varphi,\lambda)\cos^2\varphi]F_2[IV'_{\eta}(\varphi,\lambda)]\} \tag{11.124}$$

下面再给出逆 Vening-Meinesz 公式高精度二维平面卷积表达式。同样定义一个局部切平面直角坐标系,完全类似式(11.103)的推导(李建成等,1997):

$$\Delta g(x_P,y_P)=\frac{\gamma}{4\pi R^2}\iint_\sigma[\xi(x,y)IV_\xi(x_P-x,y_P-y)+\eta(x,y)IV_\eta(x_P-x,y_P-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11.125}$$

上式的二维平面卷积表达式为

$$\Delta g(x_P,y_P)=\frac{\gamma}{4\pi R^2}[\xi(x,y)*IV_\xi(x,y)+\eta(x,y)*IV_\eta(x,y)] \tag{11.126}$$

式中:

$$IV_\xi=\cos\alpha\cdot\frac{-2\sin^3\frac{\varphi}{2}+3\sin\frac{\varphi}{2}-1}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{11.127}$$

$$IV_\eta=\sin\alpha\cdot\frac{-2\sin^3\frac{\varphi}{2}+3\sin\frac{\varphi}{2}-1}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{11.128}$$

式中:$\sin\frac{\varphi}{2}$、$\cos\alpha$、$\sin\alpha$ 的表达式分别为式(11.99)、(11.101)和式(11.102)。

(3) 由垂线偏差计算扰动重力的简单 Fourier 变换公式

假定以计算点 P 为原点建立了一个局部直角坐标系($O-xyz$),xy 坐标面与 P 点椭圆面法线正交,x 轴指向北,y 轴指向东,z 轴指向 P 点的大地天顶。在此坐标系中扰动位 T 满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}=0 \tag{11.129}$$

扰动重力 δg 按定义为扰动位径向梯度的负值,即

$$\delta g=-\frac{\partial T}{\partial z} \tag{11.130}$$

垂线偏差为大地水准面梯度的负值,则与扰动位的水平梯度成比例,由 Bruns 公式比例因子可近似取常数 $-1/\bar{\gamma}$,则有

$$\xi(X)=-\frac{\partial N}{\partial x}\approx-\frac{1}{\bar{\gamma}}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{11.131}$$

$$\eta(X)=-\frac{\partial N}{\partial y}\approx-\frac{1}{\bar{\gamma}}\frac{\partial T}{\partial y} \tag{11.132}$$

式中:二维点位向量 $X=(x,y)^{\mathrm{T}}$,顾及式(11.130)~(11.132),可得扰动重力与垂线偏差的一阶微分关系

$$\frac{\partial\delta g}{\partial z}=-\bar{\gamma}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) \tag{11.133}$$

由式(11.131)和式(11.132),$\frac{\partial\xi}{\partial x}$和$\frac{\partial\eta}{\partial y}$为大地水准面在两个正交方向 x 轴方向和 y 轴方向的曲面曲率。因此,式(11.133)的几何意义是:大地水准面上一点扰动重力的径向梯度,等于过这点大地水准面上两正交方向曲率之和乘以平均重力的负值,此简单算式的优点是不受边缘效

应影响，适于近岸测高轴线的计算(Sandwell,1992)。

利用 Fourier 变换可将微分方程(11.133)转换为代数方程。设 $\delta g(x,y,z)$、$\xi(x,y)$ 和 $\eta(x,y)$ 的二维 Fourier 变换分别为 $\delta g(K,z)$、$\xi(K)$ 和 $\eta(K)$。其中：

$$K = (k_x, k_y) \tag{11.134}$$

$$k_x = 1/\lambda_x,\ k_y = 1/\lambda_y \tag{11.135}$$

$$|K| = \sqrt{k^2x + k^2y} \tag{11.136}$$

式中：k_x 和 k_y 分别为波数域在 x 方向和 y 方向上的分量；λ_x 和 λ_y 分别为相应方向上的波长；式(11.135)表示 k_x 和 k_y 分别是 x 方向和 y 方向单位距离(如每米或每公里)上包含波的个数，为实数。

由导数的 Fourier 变换定理，微分方程式(11.133)的 Fourier 变换方程为：

$$\frac{\partial\delta g(K,z)}{\partial z} = -\mathrm{i}2\pi\bar{\gamma}[k_x\xi(K) + k_y\eta(K)] \tag{11.137}$$

这是一个代数方程，其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$。

由波数域 Laplace 方程的解，利用 Fourier 变换平移定理，可得到 $\delta g(k,z)$ 的向上解析延拓公式：

$$\delta g(k,z) = \delta g(k,0)\mathrm{e}^{-2\pi|k|z} \tag{11.138}$$

该式建立了地球表面扰动重力与空间某一高程 z 上的扰动重力间的延拓关系。将式(11.138)对z 取导数，取 $z=0$ 的值，得

$$\left.\frac{\partial\delta g(k,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = -2\pi|k|\delta g(k,0)\mathrm{e}^{-2\pi|k|z}\Big|_{z=0} = -2\pi|k|\delta g(k,0) \tag{11.139}$$

上式应与式(11.137)的右边等值，则联合该两式得

$$\delta g(k,0) = \frac{\mathrm{i}}{|k|}\gamma[-k_x\xi(k) + k_y\eta(k)] \tag{11.140}$$

对上式实行 Fourier 逆变换 F^{-1}，有

$$\delta g(x,y,0) = F^{-1}[\delta g(k,0)] = \frac{\mathrm{i}}{|k|}\gamma\{F^{-1}[k_x\xi(k)] + F^{-1}[k_y,\eta(k)]\} \tag{11.141}$$

上式就是由垂线偏差分量计算扰动重力的 Fourier 变换公式。假设已建立了测高垂线偏差等间距格网化数据集，设 x 和 y 方向采样间隔分别为 Δx 和 Δy，总采样长度变为 X 和 Y，则

$$X = M\Delta x,\quad Y = M\Delta y \tag{11.142}$$

式中：M 和 N 分别为沿 x 和 y 方向的数据点数，则可将波数 k_x 和 k_y 分别用 $k=(u_m,v_n)$，$u_m(m=0,1,\cdots,M-1)$ 和 $v_n(n=0,1,\cdots,N-1)$ 表示，即将连续谱离散化，相应方向最低频率的波数(频率)间隔为：

$$u_L = \Delta u = \frac{1}{X} = \frac{1}{M\Delta X},\quad v_L = \Delta v = \frac{1}{Y} = \frac{1}{N\Delta Y} \tag{11.143}$$

这是由整个测区空间尺度(XY)所决定的数据集所能包含的最低频谱(最长波长)信息，其最高频高(u_H 和 v_H)由 Nyquist 采样定理确定，即

$$u_H = \pm\frac{M}{2}\Delta u = \pm\frac{1}{2\Delta x},\quad v_H = \pm\frac{N}{2}\Delta v = \pm\frac{1}{2\Delta y} \tag{11.144}$$

一般情况下，有

$$
\left.\begin{aligned}
H &= \sqrt{(H_0^c)^2 + (H_0^s)^2} \\
\theta &= \arctan \frac{H_0^s}{H_0^c}
\end{aligned}\right\} \tag{11.145}
$$

在空域，$\xi(x,y)$和$\eta(x,y)$的离散值用$\xi(x_k,y_k)$和$\eta(x_k,y_k)$表示。其中：

$$
x_k = k\Delta x(k = 0,1,\cdots,M-1),\ y_l = l\Delta y(l = 0,1,\cdots,N-1) \tag{11.146}
$$

应用离散 Fourier 变换公式，式(11.141)中的$\xi(k)$和$\eta(k)$分别用以下两式计算：

$$
\xi(u_m,v_n) = \Delta x\Delta y\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\xi(x_k,y_l)\exp\left[-2\pi i\left(\frac{m}{M}k + \frac{n}{N}l\right)\right]
$$

$$
(m = 0,1,\cdots,M-1;\quad n = 0,1,\cdots,N-1) \tag{11.147}
$$

$$
\eta(u_m,v_n) = \Delta x\Delta y\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\eta(x_k,y_l)\exp\left[-2\pi i\left(\frac{m}{M}k + \frac{n}{N}l\right)\right]
$$

$$
(m = 0,1,\cdots,M-1;\quad n = 0,1,\cdots,N-1) \tag{11.148}
$$

将$\xi(u_m,v_n)$和$\eta(u_m,v_n)$分别与波数u_m和v_n相乘，即$u_m\xi(u_m,v_n)$，$v_n\eta(u_m,v_n)$ $(m=0,1,\cdots,M-1;n=0,1,\cdots,N-1)$，并组成新的格网数据，各自的逆 Fourier 变换分别用$\bar{\xi}(x_k,y_k)$和$\bar{\eta}(x_k,y_k)$表示，利用离散逆 Fourier 变换公式，有

$$
\begin{aligned}
\bar{\xi}(x_k,y_k) &= F^{-1}[u_m\xi(u_m,v_n)] \\
&= \Delta u\Delta v\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}u_m\xi(u_m,v_n)\exp\left[2\pi i\left(\frac{m}{M}k + \frac{n}{N}l\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
(k = 0,1,\cdots,M-1;\quad l = 0,1,\cdots,N-1) \tag{11.149}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\eta}(x_k,y_k) &= F^{-1}[v_n\eta(u_m,v_n)] \\
&= \Delta u\Delta v\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}v_m\eta(u_m,v_n)\exp\left[2\pi i\left(\frac{m}{M}k + \frac{n}{N}l\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
(k = 0,1,\cdots,M-1;\quad l = 0,1,\cdots,N-1) \tag{11.150}
$$

由式(11.141)最后可得δg的计算式：

$$
\delta g(x_k,y_k) = \frac{i}{|k|}\bar{\gamma}[\xi(x_k,y_k) + \eta(x_k,y_k)]
$$

$$
(k = 0,1,\cdots,M-1;\quad l = 0,1,\cdots,N-1) \tag{11.151}
$$

上式是复数形式，应取其实数部分。以上 Fourier 变换均可用 FFT 技术实现。

重力异常的计算，可按重力测量基本微分方程由扰动重力加改正项得到，即

$$
\Delta g(x,y) = \delta g(x,y) - \frac{2}{R}T(x,y) = \delta g(x,y) - 2\frac{\bar{\gamma}}{R}N(x,y) \tag{11.152}
$$

式中：$T(x,y)$或$N(x,y)$可由位模型计算，取$\bar{\gamma} = 979761 \times 10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}$，$R = 6371009\mathrm{m}$，则改正数为$-0.3076 \times 10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}$，$N$的单位为米，目前全球重力场模型大地水准面的精度，在海洋地区均为0.5m，则用模型改正的误差约为$\pm 0.15 \times 10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}$。

这一方法最早是 Haxby et al. (1983) 提出的，其后 Sandwell, Freedman 和 Parsons 以及 McAdoo 等人加以应用和发展，利用 GEOSAT/GM 密集的垂线偏差格网数据反演重力异常，并对结果作了海洋地球物理解释，取得较好结果。该方法的优点是计算过程简单，不涉及复杂的核函数，缺点是有一定的近似性，不甚严密。随着对精度的要求提高，大地测量界已趋向采用逆 Vening-Meinesz 公式计算。

§11.4 卫星测高数据用于建立海潮模型

11.4.1 引潮力位调和展开的理论模型

在§2.3中介绍了地球的潮汐现象，简要叙述了引潮力、引潮位和平衡潮等基本概念及潮汐分析的基本原理，导出了引潮位的一般表达式(2.26)及其球谐函数展开式(2.28)，给出了我们在实用上只需顾及的二阶和三阶项解析表达式(2.31)，这个公式包含的变量 Z 和 r_m，都是时间的函数。假定我们在某一时刻 t 地球表面一个测站上用经纬仪测定了月球的天顶距 $Z(t)$，用 GPS 测定了测站的大地坐标，则可计算测站的地心距 r，由天文年历可查算此时刻地心至月心的距离 $r_m(t)$，R 和 D_m 是已知的地球平均半径和 Doodson 常数，由此可计算测站点在此时刻月球的引潮位 $U_t=U_{t2}+U_{t3}$，由式(2.34)可确定相应的大地水准面的平衡潮高。对太阳的引潮位和平衡潮高可作类似的观测和计算。现在如果我们要确定地球表面在任意已知时刻 t 和已知站点（已知站坐标）的引潮位，而且不用作任何观测，则我们只需要知道 $Z(t)$ 和 $r_m(t)$ 的解析表达式，以及 r 关于测站纬度 φ 和高程 h 的解析表达式 $r(\varphi,h)$。函数 $Z(t)$ 和 $r_m(t)$ 则涉及月球绕地球运行轨道的多种时变天文参数，对太阳而言，则涉及地球绕太阳运行轨道的类似天文参数。函数 $r(\varphi,h)$ 只涉及参考椭球长半径 a 和扁率 f 两个参数。将这三个函数都代入式(2.31)，则可将引潮位 U_{t2} 和 U_{t3} 表达成关于时变天文参数和测站纬度的展开式，只要给定时刻 t 和测站大地坐标(φ,λ,h)（其中经度 λ 用于计算天文参数的时间系统的化算），由时刻 t 可从天文年历查算所需要的所有天文参数，这样就可以不同观测计算任意时刻地球表面任意一点的引潮位，这种展开式就是引潮位的理论模型。这一展开过程同时又将关于变量 $\cos z$ 和 r_m 的非线性函数式(2.31)转化为单一正弦和余弦函数的线性组合，又称引潮位的（理论）调和分析过程，这个理论模型实际上是一个 Fourier 级数形式。由于月球绕地球和地球绕太阳作周而复始的周期性运动，其产生的引潮力和相应的引潮位必然是周期函数。由 Fourier 展开或频谱分析理论知，周期函数可看做是一种振动或波动的描述，均可分解为多个特定频率的简谐振动或分波的线性叠加，即正弦和余弦振动（分波）的线性组合。我们通常称潮汐为潮波，将引潮位（或相应的潮高）分解表达为一系列分潮波（以下简称分潮）的叠加，又称调和展开。每一分潮项称调和项，分潮项的系数是该分潮的振幅，反映分潮的强弱。下面简要推导引潮位的调和展开。

月球对地球的引潮力的变化，随月球在其运行轨道上与地球相对位置的变化而变化，月球的位置用天球赤道坐标系的坐标赤纬和赤经(δ,α)表示，也可用天球时角坐标系的坐标赤纬和时角(δ,t)表示。参见图11.8，O_E 为地心，P 为天球的北天极，$QQ'Q''$ 为天球赤道，其上的 γ 为春分点，NS 为观测点的地平圈，Z 为观测点的天顶，O_M 为月心在天球上的位置，$O_MQ''=\delta$，$\gamma Q''=\alpha$。

对球面三角形 PZQ_M，应用球面三角形边的余弦公式，可将月球天顶距 Z 用月球的赤纬 δ，时角 t 和观测点的纬度 φ 表示：

$$\cos Z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t \tag{11.153}$$

将上式代入式(2.31)，经展开整理后可得

图 11.8　测站天顶和月球在天球时角坐标系中的位置关系

$$U_{t2} = D_m\left(\frac{C_m}{r_m}\right)^3\left(\frac{r}{R}\right)\left[3\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2\delta - \frac{1}{3}\right)\right.$$
$$\left. + \cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2t + \sin 2\varphi\sin 2\delta\cos t\right] \tag{11.154}$$

$$U_{t3} = D_m\left(\frac{R}{C_m}\right)\left(\frac{C_m}{r_m}\right)^4\left(\frac{r}{R}\right)^3\left[\frac{1}{3}\sin\varphi(3 - 5\sin^2\varphi)(3\sin\delta - 5\sin^3\delta)\right.$$
$$- \frac{1}{2}\cos\varphi(1 - 5\sin^2\varphi)\cos\delta(1 - 5\sin^2\delta)\cos t$$
$$\left. + 5\sin\varphi\cos^2\varphi\sin\delta\cos^2\delta\cos 2t - \frac{5}{6}\cos^3\varphi\cos^3\delta\cos 3t\right] \tag{11.155}$$

式(11.154)和式(11.155)称为引潮位的 Laplace 展开，这一展开也可利用以下球函数加法定理(管泽霖，宁津生，1981)得到

$$P_n(\cos Z) = P_n(\sin\varphi)P_n(\sin\delta) + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\cdot$$
$$P_{nk}(\sin\varphi)P_{nk}(\sin\delta)\cos kt \tag{11.156}$$

将上式代入 U_t 的球谐展开式(2.28)，取 $n=2,3$，即可得式(11.154)和式(11.155)。

观察二阶引潮位 U_{t2}的 Laplace 展开式(11.154)，其中方括号中包括三项，每一项都含一个站点的纬度因子，与方括号外的纬度函数因子 r/R 的乘积组成三个地方参数，并认为与时间无关。第一项含一个赤纬因子，月球赤纬是一个复杂的时变函数，月球在白道上运行，白道与黄道倾斜 5°8′，而黄道又与赤道倾斜 23°27′，因此，月球与地球的相对位置变化范围大，赤纬可以在 ±28°到 ±18°之间变化，而其变化周期既有月(太阴月)周期，又有年周期。方括号外的因子 C_m/r_m，是地－月平均距离与实时距离之比，其变化周期是月(太阴月)周期，因此第一项代表周期大于半月(14 天)的长周期潮波，并且是由 $\varphi = \pm 35°16'$两条纬线(零值点轨线)为界的带球函数。第二项中随时间变化的周期性函数为 $\cos^2\delta\cos 2t$，显然 $\cos 2t$ 的周期为半个太阴日(12 小时 25.24 分)，在此周期内 δ 和 C_m/r_m 变化很小，因此第二项代表周期为半日的潮波，

同时此项是由 $t=\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{3\pi}{4}$ 两条经线(零值点轨线)为界的扇球函数。第三项中随时间变化的周期性函数为 $\sin 2\delta \cos t$,显然其周期为一个太阴日,代表周日潮波,此项是由 $t=\pm\frac{\pi}{2}$ 的经线和赤道两条线(零值点轨线)为界的田谐函数。以上分析是对月球潮汐而言,对太阳潮汐的分析完全类似,关于潮波周期的划分也一样。

对于引潮位的三阶项 U_{t3},包含四项:第一项是长周期项;第二项和第三项分别是周日及半周日潮波分量;第四项则包括一些 1/3 日周期项的分量。方括号外面的因子 r/R 是测站纬度因子,与各项中的纬度因子乘积组成地方参数。同样,C_m/r_m 属于长周期时变因子,$D_m\cdot(R/C_m)$ 是常数,$R/C_m\approx$ 6378km/384400km 的量级为 1.6×10^{-2}。上述四类潮波分量幅度都很小,其中有些较大的在月球潮汐调和分析中还是求解了其相应的分潮波。对于太阳潮汐的 Laplace 展开,通常略去其三阶项。

引潮位的 Laplace 展开并非调和展开,而是下一步进行调和展开的基础展式。调和展开的目的如前所述,是将 Laplace 展开再展开为正弦和余弦波的叠加,由此可了解主要分潮波周期(频率)反映的地球和月球公转轨道运行各种周期性变化及地球本身自转产生的引潮力(位)影响,并据此对分潮作分类以至于命名。同时我们还要把 Laplace 展式化为时间的函数,每一个正弦或余项分潮波中的引数(相角)就包含时间 t 和与时间变化有关的天文参数。地球上一点引潮力(位)的变化是由于太阳、月球和地球相对位置关系的变化而产生,这种因果关系十分复杂。关于地球绕太阳公转运动和月球绕地球的轨道运动规律,天文学已有足够精确的描述。这种描述是在适当的天球坐标系中给出月球和太阳的视运动规律,这里主要涉及天球黄道坐标系、天球赤道坐标系和天球时角坐标系。天球黄道坐标系是以黄道(太阳在天球上的视运动轨道)、过春分点的黄经圈(过黄极和春分点的经圈)和该坐标系的基圈构成(见图 11.9)。天体在黄道坐标系中的两个坐标黄纬和黄经的定义与赤纬 δ 和赤经 α 的定义完全类似。天球赤道坐标系我们已很熟悉,天球时角坐标系前面已提及(见图 11.8)。从球面天文学知,表示天体运动时刻 t 的各种时间系统之间关系都包含天体的赤经 α 或黄纬 l,下面的调和分析将采用天球黄道坐标系,因此与时间变化有关的天文参数为天体的黄纬。经典的调和展开是 Doodson 展开,为此首先介绍 Doodson 展开中引入的 6 个天文参数。

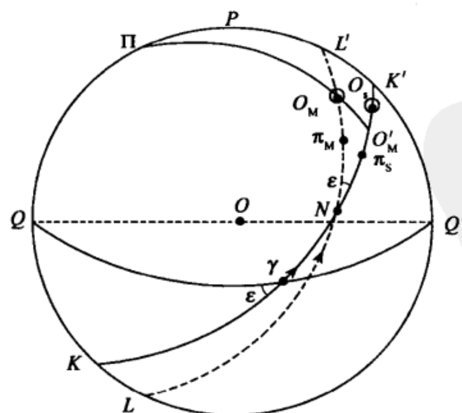


图 11.9　6 个天文参数在天球黄道坐标系的几何意义

如图 11.9 所示，Π 是天球黄道坐标系的北黄极，KK'是黄道（太阳天球视轨道），γ 是春分点，O_S 为日心，π_S 为太阳的近地点（即地球的近日点）；P 是天球赤道坐标系的北天极，QQ'为赤道，$\varepsilon = 23°27'$是黄赤交角；LL'为白道（月球天球视轨道），O_M 是月心，π_M 为月球近地点，N 为月球在黄道上的升交点，$\varepsilon' = 5°09'$是白黄交角。Doodson 的 6 个天文参数的符号和定义为（参见图 11.9）：

S（月球的平黄经）$= \gamma N + NO'_M \approx \gamma N + NO_M$（因 ε'很小）

h（太阳的平黄经）$= \gamma N + NO_S$

p（白道的近地点平黄经）$= \gamma N + N\pi_M$

N（白道升交点的平黄经）$= \gamma N$

p'（或 p_S）（太阳的近地点平黄经）$= \gamma N + N\pi_S = \gamma\pi_S$

τ（平太阳时，即平月球地方时）$= t + 180°$（从月球下中天为 0 起算，t 为月球的时角，用角度表示）

以上 5 个平黄经均从平春分点起算，各自都随时间在黄道上以常速变化，其中 S,h,p 和 p' 是从东向西方向增加，只有 N 是从西向东方向增加，故常采用 $N' = -N$，使其形式上与其他参数变化一致。τ 是月球的运行时间参数，由实用天文学可知，平太阴时和平太阳时与恒星时有以下关系：

$$\tau_{\star} = \tau + S = \tau_S + h \tag{11.157}$$

其中，$\tau_{\star}$ 为恒星时，τ_S 为平太阳时，均为地方时，应用此式时应将黄经 S 和 h 化为相应的赤经，若用地方平太阳时或地方恒星时表示，则有：

$$\tau = \tau_S + h - S = \tau_{\star} - S \tag{11.158}$$

当已知某一瞬间的世界时（即格林尼治零经度子午圈的平时），则平太阴地方（测站点）时可由下式换算（用角度表示）

$$\tau = (15\tau_{SG} + h) - S + \lambda \tag{11.159}$$

式中：τ_{SG}为用时间单位表示的格林尼治平太阳时，显然（$15\tau_{SG} + h$）的意义为此时刻用角度表示的格林尼治的恒星时（1 小时地球转过 15°），减去 S，则为此时此地的平太阴时；λ 为测站点的经度。

包括 τ 在内的上述共 6 个天文参数在以下作调和展开时其排列顺序是约定不变的，即为 τ, S, h, p, N', p'，都是在“平月球”和“平太阳”概念下随时间以一定周期变化的时变参数，其变化速度（以角速度°/h 表示）和周期见表 11.3。

表 11.3　　**六个 Doodson 展开天文参数的时变速率和周期**

参数	角速率	周　期
τ	14.4920521	1 平太阴日 = 1.035050 平太阳日 = 24 h 50.47 min
S	0.5490165	1 回归月 = 27.321582 平太阳日
h	0.0410686	1 回归年 = 365.242199 平太阳日
p	0.0046418	月球平近地点周期 = 8.847 年
N'	0.0022064	月球升交点周期 = 18.613 年
$p'(p_S)$	0.0000020	地球近日点周期 = 20940 年

Newcomb 于 1895 年根据当时已积累的 140 多年的 4 万余个天文观测数据给出了计算太阳参数 h,p' 以及黄、赤交角 ε 和地球公转轨道偏心率 e_S 的公式；Brown 于 1919 年又给出了计算月球轨道的有关参数 S,p,N' 以及黄、白交角和月球轨道偏心率 e_M 的公式。根据他们的公式，以后又出现了几种不同形式的实用计算公式，下面是 Doodson 展开给出的公式（方俊，1984）：

$$
\begin{aligned}
S &= 277^\circ.025 + 129^\circ.38481(Y-1900) + 13^\circ.17640(d+i) \\
h &= 280^\circ.190 - 0^\circ.23872(Y-1900) + 0^\circ.98565(d+i) \\
p &= 334^\circ.385 + 40^\circ.66249(Y-1900) + 0^\circ.11140(d+i) \\
N &= 259^\circ.157 - 19^\circ.32818(Y-1900) - 0^\circ.05295(d+i) \\
(N' &= 100^\circ.843 + 19^\circ.32818(Y-1900) + 0^\circ 05295(d+i)) \\
p' &= 281^\circ.221 + 0^\circ.01718(Y-1900) + 0^\circ.00005(d+i)
\end{aligned} \tag{11.160}
$$

式中：Y 是年份，即计算时间的公历年号。d 是 Y 年 1 月 1 日 0 时 0 分起到计算日时刻折合的日数，d 的整数部分为包括 1 号在内到计算日的前一天，小数部分应将计算日时刻化为日数，计算时刻可采用不同时间系统，通常采用世界时，即格林尼治平太阳时 τ_{SG}。若 d 的整数日为 n，则 $d = n + \tau_{SG}/24$；若已知其他时间系统的时刻，则可根据式(11.157)~(11.159)或其他相应时间换算公式换算为世界时。i 是从 1900 年起到 Y 年间的闰年(Intercalary year)数。

由此可见，式(11.160)给出了指定计算时刻各天文参数的计算值，即计算时刻 τ_{SG} 的函数表达式。

Doodson 的调和展开法的基本思想是首先将 Laplace 展开式(11.154)和式(11.155)中与月球相对于地球和地球相对于太阳的轨道运动有关的时变量 $\frac{C}{r}$ 和 δ 表达为 6 个天文参数的函数，这里对月球的引潮位来说 $\frac{C}{r} = \frac{C_m}{r_m}, \delta = \delta_m$；对于太阳的引潮位来说，$\frac{C}{r} = \frac{C_s}{r_s}, \delta = \delta_S$，下标 m 和 s 分别表示月球和太阳。再将这些函数关系代入式(11.154)和式(11.155)，利用 Kepler 关于行星轨道运动定律、轨道摄动理论、天球坐标系中有关天体坐标关系的球面三角公式，以及三角函数积化和差公式等，经过一系列繁琐的数学推导，最终可将引潮力位展开成许多具有一定振幅和频率（周期）的简谐波的线性叠加，即经典的 Doodson 调和展开公式。由于月球和地球的轨道运动很复杂，特别是月球的轨道运动不仅受到地球引力的摄动，还受到太阳引力的摄动，其轨道变化更显复杂，因此在以 6 个天文参数位变量的 $\left(\frac{C}{r}\right)$ 和 δ 的函数式中，要将"真月球"和"真太阳"天文参数化为"平月球"和"平太阳"天文参数，则将包含很多与地（日）、月轨道运动有关的项，例如 Brown 在其月球理论中就将 $\left(\frac{C}{r}\right)$ 展成 155 个较大的周期项，另有 500 多个较小的项。这就使得用这种方法展开引潮力位的推导运算极其复杂冗长，因此以下仅根据上述展开思路介绍推导的主要步骤，比较详细的推导可参阅有关文献（管泽霖、宁津生，1981，附录四和方俊，1984，第二章）。

引潮力位的 Doodson 展开大致可用以下五个步骤说明：

第一步：导出引潮力位 Laplace 展开式中 $\left(\frac{C}{r}\right)$ 和 δ 与 6 个天文参数之间的函数关系表达式。例如对月球有

$$\frac{C_m}{r_m} = 1 + 0.05490\cos(S - P) + 0.00297\cos(2S - 2P)$$
$$+ 0.01002\cos(S - 2h + P) + 0.008252\cos(2S - 2h) + \cdots \qquad (11.161)$$

$$\sin\delta = \sin\delta_m \approx \sin\varepsilon\sin l_m \qquad (11.162)$$

$$l_m = S + 0.1107\sin(S - P) + \cdots \qquad (11.163)$$

式中：ε（$=23°27'8''.26$）为黄赤交角，l_m 为月球的真黄经（有时也用 S_1 表示）。

第二步：将以上关系式代入式(11.154)，可将

长周期潮波：$\left(\frac{C_m}{r_m}\right)^3\left(\sin^2\delta_m - \frac{1}{3}\right)$

半日潮波：$\left(\frac{C_m}{r_m}\right)^3\cos^2\delta_m\cos 2t$

周日潮波：$\left(\frac{C_m}{r_m}\right)^3\sin 2\delta_m\cos t$

展开成通项为 $\cos^i(X)\cdot\sin^i(X)\cdot\cos^i(Y)\cdot\sin^i(Y)(i,j=0,1,2,\cdots)$ 形式的和式组合，X 和 Y 是 6 个天文参数的线性组合，系数为包括 0 在内的正负整数。

第三步：利用三角学中积化和差的恒等式，逐步将以上多重三角函数乘积形式的通项分解为 $(X+Y)$ 和 $(X-Y)$ 一重或多重合成角的单一正弦和余弦函数的代数和，其每一项代表一个具有特定振幅和频率（周期）的分潮波，其一般形式为

$$K_{abcdef}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\{a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp'\} \qquad (11.164)$$

式中：K_{abcdef}为对应相角为$\{a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp'\}$的 cos 项或 sin 项的系数，或称为相对系数；a 可等于 0，1，2 或 3；b,c,d,e,f 可为正整数或负整数，为避免负号，Doodson 在除 a 以外其他 5 个系数上各加 5，并将如此处理后的代表性系数用大写 A,B,C,D,E,F 表示，其中 $A=a$，则式(11.164)可写为

$$K_{ABCDEF}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\{A\tau + Bs + Ch + Dp + EN' + Fp'\} \qquad (11.165)$$

其中 $B,C,\cdots,F$ 可为正整数 0～9，又规定若为 10 则用 X 代替，11 用 E 代替（注意不要和式(11.165)中的符号 E 混淆，这里的 E 为 0～9 的正整数值）。数组$[A,B,C,D,E,F]$称为 Doodson 编码，当需要还原为真系数 $b,c,\cdots,f$ 时需减 5，和 $X\to10$，$E\to11$“解码”，这一编码数组又称对应分潮波的幅角数。这一步数学意义上相当于完成了二阶引潮力位前述三种周期类型潮波的 Fourier 级数展开，或称调和展开。对太阳的二阶引潮力位同样可按前述步骤作类似推导展开。

第四步：将各分潮波的相对系数 K_{ABCDEF} 根据式(11.154)分别乘以三类周期潮波地方参数与 D_m 的乘积，即长周期为 $2G_0 = D_m\cdot\frac{r}{R}\cdot(3\sin^2\varphi - 1)$；半日波为 $G_1 = D_m\cdot\frac{r}{R}\cdot\cos^2\varphi$；周日波为 $G_2 = D_m\cdot\frac{r}{R}\cdot\sin 2\varphi$。$G_0$，$G_1$ 和 G_2 又称为大地函数。这样就将相对系数 K 变换为各相应周期类潮波的分潮波的振幅。注意每一周期类潮波都被分解为该类的一个分潮波系列，其相角即$\{a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp'\}$。

第五步：将所有月球和太阳引潮力位的余弦或正弦分潮波系列叠加，最后得到引潮力位的Doodson展开式，其中每一分潮波的频率（周期）和振幅是固定的，与时间无关。

按Doodson方法展开，其展开式中包含的项数（分潮数）首先取决于引力位球谐展开式（2.27）所取的最高阶数，其次取决于 C_m/r_m，$\sin\delta_m$ 和 l_m（或 S_1）的展开式（11.161）、（11.162）和（11.163）所取的项数。Doodson在展开时，将系数 K 小于 $0.0001D_m$ 的项全部略去，这正好相当于取至 U_{t2} 和 U_{t3}，略去了 U_{t4} 以上高阶项，由此得到包括两个常潮波加384个正弦和余弦分潮波共386项的展开式。到20世纪70年代，已有多位国外作者将总引潮力位展开为系数 K 小于 $0.0001D_m$ 的505个分潮。我国郗钦文在潮汐调和展开方面做了大量工作，编制了计算机自动展开程序，1987年将引潮力位展开至1178项，1991年又扩展至3 070项。

Doodson编码前三个数对应角频率较大（周期较短）的天文参数（周期分别为1平太阴日，1回归月和一回归年），后三个数对应角频率较小（周期较长）的天文参数（周期分别为8.8年，18.6年和20940年）。因此，Doodson编码既反映了一个分潮波的周期合成，又反映了引潮力的来源和轨道变化因素的影响。若只含月球天文参数或只含太阳天文参数，则该分潮波为月球分潮或太阳分潮。大多数情况是两者兼有的叠加效应，其中以一两个因素影响为主。这样就产生按分潮波周期特征和来源进行划分（分类）和命名的问题，目前是以Doodson编码前三个数（代表周期等于或小于一年的天文参数）作划分。这三个数总称分波数，头两位数称为群数，第一位数称为族数。族数相同的分波数称同属一族，第二位数相同的称同属一群，第三位数相同的称同属于一亚群。分潮波的命名历史上源于Darwin于1883年作的调和展开研究，他将月球、太阳引潮力位的主要半日潮和日潮分别命名为 M_2、S_2、K_1、O_1 等，其中下标"2"和"1"分别表示半日和周日，他的命名一直沿用至今。在Doodson展开中，各分潮波的量值（振幅）差别很大，只有较大的分潮才有实用意义，表11.4给出了目前常用的重要分潮。下节利用卫星测高数据作潮波分析也限于这些分潮。

表11.4　　主要分潮表

分潮名	Doodson 编码	$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}$ {相位}	角速率 ((°)/h)	周期* (d/(h·m))	相对振幅 (10^{-5})	来源 L:月球，S:太阳
S_a	056,554	$\cos(h-p')$	0.041067	365.3^d	1176	S 椭率波
S_{s_a}	057,555	$\cos(2h)$	0.082137	182.6^d	7287	S 赤纬波
M_m	065,455	$\cos(s-p)$	0.544375	27.6^d	8254	L 椭率波
M_f	075,555	$\cos(2s)$	1.098033	13.7^d	15642	L(交点)赤纬波
Q_1	135,655	$\sin(\tau-2s+p)$	13.398661	26^h52^m	7216	L,O_1 椭率分波
O_1	145,555	$\sin(\tau-s)$	13.943036	25^h49^m	37689	L 主周日波
P_1	165,555	$\sin(\tau+s-2h)$	14.958931	24^h04^m	17554	S 主周日波
K_{1m}	165,555	$\sin(\tau+s)$	15.041069	23^h56^m	36233	L 赤纬波

续表

分潮名	Doodson 编码	sin/cos {相位}	角速率 ((°)/h)	周期* (d/(h·m))	相对振幅 (10^{-5})	来源 L:月球,S:太阳
K_{1s}	165,555	$\sin(\tau+s)$	15.041069	23^h56^m	16817	S 赤纬波
N_2	245,655	$\cos(2\tau-s+p)$	28.439730	12^h40^m	17387	L,M_2 的主椭率波
M_2	255,555	$\cos(2\tau)$	28.984104	12^h25^m	90812	L 主半日波
S_2	273,555	$\cos(2\tau+2s-2h)$	30.00000	12^h00^m	42286	S 主半日波
K_{2m}	275,555	$\cos(2\tau+2s)$	30.082137	11^h58^m	7858	L 赤纬波
K_{2s}	275,555	$\cos(2\tau+2s)$	30.082137	11^h58^m	3648	S 赤纬波

* m 指 min。

11.4.2 由潮汐观测数据建立潮汐展开的实用模型

引潮力位的球谐展开、Laplace 展开和 Doodson 的调和展开都是潮汐的理论模型,首先它是在刚体地球假设下的平衡潮,其次引潮力的潮汐效应是设想作用于包围地球表面一层静态无粘性均质水体产生的水体质点的潮汐位移以及地球重力场的潮汐变化。在此假设条件下,根据天文学上精确描述月球、太阳和地球之间相对位置变化关系的天文引潮力位的数学表达式,如果地球真的处于上述假设状态,则由此表达式可精确计算预测地球表面在任何时刻和地点的潮汐,这种潮汐可称"天文潮汐"或理论潮汐。真实地球不能视为完全刚体,而具有粘弹性或滞弹性,在引潮力作用下会产生形变,地表和水体会同时产生潮汐运动,内部物质分布也会有变化,并产生相应的重力场变化(附加重力位)。这种非刚体地球固体部分对引潮力的响应加上平衡潮总称固体潮,在地球表面用仪器观测到的潮汐,就是真实的粘弹地球潮汐,它与平衡潮(理论潮汐)的关系在 2.3 节中已有表述。我们这里主要讨论海潮。在粘弹地球的情况下,海洋的水体不仅与地球固体部分同时作潮汐运动,而且因为海水并未覆盖全球,而且处于复杂的流体运动状态:其水体的潮汐运动,一方面受海底地形起伏、岛屿分布及海岸形状变化(特别是海湾地区)等的流体动力学边界条件的影响,另一方面还要受整个海洋海水运动动力过程的约束。因此实测的潮汐(潮高)可能与平衡潮计算值有较大差异,特别是近岸海岸形状和局部海底地形特殊的海区,二者差别会很大。因此海洋的现场潮汐不可能等同于平衡潮,但其产生的激发力力源相同,潮汐起伏变化的"节奏旋律"应与月球和太阳引潮力的频谱特征一致,特别是开阔的海洋(大洋)应是如此。

从整体海洋来说,潮汐现象属于强迫振动,大洋的潮汐振动传入近岸海域构成胁迫振动,其振幅因水深变浅和地形变窄,能量相对集中而变大,但周期不变,仍和大洋潮汐振动周期一致。由于巨大海水的惯性,海洋对引潮力存在响应迟后,即迟后于平衡潮的天文相角。因此,现场观测到的分潮,平衡潮相应分潮的频率(周期)相同,振幅有差异,同时多了一个相位迟角。用潮汐观测数据建立潮汐展开的实用模型,就是以潮汐的理论模型为基础,建立潮汐的观

测方程，以各分潮的振幅和迟角为待求参数，通常称为相应分潮的调和参数。用调和分析法或最小二乘法求解分潮的调和参数序列，就是潮汐调和展开的实用模型。用其计算预测某时某地的潮汐参数，在模型的精度范围内，就是现场可供使用的潮汐参数。

测量记录海面潮高的仪器称为验潮仪。在海水中安装一个铅直管，称验潮井。它的底部有一小孔，位置低于最低潮高，由于小孔的滤波作用，比潮汐周期小得多的波动受到阻尼衰减，使验潮井中水位升降与潮汐升降基本保持同步。井中水面上置一浮体，井上部安放一台记录仪，是一个钟表机构驱动下作匀速转动的滚筒，用一个绳子将浮体与记录仪上的滑轮相连，滑轮通过衰减机构带动一枝含墨水的笔，使笔平行于卷纸滚筒的轴来回移动，于是在滚筒纸上画上连续记录潮高随时间变化的曲线。这是世界各地沿海或岛屿验潮站观测潮高沿用至今的基本工具。

20 世纪 60 年代发明了一种深海海底压力式水位计，即压力传感验潮仪，通过测定深海海水压强间接测定海面潮高，传感器通过海底电缆将压强电信号传至岸上的记录仪，在压力传感器中同样装有适当的阻尼机构用于消减海面的高频波动。还有其他形式基于水压原理的深海验潮仪，例如气泡式验潮仪，在此不一一介绍。这一新型的验潮仪可以采集深海和远海的潮汐数据，是潮汐观测技术的一大进步，但由于仪器造价昂贵，布设投人费用大，至今采用此类仪器进行深海水位观测数量十分有限，总共不过几百个站位，并且主要分布在北半球。世界上最早的验潮站始建于 1682 年荷兰阿姆斯特丹（Amsterdam）站，其他国家的验潮站有的始建于 19 世纪末，更多的是建于 20 世纪，目前有百年历史的验潮站只有 53 台（赵希涛等，1992 年）。有海洋边界的国家，为发展其海洋领土海洋经济的需要，传统上都是利用其沿海验潮站的多年潮汐观测数据，采用调和分析（Fourier 分析）方法建立局部的引潮位展开的应用模型，用于潮汐预报，其中一般只包括 10 个左右的主分潮（见表 11.4）。

卫星测高技术的出现，为建立全球潮汐模型提供了一个巨大的海洋潮汐信息源，其效果相当于在全球海洋布设了一个高密度的验潮网络，由卫星测高观测得到的瞬时海面高，就是海洋水位观测数据。测高卫星重复轨道在海面的重复轨迹以及交叉点，其中每一个测高观测点都相当一个“验潮站”，但观测采样周期是卫星轨道的重复周期（见表 11.2）。卫星测高应用于海洋潮汐分析，是海洋潮汐观测分析的一个革命性进展，提供了建立高分辨率高精度全球海潮应用模型的可能，并可有效地扩大近岸区域潮汐模型的海域范围，并提高其分辨率和精度。

建立引潮力位调和展开的应用模型首先要给出关于调和参数的观测方程，其基础公式是 Doodson 展开式，并将引潮力位 U_t 转换为潮高 ζ_t（即 $\zeta_t = U_t/g$），其中 g 为重力加速度，可取为平均重力值。由式（11.164）可将 Doodson 引潮力位调和展开的潮高表达式写成如下形式：

$$\zeta(p,t) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{n_i=1}^{N_i}\frac{G'_i(p)}{g}K^{i,n_i}_{a,b,c,d,e,f}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\{a\tau + bs + dp + eN' + fp'\} \qquad (11.166)$$

其中：$i=0,1,2$ 分别表示周期为长周期、半日和周日三类潮波；N_i 表示第 i 类分潮数；$G'_i(p)$ 为测点 p 的大地函数（$G'_0(p) = 2G_0(p)$，$G'_1(p) = G_1(p)$，$G'_2(p) = G_2(p)$）；$\zeta(p,t)$ 表示测点 p 在时刻 t 的潮高，τ 也用 t 代替；p 表示测点地理位置，在潮汐分析中测点的位置坐标总是已知的，故以下的表达式中均略去位置参数 p。在式（11.166）中同时包含正弦波和余弦波，式中的正弦波用 $x_i = \cos(x_i + l\,90°)$，变换为余弦波表示，其中 l 取 ±1 或 ±3，视 x 的正负或所在象限而定。若分潮波为余弦波，则 $l=0$，有时也称 l 为第七个 Doodson 编码。

将所有分潮相角 $x_i = (a\tau + bs + ch + dp + eN' + fp' + l\,90°)_i$ 用角速度和时间表示，可写成如下形式：

$$x_i = (a\dot{\tau} + b\dot{s} + c\dot{h} + d\dot{p} + e\dot{N}' + f\dot{p}')_i t + l\,90° \tag{11.167}$$

或

$$x_i = \sigma_i \cdot t + l\,90°, \sigma_i = (a\dot{\tau} + b\dot{s} + c\dot{h} + d\dot{p} + e\dot{N}' + f\dot{p}')_i \tag{11.168}$$

其中各天文参数上面的“·”表示该天文参数的角速度($\partial/\partial t$),σ_i 表示分波总相角的合成角速率,其中应注意月球地方时(平太阴地方时)τ 与世界时的换算关系(见式(11.159))。现在我们可以将式(11.166)写成观测方程的形式:

$$h(t) = h_{\mathrm{MSL}} + \sum_{i=1}^{m} H_i \cos(\sigma_i t - \theta_i) \tag{11.169}$$

式中:$h(t)$ 为瞬时海面高;h_{MSL} 为平均海面高;H 为振幅;θ 为迟角,即待求调和参数。

这里要注意潮高和平均海面高的参考点或参考面,如果采用的是验潮站观测数据,则参考点是记录装置的“零”刻度,简称水尺零点或验潮站零点,相当于验潮站上垂直水位尺上的一固定点(零点),潮高和平均海面高都从这一点起算;如果采用的是卫星测高数据,则潮高和平均海面高是以选定的参考椭球面为参考面,即测高瞬时海面和平均海面的大地高,而潮波的振动是相对于平均海面量度的,因此与参考点或参考面的选择无关,只是观测方程观测量及平均海面的几何含义不同。同时要注意观测方程中潮高、平均海面高、振幅和迟角都是测点位置坐标的函数,如前所述原因,方程中略写了位置参数。

在潮高观测方程中,原则上只包括天文引潮力展开的天文分潮,但海洋潮汐的实际形态还取决于海洋动力环境的作用,这种作用因素往往是复杂而多样的,其中最显著的是周期性的气象因素作用,由此引起周期性海面变化,其相对稳定部分和天文潮复合产生一种天文-气象分潮,主要包括周年天文-气象分潮 S_a 和半年周期天文-气象分潮 S_{sa}。在天文引潮力位展开中所占比例非常小,而由气象因素产生的这两个周期的海面变化都有很大的变化幅度,实际上是长周期气象分潮,通常也归入潮汐调和分析应用模型中。在近岸浅水海区,当潮差与水深之比较大而不能忽略时,加之地形变窄,能量又相对集中,不但振幅比远深海显著增大,而且因为高潮和低潮时刻水深不同,高潮到达速度快于低潮到达速度,使潮波变形。浅水区海底摩擦阻力大,是导致潮波变形的另一原因。潮波变形产生一系列浅水分潮。在许多海湾,这样的特殊海区还会产生潮汐的共振,当海湾水体的固有振动周期接近天文潮周期时,引起能量的聚集,最典型的潮汐共振现象是加拿大东部芬地湾,湾底附近潮差只有5m,湾顶附近的潮差则达到15m。长度和水深满足或接近潮汐共振条件的海湾都会出现较大潮差。各种海洋动力环境对潮汐作用机制的深入探讨是潮汐学的范围,这只是进一步说明理论天文潮与海洋现场的海潮产生差别的一些原因。

在潮高观测方程中,理论上应包括所有实际可能出现的不同周期的分潮,由于受观测采样的时间间隔 Δt 和总的观测时间长度 T 所限,在观测数据中既不可能包含周期短于 $2\Delta t$ 分波的信息,也不可能包含周期长于 $2T$ 的分波信息,那么在观测方程中就不应包含这些没有观测信息的分波参数,否则参数的求解就会存在不适定或欠适定问题。例如,有一年的验潮站逐时观测数据,可以分辨不同族群和亚群的分潮,但无法解释比亚群更细致的分潮频谱,其中还包括海洋动力作用产生的一些“变形分潮”,而实际的潮汐在这些分潮频率上分布着谱能,这些分潮频率往往是与一些大谱能分潮(主分潮)频率接近的小分潮,称伴随分潮,它们对邻近大分潮的分析和估计存在扰动作用。为避免过度参数化,获得稳定解,更精确地分析出所需分潮,往往将频差比亚群之间频差更高的分潮(角速率差别在 $\dot{\phi}$,$\dot{N}$ 和 $\dot{p}'$ 的量级上,即 0.000002 ~ 0.005(°/h))进行合并,这种合并的数学处理详见文献(陈宗镛等,1990)。其结果是在潮高观

测方程(11.169)合并项中附加一个称为交点因子的振幅系数,在相角中附加一项各为交点的正的迟角改正量,其合成形式为

$$\sum_{i=1}^{n} H_i\cos(\sigma_i t - \theta_i) = fH^m\cos(\sigma t + u - \theta^m) \tag{11.170}$$

式中:n 为同一亚群的分潮数,其中一个为主分潮,其余为伴随分潮;H^m 和 θ^m 为主分潮振幅和迟角,σ 为合成角频率;f 为交点因子;u 为交点订正角。

交点因子和交点订正角的引入,是基于邻近分潮之间响应规律性的假设,即认为分潮实际振幅之间的比值与平衡潮相应分潮振幅之间的比值相等,且相应分潮的迟角相等,即

$$H' = \rho' H^m, \quad \theta' = \theta^m \tag{11.171}$$

式中:H' 为亚群中的伴随分潮振幅;H^m 为亚群中选取的平衡潮主分潮振幅;ρ' 为相应伴随分潮振幅与主分潮振幅之比值。

由此,f 和 u 可通过以下公式计算确定:

$$\left.\begin{aligned} f\cos u &= \sum \rho^i \cos(\Delta d^i p + \Delta e^i N' + \Delta f^i p' + \Delta l^i 90°) \\ f\sin u &= \sum \rho^i \sin(\Delta d^i p + \Delta e^i N' + \Delta f^i p' + \Delta l^i 90°) \end{aligned}\right\} \tag{11.172}$$

其中:$\Delta d^i, \Delta e^i, \cdots, \Delta l^i$ 为伴随分潮与主分潮 Doodson 编码之差。

注意:浅水分潮的交点因子和交点订正角应根据产生浅水分潮的源分潮导出,详见文献(陈宗镛等,1990)。带交点因子和交点订正角的潮高观测方程的一般形式为:

$$h(t) = h_{MSL} + \sum_{i=1}^{m} f_i H_i \cos(\sigma_i t + u_i - \theta_i) \tag{11.173}$$

交点因子和交点订正角的变化周期基本上为月球轨道升交点黄经 N 的变化周期(18.6 年),这也是交点订正角改正名称的由来。天文参数 p' 的周期甚长(20940 年),对分潮影响很小,所以,若验潮站有 18.6 年常规整时观测序列,理论上可直接分析足够多的分潮而无须交点改正。

由潮高观测数据和潮高观测方程求解分潮的调和常数(振幅和迟角)有多种方法。经典的方法就是调和分析法,典型的算法有 Darwin 法、Doodson 法和最小二乘法。前二者都是基于滤波的概念实现主要分潮的分离,Darwin 法采用分潮系(在每个分潮系中各分潮频率为严格倍数关系)分离的思路,将观测数据投影到不同的正交基系列,再按 Fourier 分析步骤得到各分潮调和常数。Doodson 法则采用分潮族分离的思路,先对每个观测日的数据基于 Fourier 分析法分离出日潮族和半日潮族等,再对不同日的 Fourier 系数组合求得分潮调和常数,此类方法在数据处理上都需要采取一些近似,且对数据采样规则也要求较严。最小二乘法则是在观测数据与潮高观测方程(模型)之间直接进行基于最小二乘准则的拟合逼近,求解调和常数统计意义上的最优估计,对数据长度和采样规则的要求低于滤波概念下的 Fourier 分析法,具有一定的灵活性。因此,最小二乘法已成为现代潮汐调和分析的一种标准方法;

常规最小二乘法处理的是关于位置参数的线性观测方程,对非线性方程需要作线性化处理。显然,潮高观测方程(11.173)是关于待求调和常数 H^m 和 θ^m 的非线性方程,可用以下简单变化使之化为线性形式。令

$$\left.\begin{aligned} H_0^c &= H\cos\theta \\ H_0^s &= H\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{11.174}$$

或

$$\left.\begin{aligned}H^c &= fH\cos(\theta - u)\\ H^s &= fH\sin(\theta - u)\end{aligned}\right\}\tag{11.175}$$

在式(11.174)中，转换参数 H_0^c 和 H_0^s 不包含时变量 f 和 u，而式(11.175)中的转换参数 H^c 和 H^s 则包含 f 和 u。由于 f 和 u 的变化周期长，在一个相对较短的观测时段中可近似认为是常数。只要已知观测时间，f 和 u 就可以计算确定。若采用式(11.174)的定义，则可将(11.173)中的 $\cos[(\sigma_i t + u_i) - \theta_i]$ 展开，即

$$h(t) = h_{msl} + \sum_{i=1}^{m}[f_i\cos(\sigma_i t + u_i)H_{0i}^c + f_i\sin(\sigma_i t + u_i)H_{0i}^s]\tag{11.176}$$

按式(11.175)的定义，将 $\cos[\sigma_i t - (\theta_i - u_i)]$ 展开，即

$$h(t) = h_{msl} + \sum_{i=1}^{m}(\cos\sigma_i t \cdot H_i^c + \sin\sigma_i t_i \cdot H_i^s)\tag{11.177}$$

式(11.176)或式(11.177)都是关于未知参数 H_0^c、H_0^s 或 H^c、H^s 的线性观测方程，对于给定的观测时刻 t，其系数 $f_i\cos(\sigma_i t + u_i)$、$f_i\sin(\sigma_i t + u_i)$ 或 $\cos\sigma_i t$、$\sin\sigma_i t_i$ 均可由相应分潮的已知角频率和 f、u 的解算公式计算得到。应用式(11.177)形式的观测方程，当数据采用等间隔采样时，可以很容易直接生成求解参数最小二乘估计的法方程。最后，相应分潮的调和常数可通过以下变换得到：

$$\left.\begin{aligned}H &= \sqrt{(H_0^c)^2 + (H_0^s)^2}\\ \theta &= \arctan\frac{H_0^s}{H_0^c}\end{aligned}\right\}\tag{11.178}$$

或

$$\left.\begin{aligned}H &= \sqrt{(H^c)^2 + (H^s)^2}/f\\ \theta &= \arctan\frac{H_0^s}{H_0^c} + u\end{aligned}\right\}\tag{11.179}$$

对于时间 t，在计算过程中通常选择一个参考时刻 t_0，引潮力位展开的相角式是线性变化的(见式(11.167)和式(11.168))，即有

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \sigma_i(t - t_0)\tag{11.180}$$

通常简写为

$$x_i(t) = x_{i0} + \sigma_i t'\tag{11.181}$$

这里的 t' 从 t_0 起算，但常用符号 t 代替 t'，只需注意 t 是相对 t_0 的时间，这样在方程(11.173)的 cos 相角中加上一个常相角 x_{i0}，以线性化方程(11.176)和(11.177)中的相角上的此项。调和常数 H 和 θ 的解算表达式(11.178)不变，而式(11.179)则成为

$$\left.\begin{aligned}H &= \sqrt{(H^c)^2 + (H^s)^2}/f\\ \theta &= \arctan\frac{H_0^s}{H_0^c} + x_0 + u\end{aligned}\right\}\tag{11.182}$$

除上述传统方法外，Munk and Cartwright (1966) 剔除一种潮汐响应分析概念及相应的潮汐分析数据处理方法，目前在国际上已得到广泛应用。其基本概念是将整个海洋包括大气看成一个开放的物理系统，引潮力和太阳的辐射能作为对此物理系统的输入，系统对输入的响应由响应(权)函数表达，输出为潮汐(潮高)变化，由此建立输入—输出响应模型，将输出做观测

量，由天文参数做变量的引潮力位展开，作为已知的模型输入；太阳辐射产生的非引力分潮统称为辐射潮，其潮汐效应包括直接效应（加热）和间接效应（风效应），也可通过引入太阳辐射位的球函数展开作为已知的输入模型。这样，利用作为输出的已知观测数据和作为输入的已知引潮力位和太阳辐射位展开模型，可求解响应（权）函数，最后通过 Fourier 变换可求出各天文分潮和辐射分潮的相应振幅和迟角参数。响应方法最大的优点是可以把引力效应和非引力效应分开，并可提高潮汐预报的准确度，但要求观测记录长度至少一年以上。该方法的物理数学推导比较复杂，有兴趣进一步了解其细节的读者可阅读文献（Munk and Cartwright，1996；暴景阳，2002）。

以上介绍的是利用潮汐（潮高）观测数据，通过建立调和分析概念的潮高观测方程或响应概念的潮高观测方程求解分潮调和常数的方法，属潮汐静力学范围。海洋学家还可以根据潮汐动力学理论建立的潮波方程（偏微分方程），通过解算相应边值问题确定潮波模型，在这里，潮汐现象被看成海水在引潮力、重力、压强梯度力、摩擦力和科里奥利（Corioris）力等力的作用激发下产生的受迫振动形成的波的传播过程。这一方法在 20 世纪 50～60 年代后曾得到重视和发展，1980 年出现了著名的 Schwiderski 全球海潮模型就是基于这一方法，曾作为早期卫星测高数据处理采用的标准模型。1995 年 Provost 等应用解潮波方程的有限元法建立了一个有较高精度和分辨率的全球海潮模型。他们的解算都融入全球一定数量的不同类型现场观测数据。我国海洋研究部门在近 20 多年来用这种方法曾分别给出渤海、黄海、东海和南海以及我国全海域的潮波模型（方国洪等，1994），但不同研究者的结果往往存在较大差别。海洋流体动力学海潮模型，除偏微分方程本身的复杂性外，还需要有关的且难以可靠确定的物理海洋参数，并需要较可靠的边界条件和水深信息，在解算时往往需作出各种近似假设，其模型的改善很大程度上仍依赖于直接观测数据（暴景阳等，2000）。

11.4.3 卫星测高数据潮汐信号提取的有关问题

上两节介绍了建立潮汐的理论模型和移用潮汐观测数据建立潮汐应用模型的基本理论和经典方法，并指出卫星测高数据也是一种潮汐观测数据，而且是分布于全球海洋的高密度数据，不仅可用于建立局部海域潮汐模型，更可用于建立全球海潮模型，同样可采用经典方法或响应法。本书仅讨论利用卫星测高数据采用常规的最小二乘法建立海潮模型。

海洋潮汐现象是海面任一点潮高变化在时间上的周期性连续过程，即时间的周期性连续函数，任一时刻卫星测高测定的瞬时海面高都含有潮汐信号，但建立海潮模型需要在一个确定的点位上有足够长的时序观测数据，这就不仅要求测高卫星在海面上有精密重复轨迹，还要有足够长的飞行寿命。

在重复测点上测定的瞬时海面高时序采样数据中，假定观测无误差，不仅包含潮汐涨落信号，尽管它有可能是海面高变化的主要成分，还包含了各种非潮汐海面变化，诸如逆气压效应、时变海流产生的海面高变化、风和温度等的动力效应引起增减水的海面变化（如果不考虑辐射潮）等。此外，在 11.2.2 节讨论时变海面高的影响时，提到卫星测高所观测到的海面潮汐变化为绝对的地心潮，即以地心地固坐标系为参照的潮汐变化，又称为弹性潮，而建立海潮模型所需要的潮高观测数据是以海底或地球表面，或实际采用的长期稳定的平均海面为参照物的潮高，称为相对潮，或者大致可以说是瞬时海面相对地球固体表面的潮汐变化，相对潮与地心潮之差包括地心潮中的固体潮、海洋负荷潮和极潮等。因此，在利用卫星测高数据进行潮汐分析的数据处理中需要加上上述因素影响的改正，可统称地球物理改正。在测高数据中又不可

避免地有各种观测误差，除观测的随机噪声外还有各种因素产生的系统性误差，应利用响应系统误差的理论或经验模型对测高数据加以改正，这些系统误差的来源在11.2.2节中作了比较详细的介绍和讨论，在此不再重复。

执行精密重复轨道任务的测高卫星（见11.2.3节表11.2）提供了卫星海面轨迹点上的重复观测，但这个“卫星验潮站”不能连续或以任意时间间隔观测，其采样间隔是卫星轨迹的重复周期，因而根据这样的固定点采样数据进行潮汐的调和分析要受到这种特定采样规律产生的混叠效应影响。根据采样定律，设采样的时间间隔为 Δt，对于给定的采样时间序列可恢复信号的最高频率为 Nyquist 频率，即 $1/2\Delta t$，对应的信号周期为 $2\Delta t$。例如对 T/P 卫星来说，能直接恢复的信号周期大于20d（即最高频率为0.0504d），远大于作为潮汐主体的半日潮和全日潮，小于20d周期的分潮信号将混叠到长于此周期的频段上，即产生这种分潮完整周期信号的“拉长”分布。根据谱分析理论，混叠频率对应的最小周期为混叠周期，用 T_a 表示，计算公式为

$$T_a = \frac{360° \cdot \Delta t}{\mathrm{Mod}\left(\frac{\sigma \Delta t}{360°}\right)} \tag{11.183}$$

式中：σ 为被混叠的高频信号的角速度（(°)/h）。Mod 为数论中的同余算符，即一数被一整数除的余数（例如：$\mathrm{Mod}\left(\frac{16.43}{3}\right) = 1.43$），$T_a$ 表达式的分母表示已知高频分潮信号在采样时间间隔内振动若干个整周后不足一周的部分（相角），取值区间为[0°～180°]。即若余数大于180°，则应用360°减去余数为此时 Mod 的取值结果。由式（11.183）可计算每一分潮对各类测高卫星重复采样周期的混叠周期。这里以 T/P 星（目前用于潮汐分析的主要测高卫星）为例，其重复采样周期 $\Delta t = 9.9156$ 天，表11.5列出了12个主分潮的混叠周期。

表11.5　**12个分潮在 T/P 海面轨迹上重复采样的混叠周期**

分潮	S_a	S_{sa}	M_m	M_f	Q_1	O_1
角速率 σ(°)/h	0.041	0.082	0.544	1.098	13.40	13.94
混叠周期(d)	365.3	182.6	27.6	36.2	69.4	45.7
分潮	P_1	K_1	N_2	M_2	S_2	K_2
角速率 σ(°)/h	14.96	15.04	28.44	28.98	30.00	30.08
混叠周期(d)	88.9	173.2	49.5	62.1	58.7	86.6

另一个需要解决的问题是：上述各分潮的混叠周期长短相差较大，那么要由重复采样数据实现两个混叠分潮（对应周为 T_i 和 T_j）可靠分辨需要多长观测时间 T_s。同样，根据谱分析理论，有以下 Rayleigh 准则：

$$T_s \geqslant \left| \frac{T_i T_j}{T_i - T_j} \right| \tag{11.184}$$

由上式可计算表11.5中12个主分潮两两分离所需要的最短时间，列于表11.6（暴景阳，2002）。

表 11.6　　利用 T/P 卫星重复采样数据分辨 12 个主分潮所需观测时间(a)

	S_{sa}	M_m	M_f	Q_1	O_1	P_1	K_1	N_2	M_2	S_2	K_2
S_a	1.00	0.08	0.11	0.23	0.14	0.32	0.90	0.16	0.20	0.19	0.31
S_{sa}		0.09	0.12	0.31	0.17	0.47	9.22	0.19	0.26	0.24	0.45
M_m			0.32	0.13	0.19	0.11	0.09	0.17	0.14	0.1	0.11
M_f				0.21	0.47	0.17	0.13	0.37	0.24	0.26	0.17
Q_1					0.37	0.86	0.32	0.47	1.63	1.05	0.95
O_1						0.26	0.17	1.63	0.47	0.56	0.27
P_1							0.50	0.31	0.56	0.47	9.17
K_1								0.19	0.27	0.24	0.47
N_2									0.67	0.86	0.32
M_2										2.97	0.60
S_2											0.50

表 11.6 中下画横线的为需一年以上的观测时间，由表 11.4 所列各分潮的周期可按式(11.184)计算验潮站每 1 小时采样间隔情况下计算与表 11.6 相应的分辨时间表，读者可自行计算。可以发现，一些分潮的分辨时间和 T/P 卫星采样间隔所需分辨时间分辨相同，例如，P_1 与 K_1，S_2 与 K_2 分辨时间都分别是 0.5 年；而另一些分潮（主要是不同潮族的分潮）则相差甚大，例如 S_{sa} 与 K_1，P_1 与 K_2，和 M_2 与 S_2，按 1h 采样间隔，所需分辨观测时间分别为 1.0d，10.0d 和 14.9d；按 T/P 卫星采样间隔(9.9156d)所需分辨观测时间分别为 9.22a，9.17a 和 2.97a。至 2004 年，T/P 及其后续卫星观测数据已累积 11a 多，因此可以分辨恢复表 11.6 中的所有主分潮。至于其他测高卫星，如 Geosat，ERS1/2 及二者的后续卫星，其精密重复周期分别为 17.05d 和 35d，则有的分潮混叠周期很长，甚至为无穷大。例如，对 Geosat 卫星，P_1 的混叠周期为 14a，对 ERS-1/2 卫星，S_2 的混叠周期为无穷大。因此，比较 Geosat 和 ERS-1/2 卫星来说，T/P 卫星的轨道设计用于研究海洋潮汐充分估计了潮汐的混叠问题和主分潮的可分辨性。

以上是对测高卫星的一个采样点进行的理论分析结果，但对测高轨迹在地球海洋构成的采样网络来说，其采样的时空规律与电点采样的情况相比发生了复杂的变化。在交叉点上，上升弧和下降弧的时间间隔在 5d 以内，而且不同纬线的交叉点上交错时间不同；T/P 卫星相邻平行轨迹同纬度的两采样点的采样时间间隔约为 3d。这样，当我们把轨迹的交叉点或进而将一个区域（宽度不小于平行轨迹间距）等效为一个验潮站时，复杂的“等效采样”规律（超越了等间隔采样限制）显然有利于分潮的分辨。目前普遍采用的调和分析最小二乘法，分潮的可分辨性必然会反映在法方程的数学性质（即解的适定性）上。若其中有一对分潮的可分辨性低，或不可分辨，则相应的法方程将是欠适定或不适定的，即其条件数或是过大，或是奇异的（亏秩）。由此，经研究试验，提出以下可分辨性准则（暴景阳，2002）：

$$\mathrm{Cond}(N) = \| N \|_2 \| N^{-1} \|_2 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \leqslant 10 \tag{11.185}$$

式中：N 为法方程系数矩阵，λ 是该矩阵的特征值，$\| \cdot \|_2$ 是欧几里得范数。

式(11.185)是通常在计算数学中判别法矩阵为非病态或者良性的公认准则。试验结果表明，选取 S_a，S_{sa}，Q_1，O_1，P_1，K_1，N_2，M_2，S_2 和 $K_2$10 个主分潮，取两年的测高 T/P 数据，则所有的交叉点法方程都满足准则要求，条件数最大值在纬度为 5.94°的交叉点上，其值为3.64，表明法方程的结构已相当好，对上述 S_{sa}、K_1 以及 P_1 和 K_2，要求的分辨时间可从 9a 缩短到 2a，这显然是得益于 T/P 是交叉点网络的"等数采样"间隔明显小于 10d 周期。

在上一节中已经指出在近岸海域(包括一些边缘海和串封闭海域)的潮汐频谱成分要比开阔大洋地区复杂得多，用卫星测高数据建立的包含十几个主分潮的全球海潮模型用于近岸海域，与用验潮站观测数据分析的结果可能有相当大的偏差。例如在我国南海，由全球模型计算的潮高和实际潮高之差可达 50cm，近岸区域海其局部特征很难用一个全球模型来模拟。在开阔海洋潮差(海潮涨落之差)一般在 1m 左右，而近岸海域潮差可达数米，并常呈现不同海域明显的局部特征。以我国海域和邻近海域为例(陈宝镛，1992)，我国黄海沿岸潮差大都在 3 ~ 4m，在黄海和渤海，东岸的潮差比西岸的大，朝鲜半岛不少地方潮差在 8m 以上。渤海潮差在 3 ~ 4m。东海两侧中国沿岸，等潮差线几乎与海岸线平行，且越近大陆，潮差显著增大，福建沿海潮差为 6m 左右，浙江温州湾潮差可达 8m。南海北岸潮差较大，广州湾附近约为 3.5m，而海南岛东岸只有 1.8m，整个南海北部湾潮差最大为 3 ~ 5m。以上反映了我国海域潮汐的局部特征，因此这里提出的问题是：在利用卫星测高数据可以建立使用于开阔大洋的全球海潮模型。对于近岸海域，必须联合尽可能多的验潮站观测数据，建立可准确预报该海域甚至个别海域的海潮的局部性海潮模型，或对全球海潮模型进行改进，使之不仅可适用于开阔海洋，同时也使用于近岸海域，这正成为海潮模型研究中普遍关注的问题。

11.4.4 卫星测高数据潮汐信号的调和分析

根据冬至分潮的混叠周期及其间基本可分辨所需观测时间，若有足够长时间跨度的测高观测数据，则可对数据中的潮汐信号进行调和分析，求解一个海区或者全球海面测高轨迹上任一点各主分潮的调和常数，即相应分潮的振幅和近角。它是计算点点位的函数，结果可用每一分潮的调和常数的等直线表示，也可用格网化数据表示，还可以在一个适当大小范围的海区，选择适当的拟合函数(如多项式、多面函数或球函数等)表达每一分潮调和常数的空间变化。这些表达方式均可称为一种潮汐模型。在实用上，各海洋国家都在其重要港口和航道区编制专用的"潮汐表"，用于潮汐预报，其中包括有关潮汐信息的数表和若干主分潮的同潮图(等振幅线，等潮时线，即高潮时刻相同点的连线)。潮汐模型有精度和分辨率质量指标，精度主要指调和常数的估计精度，分辨率指空间分辨的尺度，如格网数值模型中格网划分的尺度大小，当然还有预报误差指标等。

卫星测高观测值即海面测高轨迹上点的大地高、原始海面高观测值除包含潮汐信号外，还包含其他非海潮信号的时变信号以及各种误差或偏差成分(见 11.2.2 节)。因此为潮汐分析作准备的数据预处理，即是从原始的测高观测数据中排除掉(或者说除去)所有非潮汐信号和观测误差或偏差，完全提取出带随机观测噪声的海潮信号，即相对一个基准面的潮高值(参见 11.4.2 节)。卫星测高数据处理定义海潮潮高则是以不随时间变化(至少是在采集数据的时间跨度期间不变)的稳态平均海面作为基准面。因此在数据处理中，不仅要作仪器误差效应

改正、测高雷达脉冲信号传播路径上的延迟改正(大气干分量和湿分量延迟改正)和海面有效波高改正、电磁偏差改正,还要扣除固体潮、符合潮、极潮、由海流产生的适度海面高以及逆气压等地球物理因素产生的动态变化,由此确定一个稳态的平均海面高。所有上述改正大都有一个相应的改正模型,并载于测高数据产品用户使用指南中供用户使用。有关改正模型的讨论和改正方法在此从略,读者可参阅有关文献(如王海瑛,1999;翟国君等,2000;姜卫平等,2001;暴景阳,2002)。

利用经过预处理的测高数据可以根据式(11.176)建立调和分析的观测方程,式(11.176)右边第二项即以平均海面高(h_{msl})为基准的潮高信号 $S(t)$(比较式(11.169)),而式中的 $h(t)$ 和 h_{msl} 则是以参考椭球为基准面的瞬时海面高观测值和平均海面高,平均海面高 h_{msl} 是数据分析时间跨度期间的平均海面高,选取一个已知的先验平均海面模型 h_{msl} 作参考模型。令

$$h_{msl} = h_{msl}^{R} + \Delta h_{msl} \tag{11.186}$$

$$\Delta h(t) = h(t) - h_{msl}^{R} \tag{11.187}$$

式中:Δh_{msl} 为平均海面模型偏差,在观测方程中作为待求参数;$\Delta h(t)$ 为残差海面高观测值,则式(11.176)可写为

$$\Delta h(t) = \Delta h_{msl} + \sum_{i=1}^{m} [f_i \cos(\sigma_i t + u_i) H_{0i}^{c} + f_i \sin(\sigma_i t + u_i) H_{0i}^{s}] + \varepsilon \tag{11.188}$$

上式即测高数据潮汐调和分析的一种实用观测方程。式中右边潮高信号部分中各符号的意义见 11.4.2 节,这里,待求参数为 Δh_{msl}、H_{0i}^{c} 和 H_{0i}^{S},观测量为 $\Delta h(t)$,ε 为观测噪声。写成矩阵形式为:

$$\Delta h(t) = P\alpha + \varepsilon \tag{11.189}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} = (&1, f_1\cos(\sigma_1 t + u_1), f_1\sin(\sigma_1 t + u_1), \cdots, \\ &f_m\cos(\sigma_m t + u_m), f_m\sin(\sigma_m t + u_m)) \end{aligned} \tag{11.190}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\Delta h_{msl}, H_{01}^{c}, H_{01}^{s}, \cdots, H_{0m}^{c}, H_{0m}^{s})^{\mathrm{T}} = (\alpha^1, \alpha^2, \cdots, \alpha^{2m+1})^{\mathrm{T}} \tag{11.191}$$

将 α 的各分量用地理位置的函数模拟:

$$\alpha^i = f_i(\varphi, \lambda) \tag{11.192}$$

这里 f_i 采用三阶多项式模型,即

$$\begin{aligned} \alpha^i &= \alpha_0^i + \alpha_1^i \Delta\varphi + \alpha_2^i \Delta\lambda + \alpha_3^i \Delta\varphi\Delta\lambda + \cdots + \alpha_8^i \Delta\varphi^3 + \alpha_9^i \Delta\lambda^3 \\ &= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\beta}^i \end{aligned} \tag{11.193}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q} &= (1, \Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta\varphi\Delta\lambda, \cdots, \Delta\varphi^3, \Delta\lambda^3) \\ \boldsymbol{\beta}^i &= (\alpha_0^i, \alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i, \cdots, \alpha_8^i, \alpha_9^i)^{\mathrm{T}} \\ \Delta\varphi &= \varphi - \varphi_0,\ \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 \end{aligned}\right\} \tag{11.194}$$

(φ_0, λ_0) 为拟合节点,取计算海域中心位置。将式(11.193)代入式(11.191)和式(11.189)得

$$\Delta h^i(t) = \boldsymbol{P}^j [\boldsymbol{Q}^i \boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}} + \varepsilon_j \tag{11.195}$$

式中:$j(j = 1, 2, \cdots, n)$ 为测点号,$\boldsymbol{\beta} = (\beta^1, \beta^2, \cdots, \beta^{2m+1})$ 为 $10 \times (2m+1)$ 阶矩阵。定义以下两个"拉直"向量:

$$\boldsymbol{X} = [(\beta^1)^{\mathrm{T}}, (\beta^2)^{\mathrm{T}}, \cdots, (\beta^{2m+1})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{11.196}$$

$$\boldsymbol{A}_j = (P_1^j Q^j, P_2^j Q^j, \cdots, P_{2m+1}^j Q^j) \tag{11.197}$$

展开式(11.195)右端得矩阵乘积,顾及以上两式,可得以下矩阵观测方程:

$$L = BX + \Delta \tag{11.198}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} L &= (\Delta h^1, \Delta h^2, \cdots, \Delta h^n)^{\mathrm{T}} \\ B &= (A_1, A_2, \cdots, A_n)^{\mathrm{T}} \\ \Delta &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{11.199}$$

在最小二乘意义下求解式(11.198)，得待求参数估计：

$$X = (B^{\mathrm{T}} - B)^{-1} B^{\mathrm{T}} - L \tag{11.200}$$

向量 X 即式(11.193)的模型系数 α_k^i($i = 1, 2, \cdots, 2m+1; k = 0, 1, 2, \cdots, 9$)。由式(11.191)及式(11.174)，可求得各分潮的调和常数如下：

$$\left.\begin{aligned} H_i &= H_i(\varphi, \lambda) = \sqrt{(H_{0i}^c)^2 + (H_{0i}^s)^2} \\ \theta_i &= \theta_i(\varphi, \lambda) = \arctan \frac{H_{0i}^s}{H_{0i}^c} \\ &(i = 1, 2, \cdots, m) \end{aligned}\right\} \tag{11.201}$$

以上两式即第 i 个分潮的振幅和迟角的空间分布模型，并可据此制作潮汐表和潮波图。对观测方程(11.188)，通常是直接解算每一测点平均海面偏差 $\Delta h_{\mathrm{msl}}^i$ 和调和常数 H_{0i}^c、H_{0i}^s(H_i, θ_i)，而不引入参数转换式(11.193)，最后再根据每个测点各分潮调和常数得解，利用多项式拟合(或其他拟合函数)按最小二乘法解算拟合系数 α_k^i。这里介绍的求解拟合系数的方法，有充分利用测高数据高分辨空间采样率和相邻测点采样时间交错的整体效应，有利于提高分波的可分辨性和解的可靠性。

基于测高数据和观测方程(11.188)按最小二乘法求解分潮调和常数，同时确定平均海面，就观测数据的利用方式和观测方程的组成上有多种不同的处理方法。例如，有交叉点分析法、沿轨分析法、分块分析法等。

交叉点分析法是利用交叉点一个邻域内的测高数据作潮汐调和分析，在一个重复周期内，交叉点邻域内有两个观测序列，即上升轨迹观测序列和下降轨迹观测序列，两序列的时间差为上升轨迹与下降轨迹交错的时间差，对 T/P 卫星大约在 0.5d 到 4.5d 之间。交叉点附近(注意严格的交叉点位上一般都不是测高观测点)，数据采样规律的这一特点可有效抑制因混叠效应产生的分潮之间的干扰。交叉点邻域通常可取 0.1°范围，由此范围内所有重复周期上升和下降轨迹上的测高观测值建立潮汐调和分析观测方程(11.188)，由式(11.200)和式(11.201)求解拟合函数模型参数和调和常数。

沿轨分析法是在重复的上升轨迹(或下降轨迹)上每隔一定的纬度差(通常取 0.2°左右)取一点为潮汐分析计算点，并注意把交叉点均取为计算点，取同一轨迹上每个计算点 0.1°邻域内的测高观测值构成计算点的观测序列，并形成相应的观测方程。调和常数的求解同交叉点法。

分块分析法(文献上称 Binning 法)是将整个计算海区划分为许多尺度相同、大小适当的矩形区块，每一矩形区至少覆盖四条两两平行的轨迹，但又要求在此矩形区内潮汐场的梯度变化足够小。其基本原理是假定一个区块内潮汐变化有相同形态，且视为一点(取矩形中心点)的变化行为，并作潮汐形态归一化处理，将每一分块中的测高观测值都纳入到一个潮高观测方程，实质是以一点的潮汐代表一个区块的潮汐，这种分区方法适用于潮汐变化“平滑”的开阔海洋，较早的一些著名全球海潮模型(例如 CR 模型)就是用此法建立的，矩形的大小为

$1.5° \times 1°$。

交叉点分析法的明显不足是舍弃了非交叉点上大量观测值，降低了空间分辨率，其优点除前述可抑制分潮之间的干扰，改善分潮之间的可分别性外，解算过程相对容易；沿轨分析法提高了数据的利用率，一定程度改善了空间分辨率，同样可改善分潮的可分辨性，但计算过程略比交叉点分析复杂。分块分析法显然因将一个区块内的潮汐规律等同看待而带有一定的近似性，这种平均代表作用会滤去一些潮汐场的小尺度特征，使潮汐参数空间分布过于光滑，但可有效地降低整个解算过程的规模，适于解算主要反映开阔海洋潮汐场的全球海潮模型。

对于沿岸潮汐模型的建立，由于沿岸海域可用的测高数据相对稀少，而潮波成分又较复杂，因此需要联合尽可能多的验潮站点的水位观测数据，使建立的模型能模拟沿岸潮汐场的局部特征，并能分析一些浅水潮波。联合验潮站数据的方法是在测高潮汐观测方程中加入验潮数据的约束。当卫星轨迹通过海上某验潮站点时，验潮站现场观测获得的潮汐信号（潮高）可作为潮汐分析的基准，所用观测量是卫星测高点 P 与验潮点 A 之间的潮高，即

$$\begin{aligned}\Delta\xi_{AP}(t) &= \xi(P,t) - \xi(A,t) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left[f_i H_i(P)\cos(\sigma_i t + u_i - \theta_i(P))\right. \\ &\quad \left. - f_i H_i(A)\cos(\sigma_i t + u_i - \theta_i(A))\right]\end{aligned} \tag{11.202}$$

当获得 A、P 两点瞬时海面高后，对其求差作为平差处理的一种观测值，而验潮站 A 表达各分潮调和常数的方程则成为平差的基准条件方程，即约束方程。这一约束方法的条件是测高点 P 与验潮站 A 的距离要足够接近，以使两点的潮汐性一致。

以上介绍的利用测高数据建立潮汐模型的方法，使基于潮汐的调和展开（Doodson 展开）的"常规"分析方法，也是目前潮汐观测数据调和分析的主要和常用方法，但多用于建立局部或区域性海潮模型。建立全球性海潮模型已经越来越多地采用响应法（基本概念见 11.4.2 节）。全球海潮模型主要用于全球海洋测高数据的潮汐改正和低频卫星精密定轨考虑引力潮的作用，是精密确定平均海面高和海洋重力场所必须的。随着卫星测高观测数据处理的时间跨度越来越长，例如 T/P 及其后续卫星已达到 13a，国际上不断推出新的全球海潮模型。现有主要全球海潮模型有关信息列于表 11.7。近岸局部区域性海潮模型也在不断改进，属海洋国家重要的海洋信息，详细数据一般不向外公布，我国海洋研究人员对我国海域或邻近海域的潮汐模型作过大量研究，模型的分辨率和精度在不断提高，比较详细的介绍可参阅有关文献（暴景阳，2002）。

表 11.7　　**主要全球海潮模型（至 1995 年）**

模型	研制者	时间	方法	分辨率	精度/cm
Sch	Schwiderski	1980	验潮站数据线性动力方程解	1°×1°	4.84
CR	Cartwright	1990	GEOSAT 数据 Bin 法响应分析	1°×1.5°	4.59
FES95.1/2.1	Le Provost	1995	非线性方程同化 CSR2.0	0.5°×0.5°	2.73/2.65
Mazzega	Mazzega	1994	T/P 与验潮站数据最小二乘配置（广义反演）	0.5°×0.5°	2.88
TPX0.2	Egbert	1994	T/P 交叉点分析数据同化于线性动力方程	0.58°×0.70°	3.14

续表

模型	研制者	时间	方法	分辨率	精度/cm
RSC94	Ray	1994	T/P 数据响应分析模式 Proudman 函数展开	1°×1°	2.94
GSFC94A	Sanchez	1994	T/P 数据与 Sch 偏差的 Proudman 函数展开	2°×2°	3.29
CSR3.0	Eanes	1994	T/P 数据响应分析改进 AG95.1 和 FES94.1	0.5°×0.5°	2.61
DW95.0/0.1	Desai	1994	T/P 数据 bin 法响应分析	1°×1°	2.88/2.77
Knudsen	Knudsen	1994	T/P 数据调和参数球谐展开	1°×1.5°	3.39
Rapp	Rapp	1994	T/P 数据调和参数球谐展开	1°×1.5°	3.08
SR95.0/.1	Schrama	1995	T/P 数据 bin 法 调和分析改进 FES94.1	0.5°×0.5°	2.53
AG95.1	Anderson	1995	T/P 数据与验潮数据同化非线性方程解	0.5°×0.5°	2.75
ORI	Matsumodo	1995	T/P 交叉点调和分析流体动力学内插	1°×1°	3.25
Kantha.1/.2	Kantha	1995	T/P 加验潮数据与 DW 模型同化	0.2°×0.2°	3.16(/.2)

注:研制者只列文章发表时的第一作者,模型精度为与大洋验潮站比较的四个最大分潮(M2,S2,K1,O1)的综合预报中误差。

§11.5 海面地形

11.5.1 用水准测量确定验潮站之间的海面地形差

在 11.2.1 节中已引入海面地形的概念,即式(11.7)中的 ζ_s 和 ζ_t。前者为与时间无关的长期项(几十年),称稳态海面地形。考虑到仍有长周期变化,例如长期海面上升趋势,有时又称拟稳态海面地形,以下均简称海面地形。后者为中、短周期项,变化周期小于几年,称为时变海面地形,包括潮汐、风浪等引起的水位变化。在大地测量中,选择一个特定验潮站的平均海面(长时间跨度海面高的平均)作为定义区域性(例如一个国家或一个地区)高程系统的高程起算基准面。由于平均海面不是一个重力等位面,不同验潮站的高程零点一般都位于各自不同的水准面上,由此产生了全球高程基准的不一致,即不在同一个重力等位面上,例如全球大地水准面。统一全球高程基准是大地测量长期关注的研究课题,也是 21 世纪要实现的一个目标,即在厘米级精度水平上确定一个高分辨率(例如 50~100km)的全球大地水准面,并确定全球不同高程基准(高程零点)相对此大地水准面的海面地形或重力位差。

确定不同验潮站(以下均指由验潮站长期水位观测确定的平均海面的标定点)或高程基

准的海面地形最直接的方法是水准测量，即在沿海岸不同验潮站之间用几何水准方法测定其间的水准高程差。若测定的高差为零，表明两验潮站在同一水准面上，不为零的值则是两站之间海面地形差，反映验潮站所确定的平均海面相对于水准面(例如大地水准面)的倾斜。根据中国沿海9个验潮站用精密水准联测的结果，得出各站平均海面相对于青岛站平均海面的高差如图11.10所示，可以看出，中国沿海平均海面倾斜的总趋势是南高北低。采用精密水准测量方法，若能消除水准测量本身的各种系统误差，则可得到比较可靠的结果，但显然此法只适用于沿岸海区。

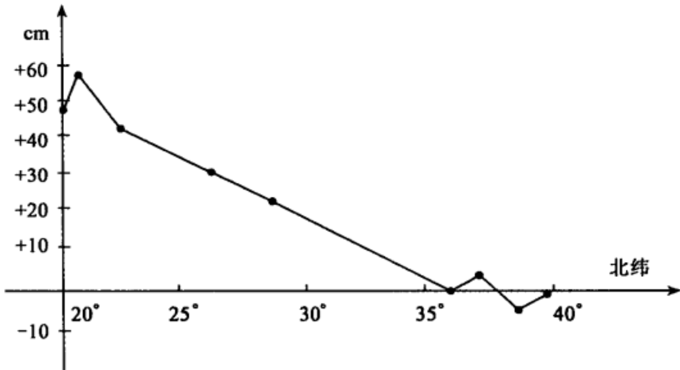


图11.10　中国沿岸海区平均海面的倾斜

表11.8列出了几个国家和地区沿海岸的海面地形高差和相应倾斜角。以澳大利亚为例，它以Coffs港参考站与澳大利亚最北端的Bammga验潮站的海面地形差为170cm，相当于海面倾斜0.18弧度(10.3°)，是北高南低趋势。

表11.8　世界几个国家和地区沿海岸的海面地形差

国家或地区	起始纬度	终止纬度	海面倾斜		倾斜方向
			角度/弧度	差值/cm	
欧洲	30°N	69°N	0.01	13	北
英国	50°N	57°N	0.09	30	北
巴西	23°S	4°S	0.04	40	北
美国	23°N	44°N	0.06	59	北
美国	32°N	49°N	0.06	50	北
澳大利亚	30°S	11°S	0.18	170	北

11.5.2　用卫星测高数据确定海面地形

在11.2.3节和11.3.2节分别讨论了由卫星测高数据确定平均海面和海洋大地水准面的理论和方法，假定由测高平均海面确定海洋大地水准面的过程中消除了海面地形的影响，则海

面地形可直接按以下简单公式计算：

$$\varsigma = h_{MSS} - N_{ALT} \tag{11.203}$$

式中：h_{MSS}是测高平均海面高；N_{ALT}是测高海洋大地水准面高。

由于利用测高垂线偏差反演 N_{ALT} 目前还难以严格消除海面地形的影响，通常是用一个联合了多种重力数据建立的全球重力场模型所确定的模型海洋大地水准面高 N_M，例如 EGM96 模型或更新精度更高的模型，则式(11.203)可写为

$$\varsigma = h_{MSS} - N_M \tag{11.204}$$

图 11.11 是利用多种卫星测高数据建立的平均海面模型 WHU2000MSS 和 EGM96 确定的全球海面地形图(姜卫平,2001)。

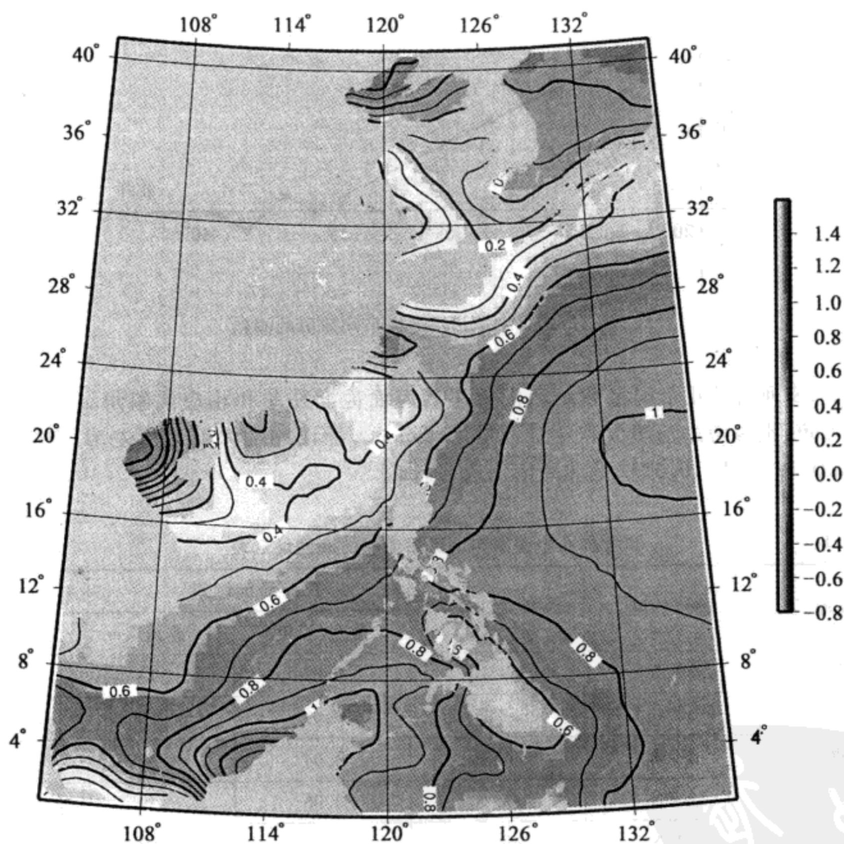


图 11.11 由卫星测高和重力场模型确定的中国海域及其邻海的海面地形

另一种确定海面地形的方法为"整体解法"，即在测高观测方程中同时引入全力模型的位系数改正、轨道改正和海面地形球谐展开系数作为待求参数，即在残差观测方程(11.12)中将 ΔN^c、ς_F 和 ε_r 三项参数化(模型化)，其余各项ς_t、τ 和 ω 假定都在测高数据的预处理中被消除，而大地水准面高阶截断误差 ΔN^o可在测高数据中采用某种滤波方法(例如对高分辨率数据取

格网化均法）去掉，同时也会滤去ς_s中量级很小的高频部分。由此，式（11.12）可简化为

$$\Delta h = \Delta N^c + \zeta_s - \varepsilon_r + \varepsilon_h \tag{11.205}$$

式中：ε_r为径向轨道误差。

卫星的地心距$\boldsymbol{r}_s$是卫星运行状态参数（三维位置和速度）S的函数：

$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{r}_s(S) \tag{11.206}$$

S又称状态矢量，它决定于卫星的初始状态S_I和力模型参数P，即

$$S = S(S_I, P) \tag{11.207}$$

于是有

$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{r}_s(S_I, P) \tag{11.208}$$

由此，径向轨道误差ε_r由S_I和P的偏差ΔS_I和ΔP产生，假定函数$r_s(S)$和$S(S_I,P)$的解析式（或离散模型）已知，则有

$$\varepsilon_r = \frac{\partial \boldsymbol{r}_s}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial S_I}\Delta S_I + \frac{\partial r_s}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial P}\Delta P \tag{11.209}$$

将稳态海面地形ς_s展开为球函数的级数，写为

$$\varsigma_s = \varsigma(P_T) \tag{11.210}$$

式中：P_T为球函数展开的系数向量，设

$$\varsigma_s = \varsigma_{s0} + \frac{\partial \varsigma_s}{\partial P_T}\Delta P_T \tag{11.211}$$

若令$\varsigma_{s0} = 0$，则$\Delta P_T = P_T$。

大地水准面的模型值N_0（见式（11.9）），即由用于卫星定轨的先验位模型$T = T(P')$乘以因子$\frac{1}{\gamma}$（γ为正常重力值）得到，P'为先验位模型位系数向量，则ΔN^c可写为

$$\Delta N^c = \frac{\partial N}{\partial P'}\Delta P' \tag{11.212}$$

若力模型参数P中只考虑地球引力位参数，其余的力模型参数没有误差，即$\Delta P = \Delta P'$，综合以上各式可得残差海面高$\Delta \bar{h}$的参数化"整体观测方程"为

$$\Delta h = \left[\frac{\partial N}{\partial P} - \frac{\partial \boldsymbol{r}_s}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial P}\right]\Delta P - \frac{\partial \boldsymbol{r}_s}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial S_I}\Delta S_I + \frac{\partial \varsigma_s}{\partial P_T}P_T + \xi_h \tag{11.213}$$

式中：ΔP、S_I和P_T是待求的参数向量。

假定已知观测误差ξ_h的方差阵（或权阵），则可用一般最小二乘平差方法解算以上观测方程。其中系数的计算要已知T/γ的球谐展开式，以及函数$\boldsymbol{r}_s(S)$和$S(S_Z, P)$。式（11.213）的实际展开式比较复杂，这里给出的只是整体解法的概念性模型，实用模型可参阅有关文献（例如 Engelis，1987），由此法曾导出了一个 24 阶的全球海面地形的球谐展开模型，即 OSU－SST 模型，并和大洋环流和海流模型作了检验比较，总体符合较好。海面地形或动力地形与海流的关系见下节。

11.5.3 确定海面地形的海洋学方法

海洋中存在着各种各样的海水流动现象，其中一种是最大规模相对稳定且首尾相接的海流系统，称为洋流或大洋环流，是海洋学研究的重要内容。海流主要起因于作用于海水的各种

非保守力（非地球引力）产生的动力平衡过程，并形成相对水平面（重力等位面）的海面地形起伏。类似陆地的地形起伏产生河流，大洋环流很像海洋中沿一定路线和方向流动的河流，但海流和河流形成的水位学物理机制有较大差异，研究海流的形成要复杂得多。我们主要研究与海流密切相关的海面地形，并由物理海洋观测数据（又称海洋水位数据，包括海水温度、盐度、压强、密度和流速等）计算海面地形的海洋学方法。

首先介绍一种确定海面地形的“位距水准”法，它是基于流体静力学平衡状态（流体无加速度运动）下不同深度海水之间的重力位差概念。在物理海洋学中，通常假定在海深 1 000 ~ 4 000m 之间存在等压面和重力等位面重合的情况，其上海水流速为零，取这样一个面作参考面。又假定此时海洋表面处于静力学平衡状态，且是一个大气压的等压面，见图 11.12，设 A 和 B 为此海洋表面上的两站点，其大气压为 $p_A = p_B = p$，A_0 和 B_0 为参考等压等位面上深度分别为 h_A 和 h_B 的两对应点，压强为 p_0。根据流体静力学方程，有

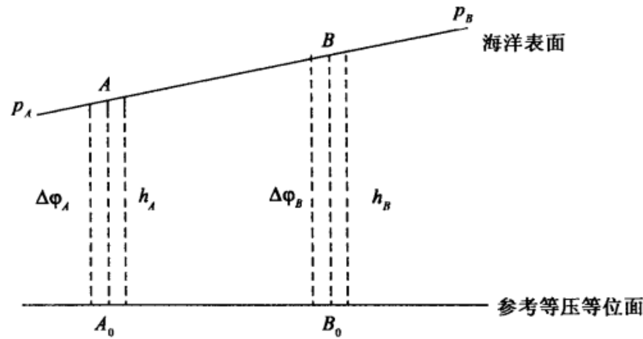


图 11.12　位距水准

$$g\mathrm{d}h = \alpha \mathrm{d}p \tag{11.214}$$

式中：g 为重力加速度；α 为海水的比容，即海水密度 ρ_w 的倒数，$\alpha = \dfrac{1}{\rho_w}$；$\mathrm{d}h$ 为海水深度变化；$\mathrm{d}p$ 为压强 p 的变化，均取深度和压强增加的方向为正。则相应的势能变化 $\mathrm{d}\varphi$ 为

$$\mathrm{d}\varphi = g\mathrm{d}h = \alpha \mathrm{d}p \tag{11.215}$$

则 A_0 与 A、B_0 与 B 之间的位势差（即所谓位距，又称动力高）$\Delta\phi_A$ 和 $\Delta\phi_B$ 分别为

$$\Delta\phi_A = \int_{p_B}^{p_A} \alpha_A \mathrm{d}p, \quad \Delta\phi_B = \int_{p_B}^{p_A} \alpha_B \mathrm{d}p \tag{11.216}$$

式中：α_A 和 α_B 分别为海水柱 A_0A 和 B_0B 的比密分布。

若此时海洋表面不仅是等压面，而且是等位势面，显然应有 $\Delta\phi_A = \Delta\phi_B$；若海洋表面不是等位势面，即 $\Delta\phi_{AB} = \Delta\phi_B - \Delta\phi_A \neq 0$，称为 A 与 B 两点之间的位距偏差或动力偏差。由式（11.216），设

$$\Delta\phi_{AB} = \int_{p_0}^{p} (\alpha_B - \alpha_A)\mathrm{d}p \tag{11.217}$$

由 Bruns 公式有

$$\Delta\zeta_{AB} = \frac{\Delta\phi_{AB}}{\gamma_m} \tag{11.218}$$

式中：γ_m 为地球正常重力的平均值；$\Delta\zeta_{AB}$称为站 B 相对于站 A 的海面地形或动力地形。

为描述一个区域或全球的海面地形，海洋学家定义一个所谓"标准海面"，即海水温度为0℃，盐度为35‰，表面为标准大气压 p_0 的海面，在该面上海面地形为零。从压强为 p 的深度到标准海面的位距 $\Delta\phi_0(p)$ 称为标准位距，海水比容 α 是温度 T、盐度 S 和压强 p 的函数，即 $\alpha=\alpha(T,S,p)$，则有

$$\Delta\phi_0(p) = \int_{p_0}^{p}\alpha_0(0℃,35‰)p\mathrm{d}p \tag{11.219}$$

参考等压等位面选定后，式(11.219)中的压强 p 为定值，$\Delta\phi_0(p)$ 为常数，则海面任一点的海面地形 ζ_s 可表示为

$$\varsigma_s = \frac{1}{\gamma_m}\int_{p_0}^{p}[\alpha(T,S,p') - \alpha_0]\mathrm{d}p \tag{11.220}$$

式中：p'为不同深度的海水压强分布。

以上是假定海面为等压面，且压强为 p_0，实际上海面大气压强 p_A 是变化的，则 $\Delta p_A = p_A - p_0$ 对位距的影响为 $\overline{\alpha}_w \cdot \Delta p_A$。其中 α_w 为海洋表层海水的比容，则顾及大气压力改正项的海面地形为

$$\varsigma_s = \frac{1}{\gamma_m}\left\{\int_{p_0}^{p}[\alpha(T,S,p') - \alpha_0]\mathrm{d}p + \overline{\alpha}_w \cdot \Delta p_A\right\} \tag{11.221}$$

式(11.221)是海洋学中用位距水准确定海面地形(动力地形)的实用公式。其中之一需用到的物理海洋数据为海水的比容 α_ζ 和海面大气压 p_A。α 的测定通过测定海水的温度 T、盐度 S 和压强 p'从专用海洋数表中查取。通常是把一种叫做电导率—温度—深度(CTD)的仪器沉放到不同海深，对仪器记录和传送到测船上的电导率(或盐度)、温度和深度数据计算或查取不同深度的比容值 α，海面大气压 p_A 可由气象数据中心机构提供。式(11.221)中的积分采用数值积分计算。

另一种海洋学确定海面地形的方法是"地转流水准"，它通过测定海流速度计算海面地形，其基本原理简单介绍如下。

如图11.13，设海面由于某种力的作用(例如风力作用)为一倾斜等压面，与水平面的倾角为 i，此时海面必将存在压强梯度力 $\alpha\frac{\partial p}{\partial n}$(其中 n 为等压面的法向，这种压强梯度力可从图中单位正方体不同侧面有压强差来理解)，其垂向分量(重力 g 的方向分量)为 $\alpha\frac{\partial p}{\partial n}\cos i$，水平分量为 $\alpha\frac{\partial p}{\partial n}\sin i$。垂向分量与重力 g 平衡，但水平分量无法平衡，在此力作用下，海水将沿此力方向加速流动，一旦海水开始流动，则在其右侧立刻就发生与流向垂直的地转偏向力(科里奥利力，简称科氏力)作用于流体，使流向逐渐向右偏转。科氏力的大小为 $2\omega\sin\varphi\cdot V$，其中 ω 为地球自转角速度，φ 为地理纬度，V 为流速，直至科氏力与水平梯度力平衡，流速趋于常速。假设 $\varphi>0$(北纬)，则水流方向用图中 A 点的符号⊗表示进入纸面(若 $\varphi<0$(南纬)，则水流方向用图中 A 点的符号⊙表示，意为流出纸面)。由于水平梯度力 $\alpha\frac{\partial p}{\partial n}\sin i = \alpha\frac{\partial p}{\partial n}\cos i\cdot\frac{\sin i}{\cos i} = g\cdot\tan i$，则有以下地转流方程：

$$V = \frac{g\tan i}{2\omega\sin\varphi} = \frac{g}{f}\tan i \tag{11.222}$$

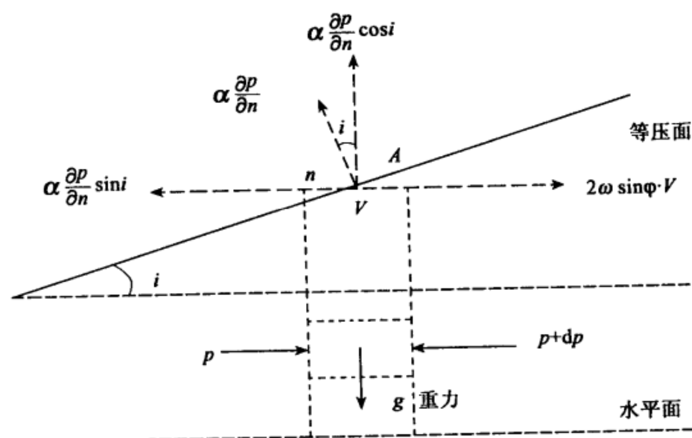


图 11.13　地转流水准

式中：$f=2\omega\sin\varphi$ 为科氏力参数。

在此情况下，海面地形ς是倾斜面相对于水平面的起伏，即 $\tan i=\frac{\mathrm{d}\varsigma_s}{\mathrm{d}l}$，$l$ 为水平距离。设定水平坐标系 $O—x,y$，x 轴指向北，y 轴指向东，则式(11.222)可写成水平分量形式

$$
\begin{cases}
V_x = \dfrac{g}{f}\dfrac{\partial \varsigma_S}{\partial x} \\
V_y = -\dfrac{g}{f}\dfrac{\partial \varsigma_S}{\partial y}
\end{cases}
\tag{11.223}
$$

式中：V_x 和 V_y 为流速 V 在 x 和 y 轴方向上的分量。类似地，考虑海面大气压差的改正项，上式可写为

$$
\begin{cases}
V_x = \dfrac{g}{f}\dfrac{\partial \varsigma_S}{\partial x} - \alpha_w\dfrac{\partial p_A}{\partial x} \\
V_y = -\dfrac{g}{f}\dfrac{\partial \varsigma_S}{\partial y} - \alpha_w\dfrac{\partial p_A}{\partial x}
\end{cases}
\tag{11.224}
$$

式(11.223)和式(11.224)就是地转流的实用公式，其中需要的海面水文数据为测定的海流速度 $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}$和流向方位角 $A=\arctan\left(\frac{V_x}{V_y}\right)$，以及海水表层的比容 α_w、大气压的变化 Δp_A 以及测区纬度 φ 和重力 g 的概值，这些数据一般可从海洋数据部门获得。

第12章　全球重力场及其地学解释

§12.1　概　　述

现代地球科学的任务是致力于把地球作为一个整体的静态和动态系统来研究，该系统主要由岩石圈（固体）、水圈（液体）和大气圈（气体）组成，重力场、电磁场和大气层及电离层则反映其基本的物理特性，制约着地球及其邻近空间所发生的物理事件。其中地球重力场反映地球物质的空间分布、运动和变化。确定地球重力场的精细结构及其时间变化不仅是现代大地测量的主要科学目标之一，而且也为现代地球科学解决人类面临的资源、环境和灾害等问题提供重要的基础地球空间信息（王正涛，2005）。

现代大地测量、地球物理、地球动力学和海洋学等相关地学学科的发展均迫切需要更加精细的地球重力场支持。

精化全球和区域性的地球重力场参数一直是大地测量的基本任务，联合卫星重力、地球表面重力与卫星测高数据可以确定高精度高分辨率的全球重力场参数。高精度的全球一致性的地球重力场信息可以应用于建立全球统一的高程基准，区域性测绘垂直基准的统一，远距离高程控制，陆海、海洋与岛屿高程的高精度连接。高精度高分辨率大地水准面的确定，使得用空间测量（GPS）手段代替传统繁重的水准测量成为可能。地球重力场与大地测量学的关系见图12.1。

测定和研究精细地球重力场（包括确定厘米级大地水准面）更重要的意义在于为相关地球学科（如地球物理学、大地构造学、地球动力学、地震学和海洋学）研究地球内部结构和动力学过程提供基础信息。重力场结构是地球质体密度分布的直接映象，重力测量数据是研究岩石圈及其深部构造和动力学的一种“样本”，精细的重力异常分布和大地水准面起伏对于弄清当前岩石圈和地幔动力学研究中的一系列问题有很重要的作用。

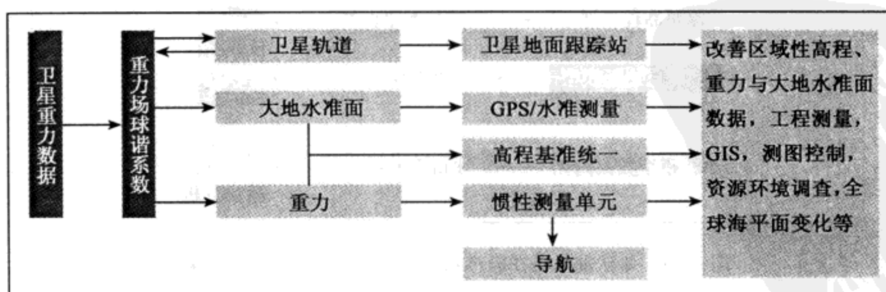


图12.1　地球重力场在大地测量学中的作用（王正涛，2005）

地球是个不断变化的动力系统,地球重力场是固体地球动力过程地质历史的再现。高精度的地球重力场及其时变信息对于地球动力学和地球内部物理的研究具有重要意义,特别是对岩石圈动力机制、地幔对流与岩石圈漂移、岩石圈异常质量分布、冰后反弹质量调整、冰后反弹引起的海平面变化以及对固体地球的影响、冰盖与冰河的质量平衡、大陆冰雪的变化、板块相互作用机制、板块内部构造、海底岩石圈与海山动力学、海平面变化的物理机制、地球自转、陆地地壳运动与海平面变化的分离等方面的研究提供重要的依据。

地球重力场是稳态海洋环流探测重要的参考依据。海面动力地形的高度是以大地水准面为起算面的,建立准确的洋流动力模式更需要精密的大地水准面支持。

在利用卫星测高监测海洋动力现象时,需要将测得海面高(相对于椭球面的高度)归算到以大地水准面为参考面的高度,才能对监测结果进行合理的利用和物理解释,例如海平面变化的物理解释,El Nino、La Nina 现象的监测,海洋热量输送模式的反演等。卫星重力计划特别适合测量和监测全球海底压力及其变化、全球海洋质量变化、全球海底资源调查、全球海深计算等一系列目前难以很好解决的问题。地球重力场信息对相关地球学科研究的作用见图 12.2 至图 12.4。

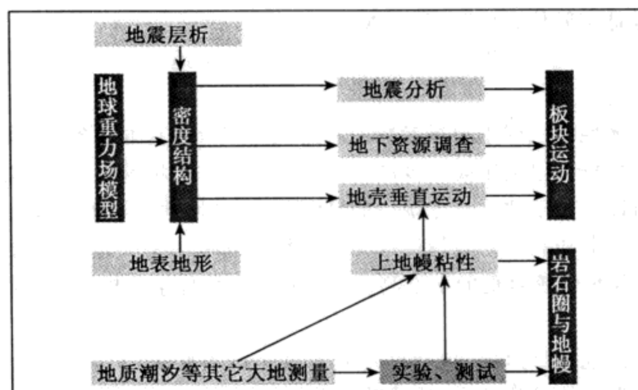


图 12.2　地球重力场在固体地球物理学中的作用(王正涛,2005)

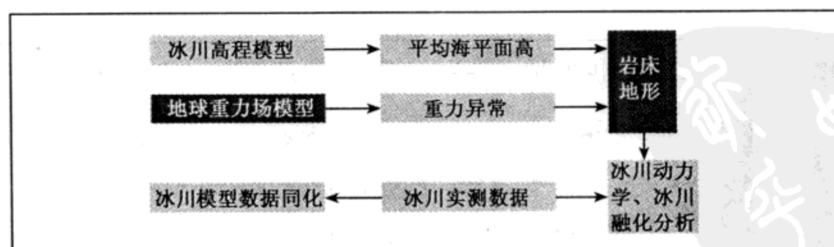


图 12.3　地球重力场在海洋物理学中的作用(王正涛,2005)

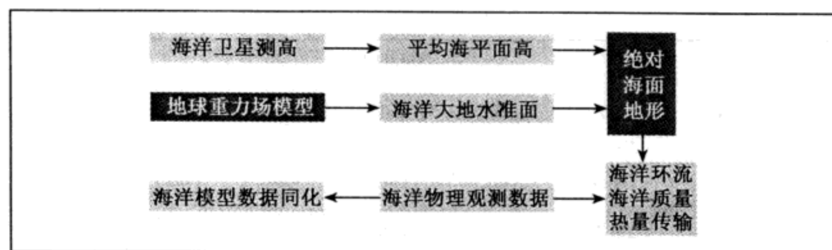


图 12.4　地球重力场对冰川研究的作用(王正涛,2005)

不同位模型大地水准面的精度统计

表 12.1　A　四种位模型大地水准面高的全球 RMS 误差统计(Lemoines et al. ,1998)(单位:cm)

Degree	OSU91		JGM－3		HDM190		EGM96	
	At *n*	To *n*	At *n*	To *n*	At *n*	To *n*	At *n*	To *n*
2	0.18	0.18	0.04	0.04	0.06	0.06	0.05	0.05
6	1.30	2.20	0.50	0.70	0.50	0.80	0.40	0.60
10	2.50	5.10	1.60	2.50	1.40	2.40	0.90	1.80
20	3.60	10.8	3.90	10.1	2.80	7.80	1.70	4.90
30	4.50	17.2	6.20	19.2	3.80	13.3	2.30	7.90
50	3.20	25.8	8.50	39.3	4.00	22.5	2.90	14.6
70	4.20	32.7	6.80	53.8	3.50	28.1	2.00	19.0
75	4.00	34.0	–	–	3.40	29.2	3.40	20.6
100	3.50	38.8	–	–	3.00	33.2	3.00	26.0
120	3.30	41.7	–	–	2.70	35.6	2.70	29.0
180	2.60	47.3	–	–	2.20	40.4	2.20	34.7
360	1.20	54.7	–	–	1.30	46.9	1.30	42.1

B　OSU91A 和 EGM96 位模型大地水准面高差全球 RMS 误差统计(Lemoines et al. ,1998)

Linear Separ. (km)	Angular Separ. (°)	Trunc. Error (cm)	OSU91A Comm. Error (cm)	OSU91A Total. Error (cm)	OSU91A Relative Error (ppm)	EGM96 Comm. Error (cm)	EGM96 Total. Error (cm)	EGM96 Relative Error (ppm)
10	0.10	10.3	9.20	13.8	13.8	8.00	13.0	13.0
20	0.20	17.9	18.1	25.5	12.7	15.7	23.8	11.9
30	0.30	22.7	26.6	35.0	11.7	23.0	32.3	10.8
40	0.40	25.3	34.4	42.7	10.7	29.6	39.0	9.70

续表

Linear Separ. (km)	Angular Separ. (°)	Trunc. Error (cm)	OSU91A Comm. Error (cm)	OSU91A Total. Error (cm)	OSU91A Relative Error (ppm)	EGM96 Comm. Error (cm)	EGM96 Total. Error (cm)	EGM96 Relative Error (ppm)
50	0.40	26.2	41.3	48.9	9.80	35.5	44.1	8.80
70	0.60	24.8	52.4	57.9	8.30	44.6	51.1	7.30
90	0.80	22.6	59.6	63.7	7.10	50.3	55.2	6.10
100	0.90	22.1	62.0	65.8	6.60	52.1	56.6	5.70
200	1.80	23.1	71.8	75.4	3.80	58.8	63.2	3.20
300	2.70	23.4	75.7	79.3	2.60	60.0	64.4	2.10
10000	89.9	23.5	77.4	80.9	0.08	59.5	64.0	0.06

20 世纪初开始实施新一代卫星重力计划，其中 CHAMP 和 GRACE 卫星已在运行中，GOCE 卫星定于 2006 年发射，该计划最终目标是恢复地面分辨率约为 100km 的近全波段的 1cm 精度重力场模型。这一设计精度，或者说期望精度在何种条件下才能真正达到，是一个需要进一步研究的问题（王正涛，2005）。

这一目标实现的艰巨性，除了在重力场逼近的理论上还需进一步完善外，例如研究重力数据向下延拓的新理论和新方法（申文斌等，2004），大地水准面的严格定义和实现以及用重力模型计算大地水准面如何处理其外部地形质量问题等，最困难和最具挑战性的问题是解决地球表面相当一部分地区无实测重力数据或数据点过稀的问题。就 1°×1°分辨率而言，新一代卫星重力数据可望以略低的精度水平"填充"重力空白地区或提高重力点稀疏地区的分辨率，并可能比过去用低精度重力模型或地球物理方法填充的精度高一个量级，这将是一个重要进展，但要达到相当于厘米级精度的水平是困难的。采用现有的向下延拓法，产生分米级误差是完全可能的，这一问题已有一些理论和试验研究成果。最终解决这一难题，寄望于两个方面的努力，一是研究并提出更精密更稳健的向下延拓方法，二是研究在人员甚至飞机难以到达的自然环境恶劣地区进行重力测量的新技术。现代高科技的发展使人类有能力在月球和火星表面进行各种环境参数的探测，在全球任何地区都可进行重力测量的时代应该为时不远。只要我们认识到发展这一技术的必要性和重要性。就目前已有的先进科技水平和经济发展水平，实现此设想并非一个不可行的难题（王正涛，2005）。

这里还要提到的是占地球面积 71% 的海洋地区，目前利用卫星测高技术，联合陆地和船测重力数据，已可确定分米级精度水平的海洋大地水准面，反演的海洋重力异常精度在 1°×1°分辨率上，精度可优于 5 毫伽（高于陆地平均异常的精度），由于各种物理环境的影响，且难以有精确的校正模型，应用卫星测高技术确定海洋重力场已难以突破 1 分米的精度水平。联合新一代卫星的重力数据，在 0.5°×0.5°分辨率上，可望将精度提高到亚分米级水平。能否提高到 1 厘米的精度水平（这对研究海洋动力学问题，如平均环流，有重要意义），还需要研究和基于实测数据的实验。保守的看法达到这一高精度水平将十分困难。

不同的科学目标对重力场精度和分辨率的需求不一样。表 12.2 分别从大地水准面和重力场的角度给出了固体地球、海洋物理、大地测量等其他领域对重力场精度、时间和空间分辨率的基本需求。

表 12.2　　不同科学目标对重力场精度和分辨率的要求(王正涛,2005)

应用对象		精度		空间分辨率(半波长:km)	时间分辨率(月)
		大地水准面(cm)	重力异常(mGal)		
固体地球物理	岩石圈和上地幔		1 ~ 2	100	
	密度结构				
	沉积物盆地		1 ~ 2	50 ~ 100	
	断层		1 ~ 2	20 ~ 100	
	构造运动		1 ~ 2	100 ~ 500	1 ~ 6
	地震灾害		1	100	1 ~ 6
	海底岩石圈及其与软流圈相互作用		0.5 ~ 1	100 ~ 200	12
海洋学	短尺度	1 ~ 2	1 ~ 5	100	1
		0.2 ~		200	1
	海盆尺度	0.1		1000	3
冰盖	岩床		~ 1 ~ 5	50 ~ 100	
	冰盖垂直运动	2		100 ~ 1 000	2 ~ 6
大地测量	GPS/水准	1		100 ~ 1 000	
	高程基准统一	1		100 ~ 20 000	
	惯性导航系统		~ 1 ~ 5	100 ~ 1 000	
	测高径向轨道(误差 < 1cm)		~ 1 ~ 3	100 ~ 1 000	
水资源变化	地表水		0.5 ~ 1	100 ~ 500	1 ~ 6
	地下水		0.5 ~ 1	200 ~ 500	1 ~ 6
海平面变化	以上多数应用(对重力场分辨率和精度的要求)都适用于研究海平面变化				

§12.2　由地面重力数据确定全球重力场模型

12.2.1　概述

地球重力场模型,即地球全球引力位模型,是一个逼近地球质体外部引力位在无穷远处收敛到零值的(正则)调和函数,通常展开成一个在理论上收敛的整阶次球谐函数或椭球谐函数的无穷级数,这个级数展开系数的集合定义一个相应的地球重力场模型。

地球引力位函数是表征地球重力场的基本函数,一切重力场参数都是该函数的泛函。定义地球几何形状的大地水准面是这个函数的一个特定等值曲面,这个纯量函数的梯度场与地

球自转产生的离心力场合成地球外空间重力矢量场。其二阶导数形成描述重力梯度结构的二阶引力张量。引入适当的参考位(正常位)函数,可定义地球引力场的扰动位函数,对大地水准面上的扰动位函数施以简单的线性算子运算可导出重力异常、大地水准面起伏和垂线偏差等有重要应用的重力场参数(函数)。由于一切所需要的重力场参数都可从给定的地球重力场模型导出,使得地球重力场模型在重力场研究和应用中具有很高的理论价值和应用价值。

建立重力场模型的经典方法是对全球重力观测数据(地面重力观测或由卫星海洋测高数据推算)进行调和分析。重力值的观测误差以及不满足理论上的连续分布要求,决定了任何重力场模型都只能以一定的精度和分辨率对真地球引力位的逼近。根据数据采样定理,分辨率取决于全球重力场空间采样率的尼奎斯特(Nyquist)频率 $N=\frac{\pi}{\Delta\lambda}$(半波),其中 $\Delta\lambda$ 为采样间隔,理论上,高于该频率的重力场频谱成分不可能分辨。N 为级数展开模型的截断阶,即模型的最高阶,或简称模型的阶。$N\leqslant36$ 一般称低阶模型,相应地面最高分辨率约为 550km,现有常用模型最高阶为 $N=360$,分辨率为 50km,并已出现 $N=1\ 800$ 的甚高阶试验研究性模型。模型的精度主要取决于构建模型输入数据的精度,现代重力测量精度一般可达到 ±(10 ~ 20μGal),但输入数据通常取等间隔格网平均值,其精度取决于观测点的密度和分布。目前全球 $1°\times1°$格网平均重力值约有 70% 的精度优于 ±5mGal。此外,还取决于地面观测值归算到大地水准面(Stokes 理论要求)或其他选定的边界面(如参考椭球面)时由于归算模型参数不准产生的精度损失,还有构建模型所作的某些理论假设与客观实际不符所产生的影响(例如将边界面作球近似假设,假设大地水准面外无质量等)。目前全球重力场模型的精度大致为分米级水平,正在向厘米级精度的目标努力,这不仅涉及获取新的重力数据源,还涉及模型构建理论的精化和发展。

由于全球重力场测量数据的分布非常有限,一度阻碍了重力场模型的发展。人造地球卫星技术在重力场探测中的应用,使构建准确可靠的全球重力场模型成为可能,极大地推动了这一研究领域的发展。早在 20 世纪 60 年代,人们就利用观测人造卫星轨道对参考(正常)轨道的摄动,根据卫星轨道摄动理论求解引力位展开系数,构建了早期的低阶重力场模型,这一技术至今还在应用和发展。70 年代开始出现利用卫星的星载雷达测定海面大地高的技术,无潮平均静态海面形状起伏是地球重力场作用的结果,相当于大地水准面起伏,可看成是一种重力场观测数据。由于海洋占全球面积约 2/3,卫星测高的高空间采样率,使构建比较准确的中、短波重力场模型成为可能。从 80 年代到 90 年代,联合地面重力数据和卫星轨道跟踪数据导出的低阶位系数以及卫星测高数据构建高阶重力场模型的研究得到迅速发展,先后推出了多种系列高阶模型,其中 OSU91(360 阶)和最新的 EGM96(360 阶)两个模型得到了国际上普遍应用,是具有分米级精度的全球重力场模型的代表,而 EGM96 是 OSU91 的换代产品。卫星轨道跟踪技术、卫星测高技术及地面重力测量是这一代产品的物质技术基础,这两种卫星重力技术对发展重力场模型起到了重大作用,在未来一个时期可能在新的技术条件下(如作为新的卫星重力技术组成部分)仍将得到应用和发展。但由于这两种技术本身存在的难以克服的缺陷,要在分米级精度水平上再提高一个水平已很困难。基于这一认识,早在这两种卫星重力技术出现的初期就已经酝酿了另外两种卫星重力技术,即卫星跟踪卫星(SST)和卫星重力梯度测量(SGG),其共同特点是在卫星轨道空间直接测定获取重力场信息,而不是通过地面对卫星轨道的观测或卫星对海洋的观测带遥感性质地间接获取重力场信息,前者受环境影响小,后者受环境影响大(有些环境影响是很难精确模拟的,如大气影响)。SGG 和 SST 经过近 30 年的

理论和技术预研,21 世纪初都将先后付诸实施,届时将可获得近地空间(250～500km 高度)反映重力场精细结构的重力数据,分辨率可达 100km 左右,并大大改善重力场中、长波分量的精度,在这一新的物质技术基础上,未来新一代地球重力场模型可望跨入厘米级精度水平。

地球重力场的特点是长波分量占优(>90%),地形和地壳的扰动质量产生的中短波分量相对偏小,短波(地形)影响尤小,大、中、小山区分别为米级、分米级和厘米级,个别情况例外。长波分量是重力场谱结构的主分量,是“骨架”,从某种意义上说,精确确定重力场模型的长波分量,就为模型提供了“牢固”和精密的框架,是基础。新一代卫星重力计划意在加强这一基础,提高其绝对精度,只有建造一个具有厘米级精度水平的中长波重力场模型,才有可能利用这一模型作参考(基准)场,利用地面高分辨率重力和地形数据实现厘米级精度水平的局部重力场逼近,也才有可能实现相应精度水平的全球高程基准的统一和利用 GPS 测定正高或正常高。

本书主要介绍和讨论利用地面重力数据(重力异常,包括海洋卫星测高数据反演的重力异常)构建重力场模型的理论和方法。利用卫星轨道跟踪、卫星重力梯度等卫星重力数据求解位系数的内容不在本书讨论范围。

12.2.2 基本理论和方法

12.2.2.1 重力场模型和边值问题

地球质体外部引力位场是一个调和场,任意一点的引力位 V 满足 Laplace 方程,其在地球的球坐标系(r,θ,λ)中的形式为

$$\Delta V = r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot\theta\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \tag{12.1}$$

采用分离变量法,令

$$\begin{cases} V(r,\theta,\lambda) = f_1(r)Y(\theta,\lambda) \\ Y(\theta,\lambda) = f_2(\theta)f_3(\lambda) \end{cases} \tag{12.2}$$

则式(12.1)可分离为三个分别关于变量 r、θ 和 λ 的常微分方程,各自在地球外空间域 Ω 中的特解为

$$\begin{cases} f_1(r) = \dfrac{1}{r^{n+1}} \\ f_2(\lambda) = \cos m\lambda \text{ 和 } f_2(\lambda) = \sin m\lambda \\ f_3(\theta) = P_{nm}(\cos\theta) \end{cases} \tag{12.3}$$

式中:$P_{nm}(\cos\theta)$为 Legendre 缔合函数;n 和 m 为根据常微分方程特征值理论确定的常数,由 T 关于 θ 和 λ 的周期性可证明 n 和 m 为正整数,且 $m \leqslant n$。

由特解的线性组合得一般解

$$V(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}(\bar{C}_{nm}\cos m\lambda + \bar{S}_{nm}\sin m\lambda)\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\right] \tag{12.4}$$

式中:a 为正常椭球的长半径;$\bar{C}_{nm}$ 和 $\bar{S}_{nm}$ 为完全规格化位系数;$\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$为完全规格化的 Legendre缔合函数。

规格化的目的是便于作调和分析和运算,其定义满足

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}(\overline{P}_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda)^2\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}(\overline{P}_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda)^2\mathrm{d}\sigma = 1$$

$$\overline{C}_{nm} = \frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}V(\theta,\lambda)(\overline{P}_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda)\mathrm{d}\sigma$$

$$\overline{S}_{nm} = \frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}V(\theta,\lambda)(\overline{P}_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda)\mathrm{d}\sigma$$

式中：σ 为单位球面。

可以证明球函数无穷序列 $\overline{P}_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda$ 和 $\overline{P}_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda\,(n,m=0,1,\cdots)$ 在调和函数空间张成一个完备化正交基函数系，因此式(12.4)是 V 在调和函数空间关于地球引力位的广义 Fourier 展开式，或称 V 的球谐函数级数展开式。式(12.4)是 Laplace 方程在球坐标系下的一个通解($r>a$)。对于一个给定的正常(旋转)椭球体，假设其包含的质量等于地球体的总质量，旋转轴与地球自转轴重合，旋转角速度等于地球自转角速度，因此产生的离心力位与地球的离心力位相等。由正常椭球相对转轴的对称性，其引力位解 V'有以下特殊形式

$$V'(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\overline{C'}_{2n}\overline{P}_{2n}(\cos\theta)\right] \tag{12.5}$$

设 W 为地球的重力位，U 为正常椭球的正常重力位，则扰动位为

$$T = W - U = V - V' \tag{12.6}$$

将式(12.4)和式(12.5)分别代入式(12.6)，得扰动位的 Laplace 方程 $\Delta T=0$ 通解的形式为

$$T(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}\left(\overline{C}^{*}_{nm}\cos m\lambda + \overline{S}_{nm}\sin m\lambda\right)\overline{P}_{nm}(\cos\theta) \tag{12.7}$$

式中：

$$\overline{C}^{*}_{nm} = \begin{cases}\overline{C}_{nm}-\overline{C'}_{nm}, & m=0,n=2k\ (k\ \text{为} \geqslant 1\ \text{的正整数})\\ \overline{C}_{nm}, & \text{其他情况}\end{cases} \tag{12.8}$$

由于我们这里主要关心的是求解扰动位 T，以下讨论将对 $\overline{C}_{nm}$和$\overline{C}^{*}_{nm}$两符号不加区别，因为只有当应用式(12.6)计算重力位 W 时才需要区别，以便按式(12.8)将对应项位系数相加。式(12.7)就是地球(扰动)重力位模型的球谐函数展开形式，简称地球重力场模型。构制这个模型就是确定位系数集合$\{\overline{C}_{nm},\overline{S}_{nm}\}$。我们利用地球表面的重力数据定义一个适当的边值条件，就得到由 Laplace 方程和边值条件组成定解问题的解，可联合通解(12.7)求定位系数集合。若位系数给定，式(12.7)就是描述地球扰动重力场的一个特定解。

我们将按 Molodensky 边值问题的定义来求解位系数，与11.3节中求解同一边值问题确定高程异常(T/γ)本质上完全相同，目的都是求解外部扰动位 T，但前者是要求 T 的空域积分表达式，这里是要求 T 的谱域级数表达式，因而方法不同，但理论上两种解是等价的(假定 Molodensky 级数用于全球数据)，且可互相转换。实用上，前者常用于局部重力场逼近，后者则是全球重力场逼近的表达。

在11.3.1节推演了 Molodensky 边值问题的线性化过程，假定 $\Delta W=0$，且似地形面上 Q 点的正常重力线方向 $\underline{\gamma}$，等天顶线方向 $\underline{\tau}$ 和椭球法线方向 $\underline{H}$ 三者重合，大地高方向 $\underline{H}$ 与正常高方向 $\underline{h}$ 也可不加区别，则线性化 Molodensky 边值问题的形式为：

$$\begin{cases}\Delta T = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 空间}\\ \dfrac{\partial T}{\partial h}-\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial\gamma}{\partial h}T = \underline{e}_h^{\mathrm{T}}\cdot\underline{\Delta g} & \text{在} \sum \text{面上}\\ T\rightarrow 0 & \text{当 } r\rightarrow\infty\end{cases} \tag{12.9}$$

这是关于椭球面法线方向的第三(Robin)边值问题。由式(12.7)~(12.9)可以证明,所含线性化误差量级为$O(e^4)$。Jekeli(1981)给出线性化产生的高程异常和重力异常误差量级分别为:

$$\begin{cases} \varepsilon_\zeta \approx \dfrac{1}{\gamma_Q}\dfrac{\partial\gamma}{\partial h_Q}\zeta^2 \\ \varepsilon_{\Delta g} \approx \left[\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial h^2}\right]_Q \zeta^2 \end{cases} \tag{12.10}$$

则 $\varepsilon_\zeta \approx 3\mathrm{mm}$,$\varepsilon_{\Delta g} \approx 1.5\mu\mathrm{Gal}$,因此在厘米级精度要求下,线性化误差可忽略不计。

注意到式(12.9)中的$\underline{e}_h^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\Delta g}$项是重力异常向量$\underline{\Delta g}$在椭球外法线方向$\underline{e}_h$上的投影分量$\Delta g'$,与地面点$P$的垂线偏差有关,将$\Delta g$化为$\Delta g'$需加改正$\varepsilon_P$:

$$\varepsilon_P = \Delta g - \Delta g' \tag{12.11}$$

ε_P是一种垂线偏差改正,也是地面重力异常的椭球改正之一。由于式(12.7)是扰动位T在球坐标系下的展式,为了严格在椭球面上解式(12.9),可将T在球面坐标系的展式转变为椭球坐标系的展式,即椭球谐展开,位系数也要进行相应的转换。用椭球谐展开表达扰动位在理论上是最合理的,并可直接利用$\Delta g'$确定其位系数,但椭球谐展开比球谐展开复杂得多,因此实用上大多采用球谐展开(或将椭球谐系数转换为球谐系数),但要求所得解满足椭球面的边值条件。为此,需要将$\Delta g'$进一步归算到球坐标的径向方向上,即地心矢径方向(球坐标系的原点位于地球质心),这是将椭球面边值条件转换为球面边值条件,而不是方程(12.3)的球近似。这种转换不会改变外部位,因为我们假定两种边界面外都没有质量存在。将椭球法线方向的重力异常归算到地心径向方向是一种纯空间归算,并未改变原重力异常场的结构。这一归算所加改正涉及由于椭球扁率产生的大地纬度B与地心纬度Φ的差异$\delta = B - \Phi$,是另一种椭球改正,用ε_e表示。ε_e对大地水准面高的影响,全球可达0.6m,RMS为±0.2m(Rapp et al.,1986)。

至此可将式(12.9)的边值条件写成如下形式:

$$\Delta g = -\left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_Q - \frac{2}{r_Q}T_Q + \varepsilon_P + \varepsilon_e \tag{12.12}$$

或

$$\Delta g^e = -\left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]_Q - \frac{2}{r_Q}T_Q \tag{12.13}$$

式中:

$$\Delta g^e = \Delta g - \varepsilon_P - \varepsilon_e \tag{12.14}$$

将式(12.7)代入式(12.13),得

$$\Delta g^e = \frac{GM}{r_Q^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{a}{r_Q}\right)^n \sum_{m=0}^{n}(\overline{C}_{nm}\cos m\lambda_Q + \overline{S}_{nm}\sin m\lambda_Q)\overline{P}_{nm}(\cos\theta_Q) \tag{12.15}$$

上式为由重力异常观测值Δg^e求解位系数$\{\overline{C}_{nm},\overline{S}_{nm}\}$的观测方程,可按通常最小二乘平差法解算。利用球函数的正交性及完全规格化定义,在式(12.15)两边同乘$\overline{P}_{nm}(\cos\theta_Q)\cos m\lambda_Q$或$\overline{P}_{nm}(\cos\theta_Q)\sin m\lambda_Q$,两边作积分,又可得

$$\overline{C}_{nm} = \frac{1}{4\pi\gamma(n-1)}\iint_\sigma \Delta g^e \overline{P}_{nm}(\cos\theta_Q)\cos m\lambda_Q \mathrm{d}\sigma \tag{12.16}$$

$$\overline{S}_{nm} = \frac{1}{4\pi\gamma(n-1)}\iint_\sigma \Delta g^e \overline{P}_{nm}(\cos\theta_Q)\sin m\lambda_Q \mathrm{d}\sigma \tag{12.17}$$

以上两式是利用重力异常观测数据 Δg^{c} 进行调和分析求解 $\{\bar{C}_{nm},\bar{S}_{nm}\}$ 的理论公式,实用上需作离散化数值积分。

12.2.2.2 椭球改正

椭球扁率对大地水准面高和重力异常影响量级为 $0.003N$ 和 $0.003\Delta g$,全球 $N<100\text{m}$ 和 $\Delta g<700\text{mGal}$,其影响分别为分米级和毫伽级,且具有系统性长波特点,因此不论是构制全球重力场模型还是局部重力场逼近,在分米级精度要求下都应顾及椭球改正。重力异常是确定地球重力场的基本数据,对椭球改正的研究主要是推导重力异常的椭球改正对确定位系数和计算局部大地水准面或高程异常的影响模型。目前已有多种不同的推导方法和改正公式,以下仅作简要综述。

首先研究 ε_P 和 ε_e。这是对重力异常的椭球改正,前者是垂线偏差的影响,后者是椭球法向与径向之间夹角的影响。

在图 12.5 中 $O-xyz$ 是一个站心直角坐标系,z 轴与椭球法线重合,x 轴指向北,y 轴指向东,各坐标轴的单位向量分别为 $\boldsymbol{e}_h$,$\boldsymbol{e}_\varphi$ 和 $\boldsymbol{e}_\lambda$。图中 $\boldsymbol{e}_g$ 为重力方向单位向量,总垂线偏差为 u,在子午面和卯酉面的分量分别为 ξ 和 η。则单位向量 $\boldsymbol{e}_g$ 在该坐标系可表示为

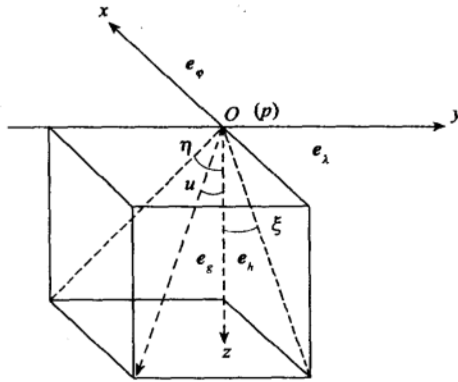


图 12.5 垂线偏差

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_g &= \cos u(\boldsymbol{e}_h+\tan\xi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi+\tan\eta\cdot\boldsymbol{e}_\lambda)\\ &\approx \cos u(\boldsymbol{e}_h+\xi\boldsymbol{e}_\varphi+\eta\boldsymbol{e}_\lambda)\end{aligned} \tag{12.18}$$

$$\varepsilon_P=\Delta g-\Delta g' \tag{12.19}$$

$$\begin{aligned}\Delta g &= |\boldsymbol{g}_P|-|\boldsymbol{\gamma}_Q| = \boldsymbol{g}_P\cdot\boldsymbol{e}_g-|\boldsymbol{\gamma}_Q|\\ &= -\left(\frac{\partial W}{\partial h}\boldsymbol{e}_h+\frac{\partial W}{M\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\partial W}{N\cos\varphi\partial\lambda}\boldsymbol{e}_\lambda\right)\boldsymbol{e}_g-|\boldsymbol{\gamma}_Q|\end{aligned} \tag{12.20}$$

将式(12.18)代入上式,得

$$\Delta g=-\cos u\left(\frac{\partial W}{\partial h}+\xi\frac{\partial W}{M\partial\varphi}+\eta\frac{\partial W}{N\cos\varphi\partial\lambda}\right)-|\boldsymbol{\gamma}_Q| \tag{12.21}$$

由于已假设 $\boldsymbol{\gamma}_Q$ 的方向与 $\boldsymbol{e}_h$ 的方向一致,则有

$$\Delta g'=(\boldsymbol{g}_P-\boldsymbol{\gamma}_Q)\cdot\boldsymbol{e}_h=\boldsymbol{g}_P\cdot\boldsymbol{e}_h-|\boldsymbol{\gamma}_Q|=-\frac{\partial W}{\partial h}-|\boldsymbol{\gamma}_Q| \tag{12.22}$$

将式(12.21)和式(12.22)代入式(12.19),顾及 $\cos u \cdot \xi \approx \xi, \cos u \cdot \eta \approx \eta$,得

$$\varepsilon_P = \left[(1 - \cos u)\frac{\partial W}{\partial h} - \xi \frac{\partial W}{M \partial \varphi} - \eta \frac{\partial W}{N \cos\varphi \partial \lambda}\right] \tag{12.23}$$

在图 12.6 中 $\boldsymbol{e}_h$ 为椭球面法线方向上的单位向量(向外,与图 12.5 反向),$\boldsymbol{e}_r$ 为地心矢径

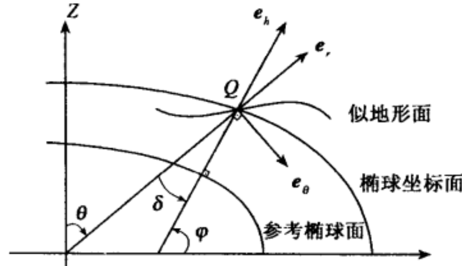


图12.6　椭球面法线方向与地心矢径方向的偏差 δ

方向上的单位向量,$\boldsymbol{e}_\theta$ 为在子午面内与 $\boldsymbol{e}_r$ 正交的单位向量,指向地心余纬增加的方向,显然有

$$\boldsymbol{e}_h = \cos\delta \boldsymbol{e}_r - \sin\delta \boldsymbol{e}_\theta \tag{12.24}$$

应用上式可将属于椭球法线的(向)量转换为属于椭球矢径的(向)量。ε_e 难以利用和推导 ε_P 类似的几何关系导出,因为这里 $\boldsymbol{g}'$("′"表示法线方向的量)和 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}'$ 都需要转换到矢径方向。替代的方法是将椭球面边值条件(12.9)中关于椭球法线方向的偏导数 $\frac{\partial}{\partial h}$ 加改正项转换为关于矢径方向的偏导数 $\frac{\partial}{\partial r}$,以下略去关于 Q 点的下标。令

$$\frac{\partial T}{\partial h} = \frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon_h \tag{12.25}$$

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial r} + \varepsilon_\gamma \tag{12.26}$$

则有

$$\varepsilon_e = \varepsilon_h + \varepsilon_\gamma \tag{12.27}$$

将梯度向量 $\mathrm{grad}T$ 在径向标架($\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\lambda$)中表示

$$\mathrm{grad}T = \left[\frac{\partial T}{\partial r}\right]\boldsymbol{e}_r + \left[\frac{\partial T}{r\partial \theta}\right]\boldsymbol{e}_\theta + \left[\frac{\partial T}{r\sin\theta \partial \lambda}\right]\boldsymbol{e}_\lambda \tag{12.28}$$

由于

$$\frac{\partial T}{\partial h} = \mathrm{grad}T \cdot \boldsymbol{e}_h \tag{12.29}$$

将式(12.24)和式(12.28)分别代入上式得

$$\frac{\partial T}{\partial h} = \cos\delta\left[\frac{\partial T}{\partial r}\right] - \sin\delta\left[\frac{\partial T}{r\partial \theta}\right] \tag{12.30}$$

由椭球大地测量学知

$$\begin{cases} \sin\delta \approx e^2 \sin\theta\cos\theta \\ \cos\delta \approx 1 \end{cases} \tag{12.31}$$

则得

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = -\frac{\partial T}{\partial r} + e^2 \sin\theta\cos\theta\left[\frac{\partial T}{r\partial\theta}\right] \tag{12.32}$$

即

$$\varepsilon_h = e^2 \sin\theta\cos\left[\frac{\partial T}{r\partial\theta}\right] \tag{12.33}$$

类似地，有

$$\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right] = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right] - e^2\sin\theta\cos\theta\left[\frac{\partial\gamma}{\gamma r\partial\theta}\right] \tag{12.34}$$

由于正常位 $U(r,\theta)$ 的表达式是已知的，可以由此导出 $\gamma = -\frac{\partial U}{\partial h}$ 以及 $\frac{\partial\gamma}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}$，详细推导从略，结果如下（Pavilis，1988）：

$$\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right]T = -\frac{2}{r}T + \varepsilon_\gamma \tag{12.35}$$

$$\varepsilon_\gamma = \left[6J_2\frac{a^2}{r^3}P_2(\cos\theta) - \frac{3\omega^2 r^2}{GM}\sin^2\theta\right]T \tag{12.36}$$

式中：$J_2 \approx \frac{2}{3}f - \frac{1}{3}m$ 为二阶带谐系数（动力形状因子），其余符号意义同前。

ε_h 和 ε_γ 均可利用 T 的球谐展开式，用球谐级数表示。ε_P 可变换为与 ε_h 相似的形式，它们之间存在比例关系，实际计算时可合并为一项。椭球改正在这里有两种处理方法：一种是进一步导出由于 ε_h 和 ε_γ 产生的对位系数的改正项 $\delta\overline{C}_{nm}$ 和 $\delta\overline{S}_{nm}$（Rapp，1986）；另一种是将 ε_h 和 ε_γ 数值格网化，形成格网平均值，格网大小与重力异常格网相同，并直接对格网平均异常进行改正（Pavlis，1988）。

理论上说，以上导出的椭球改正公式也可用于局部重力场计算。由于其中包含未知的扰动位 T 的相关量，用上述两种方法处理计算工作量都比较大，且要有较好的先验位系数，早期这一条件还难以得到保证，因此从 20 世纪 60 年代以来，不少作者导出了适于局部重力场计算的椭球改正公式。其中有代表性的一是 Molodensky（1962）的椭球改正公式，二是 Moritz（1980）的公式。此外，还有 Martinec 等（1997）的公式。这些公式推导的思路和方法不同，以下以 Molodensky 和 Moritz 的公式为例作简要介绍，并给出有关的最新发展。

Molodensky 将两个谐函数 T 和 $1/l$ 在正常椭球面上用于 Green 第二公式，得

$$-2\pi T = \iint_E\left[\frac{1}{l}\frac{\partial T}{\partial h} - T\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{l}\right)\right]\mathrm{d}E \tag{12.37}$$

式中：E 为正常椭球面，$\frac{\partial}{\partial h}$ 为椭球面法向偏导数。又利用椭球面边值条件（12.9）消去上式中的 $\frac{\partial T}{\partial h}$，得椭球面边值问题关于待定函数 T 的积分方程：

$$2\pi T = \iint_E \frac{\Delta g}{l}\mathrm{d}E + \iint_E T\left[\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{l}\right) - \frac{1}{l\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right]\mathrm{d}E \tag{12.38}$$

利用椭球面几何关系将以上第二项积分核中的所有量都化成与旋转椭球相关的几何量和物理量，如下式：

$$2\pi T = \iint_E \frac{\Delta g}{l}\mathrm{d}E + \iint_E \frac{T}{l}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{2N} + \frac{2\omega^2}{\gamma} - \frac{e'^2 n^2}{2N}\right)\mathrm{d}E \tag{12.39}$$

式中：M 和 N 分别为子午圈和卯酉圈曲率半径，ω 为地球自转角速度，n 的意义为

$$n=\frac{1}{l}\frac{b^2}{a^2}(N_P\sin\varphi_P-N_Q\sin\varphi_Q)$$

式中：a 和 b 分别为椭球长、短半轴；P 为计算点；Q 为积分流动点；φ 为大地纬度（本书在少数情况下也用 B 表示大地纬度）。

进一步按椭球几何关系展开式(12.39)，并引进辅助函数

$$\begin{cases}\Delta\bar{g}=\Delta g\left(1-\frac{3}{4}e'^2\sin^2\varphi\right)\\ \bar{T}=T(1-\frac{1}{4}e'^2\sin^2\varphi)\end{cases}\tag{12.40}$$

则式(12.39)的解可写成以下形式：

$$\bar{T}=\bar{T}_0+e'^2\bar{T}_1+e'^4\bar{T}_2+\cdots\tag{12.41}$$

略去 $e'^4\bar{T}_2$，根据式(12.40)对 $\bar{T}$、$\bar{T}_0$ 和 $\bar{T}_1$ 作进一步变换，最后得

$$N(P)=N_0(P)+e'^2N_1(P)\tag{12.42}$$

式中：N_0 为 Stokes 公式的球面解，e'^2N_1 为椭球改正：

$$\begin{aligned}N_1(P)=\frac{a}{4\pi\gamma}\Big[&\iint_\sigma\Delta g(Q)f_1(P,Q)\mathrm{d}\sigma\\&+\iint_\sigma\chi(Q)f_2(P,Q)\mathrm{d}\sigma\\&+\iint_\sigma T_0(Q)f_3(P,Q)\mathrm{d}\sigma\end{aligned}\tag{12.43}$$

式中：

$$T_0(P)=\iint_\sigma\Delta g(Q)S(\psi_{QP})\mathrm{d}\sigma\tag{12.44}$$

$$\chi(P)=\iint_\sigma T_0(Q)f_3(P,Q)\mathrm{d}\sigma\tag{12.45}$$

$$f_1(P,Q)=\frac{\cos^2\theta_Q-3\cos\theta_P}{4}S(\psi_{QP})\tag{12.46}$$

$$f_2(P,Q)=\frac{3}{8\pi}S(\psi_{QP})\tag{12.47}$$

$$F_3(P,Q)=\frac{1}{8\pi}\left[\frac{4-5\cos^2\theta_P}{\sin\frac{\psi_{PQ}}{2}}-\frac{(\cos\theta_Q-\cos\theta_P)^2}{4\sin^3\frac{\psi_{PQ}}{2}}\right]\tag{12.48}$$

式中：$T_0(Q)$ 和 $\chi(Q)$ 为计算区所有计算点的相应值，理论上是定义在 σ 上的连续函数；其余符号均同 Stokes 公式中相同符号的意义。

Fei 和 Sideris(2000)根据 Molodensky 类似的思路，得到另一形式的积分方程。他们用广义 Stokes 函数代替函数 $1/l$，同样在椭球面上应用 Green 第二公式，得到的积分方程为

$$\begin{aligned}4\pi T(P)=&\iint_\sigma T(Q)K(P,Q)r_Q^2\sec\delta_Q\mathrm{d}\sigma+\\&\iint_\sigma\Delta g(Q)S(P,Q)r_Q^2\sec\delta_Q\mathrm{d}\sigma\end{aligned}\tag{12.49}$$

式中：$S(P,Q)$ 为广义 Stokes 函数，δ_Q 是流动点 Q 上椭球法线与矢径方向之间的夹角（见图

1－9)，核函数 $K(P,Q)$ 的定义为：

$$K(P,Q) = \frac{\partial S(P,Q)}{\partial h} - \frac{1}{\gamma_Q}\frac{\partial \gamma_Q}{\partial h}S(P,Q) \tag{12.50}$$

同样利用椭球面几何关系，经比较复杂的推导，结果如下：

$$N(P) = N_0(P) + e^2 N_1(P) \tag{12.51}$$

式中：$N_0(P)$ 为 Stokes 球面积分。

$N_1(P)$ 的表达式为：

$$N_1(P) = N_{11}(P) + \frac{1}{4\pi}\iint_\sigma N_0(Q) f_0(P,Q)\,\mathrm{d}\sigma \tag{12.52}$$

$$N_{11}(P) = \left[\frac{\sin^2\theta_P}{2} - \frac{1}{3}\right]N_0(P) - \frac{\bar{g}R}{\gamma_P}\left[\frac{\sqrt{5}}{15}\delta J_{20} + \cos\theta_P\frac{3\sqrt{7}}{35}\delta J_{30} + \sin\theta_P\cos\lambda_P\frac{\sqrt{42}}{35}\delta J_{31} + \sin\theta_P\sin\lambda_P\frac{\sqrt{42}}{35}\delta K_{31}\right] \tag{12.53}$$

$$f_0(P,Q) \approx \frac{3\cos^2\theta_P - (\sin\theta_P\cos\alpha_{QP})^2 - \frac{3}{2}\sin 2\theta_P\cos\alpha_{QP}}{\psi_{QP}} \quad (\psi_{QP} \leqslant 1) \tag{12.54}$$

式中：$\bar{g}$ 为全球平均重力值；R 为地球平均半径；δJ_{nm}、$\delta K_{31}(n=2,3,m=0,1)$ 为扰动位 T 的位系数（通常用于卫星轨道计算，与 $\bar{C}_{nm}$ 和 $\bar{S}_{nm}$ 有转换关系）；α_{QP} 为 P 点至 Q 点的方位角。

这里给出的 f_0 表达式是近似式，精密公式见有关文献（Fei, et al., 2000）。这个公式比 Molodensky 公式少了多个中间参数（χ, f_2, f_3）的计算，若采用 f_0 近似式计算，则整个计算过程比较简便。此外，Wang(1999)还利用 Molodensky 公式导出了重力异常的椭球改正公式，也有一定的实用价值。

Moritz(1980)推导椭球改正采用了另一种思路。他首先按点的球面坐标等于该点在椭球面的大地坐标建立椭球面与球面一一对应的映射关系，则椭球面上重力参数（$\Delta g, \xi, \eta, N$ 等）按此映射关系转换为球面上的重力参数加椭球改正。但定义扰动位函数 $T(\varphi,\lambda)$ 在椭球面上的值等于球面上对应点的值，是其思路的出发点。然后，他利用 $T(\varphi,\lambda)$ 分别在椭球面上和球面上计算其泛函（$\Delta g, \xi, \eta, N$），两个面上对应点计算值之差便是相应参数的椭球改正，再用椭球改正公式去改正对应参数的观测值。公式的详细推导见有关文献（Moritz, 1980）。其椭球改正计算公式可综合归纳为如下应用公式：

$$N(P) = N_0(P) + e^2 N_1(P) \tag{12.55}$$

$$N_1(P) = \bar{N}_{11}(P) + \frac{R}{4\pi\gamma_P}\iint_\sigma \Delta g^1(Q) S(\psi_{QP})\,\mathrm{d}\sigma \tag{12.56}$$

$$\bar{N}_{11}(P) = \frac{1 - 3\sin^2\varphi}{4}\frac{R}{4\pi\gamma_P}\iint_\sigma \Delta g(Q) S(\psi_{QP})\,\mathrm{d}\sigma \tag{12.57}$$

$$\Delta g^1(Q) = \frac{1}{R}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(G_{nm}\cos m\lambda + H_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\cos\theta) \tag{12.58}$$

$$G_{nm} = k_{nm}C_{n-2,m} + \lambda_{nm}C_{nm} + \mu_{nm}C_{n+2,m} \tag{12.59}$$

$$H_{nm} = k_{nm}S_{n-2,m} + \lambda_{nm}S_{nm} + \mu_{nm}S_{n+2,m} \tag{12.60}$$

$$k_{nm} = -\frac{3(n-3)(n-m-1)(n-m)}{2(2n-3)(2n-1)} \tag{12.61}$$

$$\lambda_{nm} = \frac{n^3 - 3m^2 n - 9n^2 - 6m^2 - 10n + 9}{3(2n + 3)(2n - 1)} \tag{12.62}$$

$$\mu_{nm} = -\frac{(3n + 5)(n + m + 2)(n + m + 1)}{2(2n + 5)(2n + 3)} \tag{12.63}$$

其中：$N_0(P)$意义同前；C和S为位系数；$\overline{N}_{11}(P)$与$N_0(P)$只差一个因子；$\Delta g^1(Q)$类似于用位系数计算的模型值。

以上公式计算也比较方便。

Martinec等(1997)给出的椭球改正公式为

$$N_1(P) = \frac{b}{4\pi\gamma_P}\iint_\sigma \Delta g(Q) f_M(P,Q)\,\mathrm{d}\sigma \tag{12.64}$$

$$\begin{aligned} f_M = {} & \sin\bar{\theta}_P(\cos\bar{\theta}_P \sin\psi_{QP}\cos\psi_{QP}\cos\alpha_{QP} - \sin\bar{\theta}_P\cos^2\psi_{QP}\cos^2\alpha_{QP} \\ & + \sin\bar{\theta}_P\sin^2\alpha_{QP})K_1(\cos\psi_{QP}) + (1 - \sin^2\bar{\theta}_P\sin^2\alpha_{QP})K_2(\cos\psi_{QP}) \\ & - \sin\bar{\theta}_P\cos\alpha_{QP}(\cos\bar{\theta}_P\sin\psi_{QP} - \sin\bar{\theta}_P\cos\psi_{QP}\cos\alpha_{QP})K_3(\cos\psi_{QP}) \\ & - K_4(\cos\psi_{QP}) \end{aligned} \tag{12.65}$$

$$K_1(t) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{2j - 1}{(j - 2)^2(2j + 1)} \frac{\mathrm{d}P_j(t)}{\mathrm{d}t} \tag{12.66}$$

$$K_2(t) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(j + 1)^2(2j + 1)}{(j - 1)^2(2j + 3)} P_j(t) \tag{12.67}$$

$$K_3(t) = \sum_{j=3}^{\infty} \frac{j(2j - 1)}{(j - 1)^2(2j + 1)} P_j(t) \tag{12.68}$$

$$K_4(t) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(j + 1)(2j + 1)}{(j - 1)^2} P_j(t) \tag{12.69}$$

式中：$\bar{\theta}_P$为P点的归化纬度；$P_j(t)$为Legendre多项式。

以上公式的推导采用的边值条件与Molodensky边值条件有差别，其差为$T(\theta)[e^2\cos 2\theta_Q + o(e^4)]/b$。据研究，这一差别对椭球改正的影响不大。这一公式的计算也比较简便。

12.2.2.3 关于大气改正问题

在边值问题中总是假定扰动位T在地球表面外部空间Ω内是调和函数，因此在Ω中不能存在物质，这就要求在边值问题解算中消除大气对Δg的影响，称为大气改正。

海面上大气密度为$\rho_0 = 1.23 \times 10^{-3}\mathrm{g/cm^3}$，不足地壳密度的千分之一，对重力影响很小，可以用一个简单的大气模型研究这一问题。假设地球是一个半径为R的圆球，大气是包围地球成对称球层分布的大气圈，总质量设为M_A，并认为同层密度均匀。在近地空间有一测点P(图12.7)，通过P点的球面与地球之间的大气层为A_1，质量设为$m(r)$，其外的大气层为A_2，质量为$M(r)$。根据位理论，球层A_2对P点的引力为零，而A_1质量对P点的引力等效于A_1全部质量集中于球心产生的引力F，则

$$F = G\frac{m(r)}{r^2} \tag{12.70}$$

或

$$F = G\frac{M_A}{r^2} - G\frac{M(r)}{r^2} \tag{12.71}$$

上式第一项是整个大气圈的总引力效应,第二项是 A_2 质量 $M(r)$ 的引力效应。

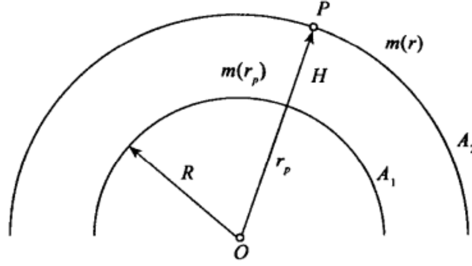


图 12.7　球对称大气层模型

在定义大地测量参考系统时,例如 GRS67 和 GRS80,正常椭球的总质量中包括了大气圈的质量(集中在地心),即椭球面的正常位 U_0 中包含了大气圈产生的位 $U_A = GM_A/R$,在 P 点产生的正常引力为 GM_A/r_P^2。在此情况下,设 P 点消除了大气引力影响的重力和正常重力分别为 g'_P 和 γ'_P,则

$$g'_P = g_P - F = g_P - G\frac{M_A}{r_P^2} + G\frac{M(r)}{r_P^2} \tag{12.72}$$

$$\gamma'_Q = \gamma_Q - G\frac{M_A}{r_Q^2} \tag{12.73}$$

相应的重力异常 $\Delta g'_P$ 略去 r_P 与 r_Q 的微小差别,有

$$\Delta g'_P = \Delta g_P + G\frac{M(r)}{r_P^2} \tag{12.74}$$

用 δg_A 表示对实测 Δg 的大气改正,则有

$$\delta g_A = G\frac{M(r)}{r_P^2} \tag{12.75}$$

式中:$r_P = R + H_P$;$r = R + H_P + r'$(r'是变量,$r' \to \infty$)。

利用已知的标准大气成层分布模型,通过在区间(r_P,∞)对 A_2 质量的积分可计算出 $M(r) = M(H_P)$,因此 δg_A 只是高程 H_P 的函数(R 已知)。IAG 1971 年编制了由高程 H 查取 δg_A 的数表(Moritz,1984),计算 $M(r)$ 时采用了 1961 年标准大气模型 CIRA 和美国标准大气模型,并按球层取平均作为采用值。1982 年 Wichiencharoen 对此数表按高程作了二次多项式拟合,结果为

$$\delta g_A(\mathrm{mGal}) = 0.8658 - 9.727\times10^{-5}H(\mathrm{m}) + 3.482\times10^{-9}H^2(\mathrm{m}) \tag{12.76}$$

这就是目前通用的重力大气改正公式。

上述理论是 Ecker 等(1969)提出的,称 δg_A 为大气的直接重力影响。据此,要求在用 Stokes 计算大地水准面时,应对 Δg 事先加 δg_A 的改正,被称为 IAG 方法。Sjöberg,et al(1998,1999)对此方法作了研究,发现应用这一方法可能会产生较大偏差。Stokes 公式通常都用于一个半径为 ψ_0 的局部球冠 σ_0 范围,产生的远区截断偏差为

$$\delta N = -\frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma-\sigma_0} S(\psi)\delta g^* \mathrm{d}\sigma \tag{12.77}$$

式中：

$$\delta g^{*} = \frac{GM(r)}{R^2} = \gamma_a - \frac{GM(r)}{R^2} \tag{12.78}$$

$$\gamma_a = \frac{GM_A}{R^2} \tag{12.79}$$

γ_a 是海平面大气重力影响(0.87mGal)，$Gm(r)/R^2$ 是 A_1 区大气重力影响，量级非常小，可略去，则

$$\delta N \approx -\frac{R\gamma_a}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma-\sigma_0} S(\psi)\,\mathrm{d}\sigma = -\frac{R\gamma_a}{2\gamma}Q_0(\psi_0) \tag{12.80}$$

式中：

$$Q_0(\psi_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} S(\psi)\sin\psi\,\mathrm{d}\psi \tag{12.81}$$

积分结果为(设 $\cos\psi_0 = t_0$)：

$$Q_0(\psi_0) = -4t_0 + 5t_0^2 + 6t_0^3 - 7t_0^4 + 6t_0^2(1 - t_0^2)\ln[t_0(1 + t_0)] \tag{12.82}$$

取 $R = 6\ 371\mathrm{km}$，$\gamma = 981\mathrm{Gal}$，$\gamma_a = 0.87\mathrm{mGal}$，则

$$\delta N \approx -2.82Q_0(\psi_0)\ (\mathrm{m}) \tag{12.83}$$

当 $\psi_0 = 39°$时，δN 达到最大值为 1.8m，因此作者认为 IAG 方法存在严重偏差，其原因在于 δg^{*} 中包含一个相对较大的 γ_a 常数值。在 Stokes 公式全球积分中其作用将消失(注意核函数 $S(\psi)\sin\psi$ 类似一正弦曲线)，但在截断积分中将保留其作用。为避免这一问题，作者建议采用以下大气重力改正公式

$$\delta g = \frac{GM(r)}{r^2} - \gamma_a \tag{12.84}$$

我们认为这一方法未必妥当，因为目前由于采用了全球位模型作参考场，ψ_0 通常取 0.5°～1°，当 $\psi_0 = 1°$时，计算结果表明，截断偏差 $\delta N = 0.005\mathrm{m}$，完全可忽略不计，这是因为远区范围已接近全球，$\gamma_a$ 的作用基本上消失了，但在 ψ_0 中理论上还应保留 γ_a。虽然作者在文中指出全球重力场的采用与大气重力改正无关，这在理论上无疑是正确的，但在实用上全球重力模型的利用可大大缩小积分范围，使这种偏差实际上不发生作用。诚如作者在文中又指出的，在全球积分的情况下，IAG 方法与作者的方法差别只有几毫米。

值得注意的是，作者给出了大气改正的严密公式(Sjöberg,1999)，其基本思想是用严密的积分表达任一点 P 的大气重力位 $V^a(P)$：

$$V^a(P) = \iint_{\sigma}\int_{r_s}^{\infty} \frac{\rho_a^{*} r^2\,\mathrm{d}r}{l_P}\mathrm{d}\sigma \tag{12.85}$$

式中：$\rho_a^{*} = G\rho_a$；ρ_a 为大气密度；$l_P^2 = r_P^2 + r^2 - 2r_P r\cos\psi$；$r_s = R + H$ 为地球表面向径。又假定大气密度成层分布律为

$$\rho^{*}(r) = \rho_0^{*}(R/r)^{v} \quad (v > 2) \tag{12.86}$$

式中：ρ_0^{*} 相应于海平面的大气密度。

将 $1/l_P$ 展开成球谐级数，且引入展开式

$$\left(\frac{R}{r_s}\right)^{m} = 1 - m\frac{H}{R} + \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{H}{R}\right)^2 \tag{12.87}$$

略去复杂推导过程，得到以下级数解

$$V^a(P) = 4\pi\rho_0^* R^2\left\{\frac{1}{v-2} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{r_P}{R}\right)^n\frac{H_n^*(P)}{R}\right\} \tag{12.88}$$

式中：

$$\begin{cases} H_n^*(P) = H_n(P) - \dfrac{(n+v-1)}{2}\dfrac{H_n^2(P)}{R} \\ H_n^k(P) = \sum\limits_{m=-n}^{n} H_{nm}^k Y_{nm}(P) \qquad k = 1,2 \\ H_{nm}^k = \dfrac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma} H^k Y_{nm}\mathrm{d}\sigma \qquad k = 1,2 \\ H = H(P) \end{cases} \tag{12.89}$$

式中：Y_{nm}为完全规格化球谐函数。再对 $V^a(P)$给出边值条件

$$\Delta g^a(P) = \left(\frac{\partial}{\partial r_P} + \frac{2}{r_P}\right)V^a(P) \tag{12.90}$$

注意该边值条件与通常 Stokes 边值条件意义不同，其中 $2V^a/r = -\dfrac{\partial\gamma}{\partial r}\dfrac{V_a}{\gamma}$，由此解得大气直接重力影响（作者用 Δg_{dir}^a表示）：

$$\delta g_{dir}^a = 4\pi\rho_0^*\left\{\frac{2R}{v-2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{2n+1}H_n^*(P)\right\} \tag{12.91}$$

对 Stokes 积分的影响为（作者用 N_{dir}^a表示）：

$$\delta N_{dir}^a = -\frac{V_0^a}{\gamma} - \frac{V_1^a(P)}{\gamma} + \frac{R}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\sigma} S(\psi)\Delta g_{dir}^a\mathrm{d}\sigma \tag{12.92}$$

式中：

$$V_0^a = 4\pi\rho_0^* R^2\left(\frac{1}{v-2} - \frac{H_0^*}{R}\right)$$

$$V_1^a(P) = -4\pi\rho_0^* RH_1^*(P)/3$$

将 $S(\psi)$展开成球谐级数（按球函数加法定理，用 $Y_{nm}(P)Y_{nm}(P')$表示，最后得

$$\delta N_{dir}^a(P) = -\frac{V_0^a}{\gamma} - \frac{V_1^a(P)}{\gamma} - \frac{4\pi\rho_0^* R}{\gamma}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+2}{(2n+1)(n-1)}H_n^*(P) \tag{12.93}$$

消除大气的间接影响为：

$$\delta N_{Ind}^a(P) = \frac{V^a(P)}{\gamma} = \frac{V_0^a}{\gamma} + \frac{V_1^a(P)}{\gamma} - \frac{4\pi\rho_0^* R}{\gamma}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}H_n^*(P) \tag{12.94}$$

将 δN_{dir}^a和 δN_{Ind}^a相加，最后得总的大气对大地水准面的影响如下：

$$\delta N_{total}^a = -\frac{4\pi\rho_0^* R}{\gamma}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}H_n^*(P) \tag{12.95}$$

或

$$\delta N_{total}^a = -\frac{\rho_0^* R}{\gamma}\iint\limits_{\sigma} S(\psi)H^*\mathrm{d}\sigma \tag{12.96}$$

由式(12.88)，上式中的 H^*为

$$H^* = H - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+v-1}{2}\frac{H_n^2}{R} \tag{12.97}$$

且

$$\frac{4\pi\rho_0^* R}{\gamma} = 0.670\text{m/km} \tag{12.98}$$

试算结果表明，式（12.97）右边第二项约在 5mm 之内，可略去，即取 $H^* = H$，δN_{total}^a 可达 -60cm。严密公式（12.95）或（12.96）与改进的 IAG 方法（12.77）（其中 δg^* 中减去了 γ_a）之差为

$$\text{Diff}(\delta N_{total}^a) = -\frac{2\pi\rho_0^*}{\gamma}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{n-1}H_n^2 \approx \frac{2\pi\rho_0^*}{\gamma}H^2 \tag{12.99}$$

当 $H = 10$km 时，差值为 5mm，但这是全球积分意义下的差值，与前面分析结果一致。我们的结论是，当 $\psi_0 \leq 1°$ 时，不论用 IAG 方法，还是采用上述严密公式，其影响仅为几毫米，只有精度要求为毫米级时才考虑用上述严密公式。

12.2.2.4 区域高程基准问题和正常重力的改正

利用地面重力数据按 Molodensky 边值条件求解 T 的位系数，要求全球的重力异常数据 $\Delta g = g_P - \gamma_Q$，其中似地形表面 Q 点的正常重力的计算公式为

$$\gamma_Q = \gamma_{Q_0} + \left[\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right]_{Q_0} h^* + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial h^2}\right]_{Q_0} h^{*2} \tag{12.100}$$

式中：下标 Q_0 表示 Q 点在正常椭球面的法向投影点；h^* 是由水准测量测定的正常高，理论上要求 h^* 属于一个全球统一高程基准（同一个重力等位面），实际上目前各个国家和地区都采用各自特定验潮站定义的平均海面作为高程基准，全球有近百个不同的高程基准，其间的位差相应的高程差在 1～2m 范围。

应用（12.100）计算，γ 在全球将产生 0.3～0.6mGal 的不一致性。目前不同高程基准之间的位差还是未知的，全球统一高程基准的精确定义还远未确定，这个统一基准在理论上是与全球平均海面最佳密合的重力等位面，即全球统一定义的大地水准面（在海洋上与似大地水准面重合），重力位为 W_0（= 常数）。现在设不同高程基准的对应位值为 $W_0^k(k = 1, 2, \cdots, n)$，统一全球高程基准在于确定未知量 $\Delta W_0^k = W_0 - W_0^k(k = 1, 2, \cdots, n)$，将其作为重力异常。关于位系数的观测方程（12.15）中的系统误差参数，通过平差理论上可和位系数同时求解。实践中，由于全球地面重力异常数据的不完善，目前还难以求得 ΔW_0^k 的可靠解，因此大多数位模型的观测方程都未包括此项，个别模型的研制考虑了这一未知参数（Pavlis, 1988），但未发表求解的结果，以下给出这一高程基准差参数项的表达式。

设 h^* 和 h_k^* 分别是属于统一高程基准和第 k 个区域高程基准的正常高，由式（12.100）可得

$$\gamma_Q = \gamma_Q^k + \left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)_{Q_0} + \left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial h^2}\right)_{Q_0} h_k^*\right](h^* - h_k^*) \tag{12.101}$$

式中：

$$\gamma_Q^k = \gamma_{Q_0} + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)_{Q_0} h_k^* + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial h^2}\right)_{Q_0} h_k^{*2} \tag{12.102}$$

设点 P 的大地位数（位基数）对全球和区域高程基准分别为 C_P 和 C_P^k，则有

$$\begin{cases} C_P = W_0 - W_P \\ C_P^k = W_0^k - W_P \end{cases} \tag{12.103}$$

根据正常高的定义有：

$$(h^* - h_k^*)_P = \frac{1}{\overline{\gamma}_P}(C_P - C_P^k) = \frac{1}{\overline{\gamma}_P}(W_0 - W_0^k) \tag{12.104}$$

式中：$\overline{\gamma}_P$ 为 P 点沿正常重力线到似大地水准面的正常重力平均值，或似地形面上对应的 Q 点沿正常重力线到正常椭球面的正常重力平均值 $\overline{\gamma}_Q$，且认为 $\overline{\gamma}_P = \overline{\gamma}_Q$。又设 $\Delta W_0^k = W_0 - W_0^k$，则由式(12.101)、(12.102)，有

$$\Delta g \approx \Delta g^k - \frac{1}{\gamma_{Q_0}}\left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right)_{Q_0} + \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2}\right)_{Q_0} h_k^*\right]\Delta W_0^k = \Delta g^k - a_3 \Delta W_0^k \tag{12.105}$$

式中：$\Delta g^k = g_P - \gamma_Q^k$，系数 a_3 可由正常重力公式和正常高的定义用点 P 的矢径 r_P 和正常椭球参数(a, J_2, ω 等)表达，此处从略，$a_3 \Delta W_0^k$ 可视为 Δg 的观测方程待求参数项。

由于 Δg 观测值中含有的高程基准偏差信息微弱，一般小于 0.6mGal，难于从格网平均重力异常的其他误差源分离。但当有一个较好的先验值 W_0，例如可从未来新一代卫星重力数据确定比较可靠的大地水准面位值，在用卫星重力数据和地面重力数据联合解算位系数的模型中可考虑引入未知参数 ΔW_0^k，可望解得可靠的结果。目前这项偏差还无法顾及，对求解位系数和确定全球大地水准面影响的量级有待研究。

式(12.100)包括高程的二次项，早期在米级精度要求下，Δg 的计算都略去了这一项，用 $\delta g h^2$ 表示这一项对 Δg 的改正，则有

$$\delta g_{h^2} = -3\gamma_e \left[\frac{h^*}{a}\right]^2 \tag{12.106}$$

式中：a 为椭球长半径。经研究该项误差在我国珠峰地区对大地水准面的最大影响 $\delta N_{h^2} = -1.80$m；δg_{h^2}对 Δg 长波段(2～36 阶)影响的 RMS 为 ±0.12mGal，对大地水准面的相应影响的 RMS 为 ±0.22m。因此在分米级精度要求下应顾及 δg_{h^2}的改正。

正常重力的计算不仅涉及高程基准，还涉及由正常椭球参数确定的正常重力公式，目前普遍采用 GRS80 国际椭球，当最初计算 Δg 采用的正常重力公式与 GRS80 系统不一致，则应加以改正，以满足全球重力异常数据应属于一个统一的正常重力参考场的要求。

12.2.2.5 地面重力异常的延拓改正

Molodensky 边值问题理论边界面是似地形面，为避免处理这一复杂的边界面，在 11.4 节中讨论了将地面重力异常向下延拓的概念，全球位模型构制是采用参考椭球面为边值面，式(12.9)中的边值条件是用椭球面法向偏导数表示，但 Δg 仍然是似地形表面上的数据，需要将其形式地向下延拓到参考椭球面上，并保证正逆延拓算子相乘为单位算子，使其向上延拓能恢复地面重力异常观测数据。本书在 11.4.3 节详细介绍了 Moritz 提出的延拓算法，向下延拓到椭球面的重力异常 $\Delta g'$可用以下级数表示：

$$\Delta g' = \Delta g + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \tag{12.107}$$

$$g_1(P) = -h_P L_1(\Delta g) \tag{12.108}$$

$$g_2(P) = -h_P L_1(g_1) - h_P^2 L_2(\Delta g) \tag{12.109}$$

……

式中：

$$L_1(\Delta g) = \frac{R^2}{2\pi}\iint_\sigma \frac{\Delta g - \Delta g_P}{l_0^3} d\sigma \tag{12.110}$$

$$L_n(\Delta g) = \frac{1}{n!}L^n(\Delta g) = \frac{1}{n!}\overbrace{LL\cdots L(\Delta g)}^{n次} \tag{12.111}$$

$$L(\Delta g) = L_1(\Delta g) \tag{12.112}$$

通常取

$$\Delta g' = \Delta g + g_1 \tag{12.113}$$

由于 L 是梯度算子,因此有

$$g_1 = -h\frac{\partial \Delta g}{\partial h} \tag{12.114}$$

若假定 Δg 与 h 有线性关系,则 g_1 近似地改正为 δg_{TC}。

12.2.2.6 消除高频成分

扰动位的球谐展开是一个无穷级数,位模型只能根据地面数据实际分辨率展开到有限阶次,而重力观测数据本身含高频成分,如展开的最高阶为 $N_{\max}$,相应的地面分辨率为 d,则尺度小于 d 的局部扰动质量(地形)对重力异常的贡献就需要加以消除,否则这些高频成分在被截断的球谐分析中会混叠到所要恢复的频谱中,造成位系数解的失真。

消除高频成分有两种基本方法,第一种是根据 $N_{\max}$ 确定一个相应的地面格网尺度 $\Delta\sum = d\times d$,例如 $N_{\max} = 180$,则 $\Delta\sum = 1°\times 1°$,$N_{\max} = 360$,$\Delta\sum = 0.5°\times 0.5°$ 等,依次类推。然后用适当的方法根据地面重力数据的分布计算每一格网的平均值,形成一个格网平均重力异常数据集。算术平均算子是一种最简单的低通滤波器,通过平均将偏离均值的高频分量平滑掉。第二种是在构制低阶位模型时,一般 $N_{\max}\leqslant 50$,利用一个高阶位模型(例如360阶),通过计算,将 $N>50$ 的高阶模型重力异常从观测值中减去。

第一种方法普遍用于构制高阶位模型,但由于数据分布不均,要利用数字地形模型(DTM)内插加密格网的重力值,在平差时确定准确的格网平均值的误差协方差阵也非易事。第二种方法只在构制低阶位模型时采用,主要要求高阶模型采用的重力数据与低阶模型拟用的数据同源,用所选高阶模型计算的重力异常与低阶模型要用的数据接近(Pavlis,1988),但目前很难有满足这一要求的高阶模型,现有模型都联合应用了多种与地面重力观测不同源的数据,如卫星跟踪和测高数据。

12.2.2.7 位模型的零阶项

利用边值问题建立扰动位球谐展开模型,理论上对正常椭球有以下基本假设:

(1)椭球中心与地球质心重合,短轴与地球自转轴重合,且旋转角速度 ω 与地球平均自转角速度相等。

(2)椭球的总质量 M 等于地球的总质量(大气也包含在内)。

(3)正常椭球面上的正常位 U_0 等于大地水准面上的重力位 W_0。

第一条假设使一阶球谐项消失,扰动位不包含离心力位,这一条件我们认为总是满足的。由(12.15)可以看出,用位系数表示重力异常对 $n=1$ 是拒绝的,即用 Δg 数据不可能解得 C_{10} 和 C_{11} 以及 S_{10} 和 S_{11};第二、三项假设使零阶项消失,但实际上对 M 和 W_0 的估计还不能达到足够精确的程度。设有误差 $\delta M = M_{地球} - M_{椭球}$ 和 $\delta W = W_0 - U_0$,则有零阶球谐项 T_{00}:

$$T_{00} = \frac{G\delta M}{r} - \delta W \tag{12.115}$$

T_{00}同样应满足边值条件(12.9),则有(略去下标 Q)

$$\Delta g' = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h}T - \frac{G\delta M}{r^2} + \frac{2}{r}\Delta W \tag{12.116}$$

经椭球改正并顾及局部高程基准影响项,有

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T + \varepsilon_h + \varepsilon_\gamma + \varepsilon_P + a_1 G\delta M + a^2 \Delta W + a_3 \Delta W_0^k \tag{12.117}$$

式中:

$$a_1 = -\frac{1}{r^2} \tag{12.118}$$

$$a_2 = \frac{2}{r} - \left[6J_2\frac{a^2}{r}P_2(\cos\theta) - \frac{3\omega^2 r^2}{GM}\sin^2\theta\right] \tag{12.119}$$

$$a_3 = -a_2 - 6\frac{h^*}{a^2} \approx -a_2 \tag{12.120}$$

若取

$$a_1 G\delta M + a_2 \Delta W \approx -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{G\delta M}{GM} - \frac{2R\Delta W}{GM}\right) \tag{12.121}$$

对照(12.15),当 $n=0$ 时,有($\bar{S}_{00}$消失):

$$\bar{C}_{00} = \frac{G\delta M}{GM} - \frac{2R\Delta W}{GM} \tag{12.122}$$

$\bar{C}_{00}$一般都应该列入 Δg 的观测方程作为待估系数,特别是数据覆盖不完善会造成未知数之间相关,引入 $\bar{C}_{00}$很重要,但主要作用是检核解的相容性和可靠性,因为更精确的 GM 和 W_0 的值可由卫星技术提供,并用于检核解得的 $\bar{C}_{00}$值。

12.2.2.8 格网平均重力异常观测方程和调和分析模型

在椭球面上按等经、纬度间隔 $\Delta\varphi = \Delta\lambda$ 建立 $2N^2$ 个梯形状等角格网,$N = \pi/\Delta\lambda$,任一格网用标号 i,j 表示,格网结点纬度和经度用 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,N)$ 和 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,2N)$ 表示。将分析模型所有涉及的量都用格网平均值表示,则格网平均重力异常观测方程可表示为

$$\Delta\bar{g}_{ij} + \delta g_A^{ij} = \frac{1}{\Delta\sigma_i}\frac{GM}{\bar{r}_{ij}^2}\sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{N_{\max}}(n-1)\left(\frac{a}{\bar{r}_{ij}}\right)^n\sum_{m=0}^{n}(\bar{C}_{nm}IC_m^j + \bar{S}_{nm}IS_m^j)I\bar{P}_{nm}^i$$
$$+ I\hat{E}_h^{ij} + I\hat{E}_\gamma^{ij} + IE_P^{ij} + IE_r^{ij} \tag{12.123}$$

在这个方程中略去了 $a_3\Delta W_0^k$ 项,并假定地面重力异常已加了延拓改正、正常重力公式系统差改正(化到 GRS80 系统的改正)以及正常重力高程的二次项改正。模型中的 δg_A^{ij} 为大气改正的格网值,$\Delta\sigma_i$ 为第 i 个纬度带的格网面积:

$$\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma_i}\cos\varphi\,d\varphi\,d\lambda = \int_{\varphi_i}^{\varphi+1}\cos\varphi\,d\varphi\int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}}d\lambda \tag{12.124}$$

$$\begin{Bmatrix} IC_m \\ IS_m \end{Bmatrix}^j = \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}m\lambda\,d\lambda \tag{12.125}$$

$$I\overline{P}^{i}_{nm} = \int_{\varphi_i}^{\varphi+1} \overline{P}_{nm}(\sin\varphi)\cos\varphi \mathrm{d}\varphi \tag{12.126}$$

设 $\hat{\varepsilon}_h$ 和 $\hat{\varepsilon}_\gamma$ 分别是 ε_h 和 ε_γ 取有限阶的球谐展式，则 $I\hat{E}_h^{ij}$ 和 $I\hat{E}_\gamma^{ij}$ 分别是 $\hat{\varepsilon}_h$ 和 $\hat{\varepsilon}_\gamma$ 在 σ_{ij}上的积分平均值，IE_P^{ij} 则是 ε_P 在 σ_{ij}上的积分平均值。IE_r^{ij} 是矢径 r 在 σ_{ij}中的变化对重力异常产生的影响，将点值重力异常观测方程式(12.15)表示为

$$\Delta g(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{a^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}D_{nm}\overline{P}_{nm} \tag{12.127}$$

式中：

$$D_{nm} = \overline{C}_{nm}\cos m\lambda + \overline{S}_{nm}\sin m\lambda \tag{12.128}$$

$$\overline{P}_{nm} = \overline{P}_{nm}(\cos\theta)$$

将 $r(\varphi)$ 在 $r=\bar{r}_{ij}$处展开，$\bar{r}_{ij}$是 r 在 σ_{ij}上的平均值，则有

$$r(\varphi) = \bar{r}_{ij} - \frac{1}{2}\frac{e^2\sin 2\overline{\varphi}_i}{\bar{r}_{ij}}\overline{N}_i(\overline{M}_i + \bar{h}_{ij})(\varphi - \overline{\varphi}_i) + \cdots \tag{12.129}$$

式中：$\overline{N}_i$、$\overline{M}_i$ 和 $\bar{h}_{ij}$分别是 σ_{ij}上卯酉圈曲率半径、子午圈曲率半径和高程的平均值，则有

$$\left[\frac{1}{r(\varphi)}\right]^{n+2} = \left(\frac{1}{\bar{r}_{ij}}\right)^{n+2}\left[1 + \frac{n+2}{2}\frac{e^2\sin 2\overline{\varphi}_i}{\bar{r}_{ij}^2}\overline{N}_i(\overline{M}_i + \overline{H}_{ij})(\varphi - \overline{\varphi}_i) + \cdots\right] \tag{12.130}$$

或

$$\left[\frac{1}{r(\varphi)}\right]^{n+2} \approx \left(\frac{1}{\bar{r}_{ij}}\right)^{n+2}[1 + X(\varphi)] \tag{12.131}$$

上式代入(12.127)，得

$$\Delta g \approx \frac{GM}{a^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{a}{\bar{r}_{ij}}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}D_{nm}\overline{P}_{nm} + \frac{GM}{a^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{a}{\bar{r}_{ij}}\right)^{n+2}\sum_{m=0}^{n}D_{nm}X(\varphi)\overline{P}_{nm} \tag{12.132}$$

$\bar{r}_{ij}$实际上相当于格网中心点的地心矢径，则上式可简写为

$$\Delta g = \Delta g^0 + \varepsilon_r \tag{12.133}$$

式中：Δg^0 是用格网中心点地心矢径 $\bar{r}_{ij}$和位系数计算的重力异常，ε_r 即由于 r 的变化对重力异常应加的改正，即(12.132)右边第二项。可类似地计算每个格网 σ_{ij}上的平均值，即 IE_r^{ij}。用 δg_{ij}^S表示式(12.123)中所有重力异常改正，则

$$\delta g_{ij}^S = \delta g_A^{ij} - (I\hat{E}_h + I\hat{E}_\gamma + I\hat{E}_P + I\hat{E}_r) \tag{12.134}$$

由于 ε_h 和 ε_P 之间有比例关系，可以合并，上式又可写为

$$\delta g_{ij}^S = \delta g_A^{ij} - \left[\left(1 + \frac{C''_1}{C'_1}\right)I\hat{E}_h + I\hat{E}_\gamma + I\hat{E}_\gamma\right] \tag{12.135}$$

式中：$C' = e^2GM/\bar{r}_{ij}^2$，$C''_1 = 3J_2a^2GM/\bar{r}_{ij}^4 + \omega^2\bar{r}_{ij}$，则式(12.123)可写为

$$\Delta\bar{g}_{ij}^{\,C} = \frac{1}{\Delta\sigma_i}\frac{GM}{\bar{r}_{ij}^{\,2}}\sum_{\substack{n=0\\n\neq 1}}^{N_{\max}}(n-1)\left(\frac{a}{\bar{r}_{ij}}\right)^n\sum_{m=0}^{n}(\overline{C}_{nm}IC_m^j + \overline{S}_{nm}IS_m^j)I\overline{P}^{i}_{nm} \tag{12.136}$$

式中：

$$\Delta\bar{g}_{ij}^C = \Delta\bar{g}_{ij} + \delta g_{ij}^S \tag{12.137}$$

式(12.136)就是格网平均重力异常关于位系数的观测方程最终形式，可以由此组成法方程求

解位系数，观测值权矩阵可由数据源提供的精度信息组成（Rapp，1986）。当有先验位系数可供使用时，还应考虑先验位系数的误差方差阵，这一平差系统有很大的多余观测数。以 $0.5° \times 0.5°$ 格网为例，$N_{max} = 360$，若有完整全球覆盖的格网数据，则有 259 200 个格网值，待求位系数为 130 674，多余观测为 128 526，对格网采取特殊的编号方法，可使法方阵尽量接近对角带形式，以改善其性质。在观测方程中的重力异常改正项 $I\hat{E}_h$，$I\hat{E}_\gamma$ 和 $I\hat{E}_t$ 的实用表达式都很复杂，这些公式的详细推导和具体形式见有关文献（Cruz，1986；Pavilis，1988）。

以上是求解位系数的平差方法，由式（12.16）和式（12.17）可利用数字积分法直接计算位系数，称为调和分析法或数字积分法，计算公式为：

$$\bar{C}^{\alpha}_{nm} = \frac{\mu_n}{4\pi\gamma(n-1)} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{2N-1} \Delta\bar{g}^{C}_{ij} \bar{Y}^{\alpha ij}_{nm} \tag{12.138}$$

式中：

$$\bar{C}^{\alpha}_{nm} = \begin{cases} \bar{C}_{nm}, \alpha = 0 \\ \bar{S}_{nm}, \alpha = 1 \end{cases} \tag{12.139}$$

$$\bar{Y}^{\alpha ij}_{nm} = \begin{cases} I\bar{P}^{i}_{nm} IC^{j}_{m}, \alpha = 0 \\ I\bar{P}^{i}_{nm} IS^{j}_{m}, \alpha = 1 \end{cases} \tag{12.140}$$

μ_n 为改进离散误差的平滑因子（Pellinen 平滑算子）：

$$\mu_n = \begin{cases} 1/\beta_n^2, & 0 \leqslant n \leqslant N/3 \\ 1/\beta_n, & N/3 < n < N \\ 1, & n > N \end{cases} \tag{12.141}$$

$$\beta_n = \frac{\cos\psi_0}{2} \frac{P_{nm}(\cos\psi_0)}{n(n+1)} \tag{12.142}$$

ψ_0 是与格网等面积球冠的角半径，且

$$\cos\psi_0 = 1 - (\cos\theta_N - \cos\theta_S)\Delta\lambda/2\pi \tag{12.143}$$

式中：θ_N 和 θ_S 分别为格网上下底的极余纬。

位系数的数值积分法计算相对简单，但有以下缺陷：

（1）当地面重力数据覆盖不完善（南北极地区无实测数据）时，在有限个格网上的面积平均采样不满足正交化和规格化条件，其结果将歪曲由地面数据分析得到的场谱。模拟研究表明，数值积分不能恢复原位系数。

（2）在位系数的估计中未考虑观测数据的误差影响，由计算的位系数恢复的观测数据将不反映原数据的精度变化而失真，这一方法难以估计由于采用平均异常以及观测误差产生的系数误差。

（3）采用平滑因子改善离散误差时，由于各阶区选择的平滑因子不同，将在不同阶区之间产生尖锐的间断点，也会造成对场谱的歪曲。

由于上述原因，目前这一方法很少单独用于求解位系数，常用于和卫星位系数的联合平差（Rapp，et al.，1986）。

12.2.2.9 地面重力位系数与卫星位系数的联合平差

卫星观测（轨道跟踪或卫星测高数据等）和地面观测（重力测量等）所获取的地球重力场信息有很大的互补性，将这两类观测数据进行联合平差可获得位系数的最优估计解。这两类

观测数据可以看成是完全互相独立的，根据最小二乘法原理，可以事先各自单独进行平差，再求联合解。当利用纯卫星观测数据，例如 SLR 轨道摄动观测数据时，可组成纯卫星观测数据的法方程，其未知参数通常包括低阶（$N \leqslant 50$）位系数集和其他非重力场参数，如地球定向参数、潮汐参数、轨道参数以及测站坐标等。当消去后一类未知参数时，得到仅包含待定位系数的法方程。据此求得的解称为卫星位系数。对地面重力异常观测方程组成法方程，一般包含高阶（$N > 50$）未知位系数，消去高阶待定位系数，得到一个与卫星位系数法方程同阶的法方程，求得的解可称为地面重力位系数。联合平差有两种模式：一种是将两个同阶法方程叠加组成联合法方程，由此求得位系数的联合解，将这一最优估计作为低阶位系数最后结果，再将联合解代入各自的法方程解算其余未知参数，对地面重力观测法方程则解出高阶位系数。卫星观测的法方程系数矩阵一般难以获得，通常可以提供解的精度信息（例如方差阵）。另一种联合平差模式，最简单的情况，是已知各自平差值的误差方差阵或权阵（对角阵），取相同位系数的加权平均值就是联合平差结果。这是不严格的联合平差方法，因为每一类单独平差值的协因数阵 Q_X 都不会是对角阵，存在非对角元，平差值是一组相关"观测量"，应利用相关条件观测平差模型，但卫星位系数的 Q_X 一般不能获得（否则相当于提供了相应的法方程系数矩阵）。这种简单联合平差法对地面重力位系数也有改进作用。目前这一种联合平差模式，是将由地面重力异常作为直接观测值，卫星位系数作为（先验）参数，应用带有未知参数的条件观测平差作为联合平差模型。

设 $X = \overline{C}_{nm}^{a}$ 为待求未知数向量，$L = \overline{\Delta g}$ 为观测向量，$L^{a} = \overline{\Delta g}^{a}$ 为观测量平差值，X_L 为由 $\overline{\Delta g}$ 作调和分析确定的位系数向量，则有带未知数的条件观测方程如下：

$$X - X_L = 0 \tag{12.144}$$

式中：X_L 用式（12.138）代入，则式（12.144）可写成

$$X + B_L \cdot L^{a} = 0 \tag{12.145}$$

式中：$B_L = \{b_{ij}\}$ 为系数矩阵，b_{ij} 为 B_L 中对应格网指标为 i, j 的元素，即式（12.138）中关于 $\overline{\Delta g}_{ij}^{C}$ 的系数。令

$$\hat{X} = X^{0} + \delta\hat{X}$$
$$L^{a} = L + V_L$$

式中：X^{0} 为 X 的近似向量，即先验位系数；取卫星位系数向量，用 $X^{0} = (\overline{C}_{nm}^{a})_S$ 表示；$\delta\hat{X}$ 为 X 的平差改正向量；V_L 为 L 的平差改正向量，则相应的改正方程为

$$\delta\hat{X} + B_L V_L + W = 0 \tag{12.146}$$

式中：W 为闭合差向量，设 $X_L^{0} = (\overline{C}_{nm}^{a})_{\overline{\Delta g}}$ 为根据（12.138）用 $\overline{\Delta g}$ 计算的"观测"位系数，则

$$W = X^{0} - X_L^{0} \tag{12.147}$$

对式（12.146）按以下最小二乘原理进行解算：

$$V_L^{\mathrm{T}} P_L V_L + \delta\hat{X}^{\mathrm{T}} P_X \delta\hat{X} = \min \tag{12.148}$$

式中：P_L 和 P_X 分别为 L 和 X^{0} 的权矩阵。

根据对 $(\overline{C}_{nm}^{a})_{\overline{\Delta g}}$ 和 $(\overline{C}_{nm}^{a})_S$ 之间的精度比的分析确定，假定 $\overline{\Delta g}$ 的精度在同一纬圈上相同，$(\overline{C}_{nm}^{a})_S$ 的精度由卫星位系数模型提供。根据式（12.146）和式（12.148）组成的法方程并求解，得：

$$\delta\hat{X} = -(M^{-1} + P_X)^{-1} M^{-1} W \tag{12.149}$$

$$V_L = -P_L^{-1}B_L^{\mathrm{T}}M^{-1}(\delta\hat{X} + W) \tag{12.150}$$

$$M = B_L P_L^{-1} B_L^{\mathrm{T}} \tag{12.151}$$

$$m_0^2 = (V_L^{\mathrm{T}} P_L V_L)/f \tag{12.152}$$

$$\sum_{\hat{X}\hat{X}} = m_0^2 (M^{-1} + P_X)^{-1} \tag{12.153}$$

$$\sum_{L^a L^a} = m_0^2 [P_L^{-1} - P_L^{-1} B_L^{\mathrm{T}} (M^{-1} - M^{-1} C_X^{-1} M^{-1}) B_L P_L^{-1}] \tag{12.154}$$

式中：m_0^2 为单位权观测方差；f 为自由度；$\sum_{\hat{X}\hat{X}}$ 和 $\sum_{L^a L^a}$ 分别为 X 和 L 的平差值向量的协方差矩阵。

§12.3　由卫星重力探测数据确定全球重力场模型

12.3.1　卫星重力探测技术的发展

1957 年第一颗人造地球卫星发射成功，拉开了人类进入卫星和航天技术时代的序幕，卫星大地测量首先应运而生。这是因为，要测定和描述卫星运行轨道必须定义和建立一个地心坐标系及其地面框架。最初的步骤是用传统地面大地测量的理论和方法进行近于全球范围的大地测量。20 世纪 60 年代，苏、美两国主要采用光电导线测量结合天文和重力测量方法各自建立了一个初步的框架式大地测量导线网，主要分布于地球赤道两侧陆地和美洲、非洲大陆南北方向，结合它们本国和欧洲高精度大地网，由此确定了一个低精度全球大地水准面和相应的平均地球参考椭球，当时称为“地球模型”，并建立起最初的地心大地坐标系和相应空间直角坐标系，有了大致分布于全球的几十个已知地心坐标的基准站，形成了最初的地心坐标系地面框架，点位精度大致为米级水平。

随后，应用卫星大地测量方法开始了精化地面基准站地心坐标的步骤。随着卫星定轨精度的提高（主要采用 SLR 技术），在定轨过程将地面站坐标设为待解参数，反过来又不断改进地面站的地心坐标，加上利用 VLBI 技术改进地面地心系框架的尺度。20 世纪 70 年代，美国海军建立的多普勒导航卫星系统开始了高精度卫星定位时代，这一系统的应用加速了上述定轨和确定地面站地心坐标之间迭代式精化过程，使定轨精度达到米级，地面站精度达到分米级。这一过程一个重要的“副产品”是得到一系列不断精化的地球重力场模型系列。这是物理大地测量学家利用卫星轨道数据推算求解低阶地球重力场位系数的结果，卫星轨道主要受地球重力场支配。反过来，由轨道数据又可确定地球重力场，由此诞生了卫星重力探测理论和技术，形成了卫星重力学的学科分支。

卫星重力技术（与定轨技术密切相关）的发展大致可分为三个阶段，或三代。

第一代是光学技术（20 世纪 60 年代前期），利用以恒星为背景对卫星的光学摄影，摄影仪通常装在大型天文观测经纬仪（如威特 T_4）上，或专用卫星摄影仪（如史密松天体物理台（SAO）的 Baker-Nunn 摄影仪），测定卫星在天球坐标系中的方向，以已知地心坐标的地面站为基线用方向交会法测定卫星的位置，称为卫星三角测量法。

第二代是多种技术地面跟踪和卫星对地观测技术（20 世纪 60 年代中后期至今），包括 SLR、卫星多普勒测速（Doppler）、DORIS、PRARE 和海洋卫星雷达测高（SRA）等。SLR、Doppler、DORIS 和 PRARE 技术属于距离交会法测定卫星位置；而 SRA 则是直接测定海洋大地

水准面的形状，但必须对测高卫星精密定轨（采用测距交会法）。

第三代（21世纪初出现），可称新一代，则是以星载GPS精密跟踪定轨为主要技术，同时结合第二代定轨技术，还包括在卫星上安装重力梯度仪直接测定地球重力场重力梯度张量。这就是CHAMP、GRACE和GOCE计划，称为卫星跟踪卫星（SST）和卫星重力梯度（SGG）技术。所有定轨技术都要求有精密测时装置，除第一代纯光学方法只要求像天文测量一样接收授台时号确定观测时刻外，第二代和第三代为精密测距和精密确定卫星运行时刻，都需要在卫星上安装石英钟或原子钟，测时精度对测距要求优于1ns，对测轨要求优于1ms。

第一代光学法测定卫星方向的精度为±0.2～±2.0s，卫星高度为1 000～4 000km，定轨误差在几米到几十米量级，推算的重力模型一般低于8阶。如1966年SAO推出的SE1模型为8阶，相应大地水准面的精度为几米到十几米量级，但这一时期的重力模型在建立初期全球地心坐标系中发挥了重要作用。第二代多种技术的联合，经过30多年的发展，定轨精度已从初期的米级提高到后期（20世纪90年代）的亚米级或分米级，用纯卫星数据建立的一系列长波（低于36阶）重力模型相应的大地水准面的精度为分米级到亚分米级。这一代技术有其本身固有的缺陷，主要是因地面站数量有限且分布不均，不能获得全球覆盖的连续观测数据，不同波长（频段）的位系数的“可测性”和精度很大程度上依赖于卫星的不同倾角及其组合，而且观测信号（电磁波）都要通过大气层往返，大气延迟误差难以控制。卫星测高技术观测数据虽能密集覆盖除极地外的全球海洋区域，但受到海面地形不确定性和大气在内的多种物理环境干扰的影响，也难以作进一步改进。上述各种因素的影响表明第二代技术所构造的重力模型其精度已难以突破分米级水平的门槛。

经过近30年酝酿研究试验的新一代卫星重力技术基本上突破了限制第二代技术进一步提高精度的诸多影响因素，例如其中用高轨卫星GPS取代地面站跟踪低轨卫星的GPS接收机（称为HL-SST），跟踪信号基本上不受大气影响，星载GPS接收机可同时接收四颗以上GPS卫星导航信号，可以实时确定厘米级精度卫星位置及每秒毫米级精度的速度；低轨重力卫星均为近极近圆轨道，且轨道设计避开了重复轨道（有别于测高卫星有轨道重复周期），因此可提供近于全球连续覆盖的密集观测数据集；卫星同时还有实测重力场参数（如重力梯度，重力位）的功能，这也是第三代技术的显著特点和优势；卫星高度降到了450～250km，比第二代卫星高度降低了一半以上，使之有能力恢复36～200阶的短波重力场。这些优势来自新一代重力卫星系统含有比第二代卫星重力技术高得多的科技水平，要求有极精密的有效荷载，如星载高动态GPS接收机、星载加速度计和重力梯度仪、星载K波段星间测距仪等。新一代卫星重力技术可提供厘米级精度水平的轨道数据和求解相同或更优精度水平的相应重力场模型，并提供长波每月的时变量，预计5 000km以上长波大地水准面年变化测定精度为0.01～0.001mm/a。

利用卫星轨道数据求解地球重力场参数，其基本理论依据来自经典天体力学中拉格朗日行星运动（摄动）方程，该方程给出了行星轨道根数摄动（变化）与保守摄动力位函数之间的微分（导数）关系，是一组微分方程。理论上，已知摄动位函数可求解轨道摄动；反之，测定了轨道摄动可求解摄动位函数。将这一方程应用于卫星绕地球的运动，就可导出卫星在地球引力场中扰动引力位的摄动作用下的轨道摄动方程。当给定一个扰动位函数，通过对摄动方程的积分可分析轨道在不同的特征周期上的摄动规律和功率谱分布，其表达式不仅是扰动位位系数的函数，也是开普勒轨道根数的函数。摄动方程的严格解数学上十分困难，通常仅研究一阶（线性）摄动，即只顾及二阶位系数的影响。二阶带谐系数J_2比所有位系数高三个量级，足以定性分析轨道摄动的基本规律，特别是与轨道参数本身的关系。摄动方程并不能直接用于求

解位系数,但它提供了从卫星重力技术出发对轨道设计的指导和依据,即不同频段不同类型(带谐、扇谐和田谐)位系数对不同轨道设计的敏感度,这是第二代重力卫星轨道设计的主要依据。由卫星轨道数据求解位系数则是基于卫星运动的动力学方程,即应用将卫星看做是单位质点的牛顿第二定律,它是一个关于卫星位置的二阶常微分方程,表达卫星加速度与作用力函数在惯性空间的关系。解此微分方程,确定6个积分常数,在无摄动力作用,仅受地球中心引力作用时代表6个独立开普勒轨道参数。当加入摄动力,若仅为地球扰动位摄动,则可建立时变轨道参数(或卫星6个状态参数,即位置速度分量)与扰动位系数的关系;当实时测定了卫星运动状态参数,可反解位系数。然而第二代卫星重力技术主要由地面站测定地面站至卫星的实时距离或速度,也是惟一的卫星观测数据,此类观测量是卫星状态向量和位系数的函数,由此可建立观测方程,联合上述卫星运动的动力学方程和观测方程,即将轨道积分解代人观测方程,最后应用最小二乘法求解位系数,还可同时求解站坐标和其他摄动力模型参数;或采用先对卫星动力方程积分定轨,再用定轨结果解算观测方程的两步法。这就是传统的由卫星观测数据求解位系数确定地球重力场模型的所谓"动力法",是第二代卫星重力技术普遍采用的方法。现将近40年来用卫星重力技术或联合地面重力数据建立的地球重力位模型列于表12.3。

表12.3 **主要地球重力位模型序列(至2005年)**

模型	研制者或研制单位	时间	方法①	最高完全阶数	使用数据②
APL1.0	APL	1963	S	4	D
APL3.5	APL	1965	S	8	D
SE Ⅰ	Lundquist, et al, SAO	1966	S	8	S
NWL-5E-6	Anderle, et al, NWL	1966	S	7	D
NWL-8	Anderle, et al, NWL	1967	S	12	D
RAPP67	Rapp	1967	C	14	S,G
SE Ⅱ	Gaposchkin, et al, SAO	1970	C	16	S,G
GEM-1	Lerch, et al, NASA/GSFC	1972	S	12	S
GEM-2	Lerch, et al, NASA/GSFC	1972	C	16	S,G
GEM-3	Lerch, et al, NASA/GSFC	1972	S	12	S
GEM-4	Lerch, et al, NASA/GSFC	1972	C	16	S,G
SE Ⅲ	Gaposchkin, et al, SAO	1973	C	18	S,G
RAPP73	Rapp	1973	C	20	GEM-3,G
GEM-5	Lerch, et al, NASA/GSFC	1974	S	12	S
GEM-6	Lerch, et al, NASA/GSFC	1974	C	16	S,G

① C:利用卫星数据和地面数据的联合解;E:能量守恒方法;G:单独利用重力数据;S:单独利用卫星跟踪数据;T:利用"剪接法"

② A:卫星测高数据;D:多普勒观测;G:重力数据;S:卫星跟踪数据;SST:卫星跟踪卫星数据

续表

模型	研制者或研制单位	时间	方法	最高完全阶数	使用数据
KOCH74	Koch	1974	C	15	S,G
WGS72	Sepplin	1974	C	19	S,G,D
HARMOGRAV	Dimitrijevich	1975	G	36	G
GRIM1	Balmino,et al,DGFI/GRGS	1976	S	10	S
GEM-7	Wagner,et al,NASA/GSFC	1976	S	16	S
GEM-8	Wagner,et al,NASA/GSFC	1976	C	25	S,G
GRIM2	Balmino,et al,DGFI/GRGS	1976	C	23	S,G
GEM-10A	Lerch,et al,NASA/GSFC	1978	C	30	GEM-10,A
GEM-10B	Lerch,et al,NASA/GSFC	1978	C	36	GEM-10,G,A
GEM-10C	Lerch,et al,NASA/GSFC	1978	C	180	GEM-10B,G,A
OSU78	OSU	1978	C	60	S,G
RAPP78	Rapp	1978	C	180	GEM-9,G,A
GEM-9	Lerch,et al,NASA/GSFC	1979	S	20	S
GEM-10	Lerch,et al,NASA/GSFC	1979	C	22	S,G
OSU79	OSU	1979	C	180	S,G
OSU81	OSU	1981	C	180	S,G,A
RAPP81	Rapp	1981	C	180	GEM9,G,A
PGS-S4	NASA/GSFC	1982	C	22	GEM-10,S,G,A
GRIM3	Reigber,et al,DGFI/GRGS	1983	C	36	S,G,D,A
GEM-L2	Lerch,et al,NASA/GSFC	1983	C	20	S,G,A
GRIM3B	Reigber,et al,DGFI/GRGS	1983	C	36	S,G,D,A
HAJELA84	Hajela	1984	G	250	G
GRIM3-L1	Reigber,et al,DGFI/GRGS	1985	C	36	S,G,D,A
GRIM3-L1	Reigber,et al,DGFI/GRGS	1985	C	36	S,G,D,A
GPM-1	Wenzel,et al	1985	C	200	GEM-9,G,A
GPM-2	Wenzel,et al	1985	C	200	GEM-L2,G,A
WGS84	White,et al	1986	C	180	S,G,D,A
OSU86C	Rapp,et al,OSU	1986	C	250	GEM-L2,G,A
OSU86D	Rapp,et al,OSU	1986	C	250	GEM-L2,G,A
OSU86E	Rapp,et al,OSU	1986	C	360	GEM－L2,G,A
OSU86F	Rapp,et al,OSU	1986	C	360	GEM－L2,G,A

续表

模型	研制者或研制单位	时间	方法	最高完全阶数	使用数据
GEM-T1	Marsh, et al, NASA/GSFC	1988	S	36	S
TEG-1S	Tapley, et al, CSR	1988	S	50	A
IFE-88E2	Basic	1989	T, C	360	OSU86F, G
PTGF-4A	Shum	1989	C	50	S, G, A
PTGF-4	Shum	1989	C	50	S, G
WDM89	宁津生等, WTUSM	1989	C	180	S, G, A
GEM-T2S	Marsh, et al, NASA/GSFC	1990	S	50	S
GEM-T2	Marsh, et al, NASA/GSFC	1990	C	50	S, G, A
OSU89A	Rapp, et al, OSU	1990	C	360	GEM-T2, G, A
OSU89B	Rapp, et al, OSU	1990	C	360	GEM-T2, G, A
TEG-1	Tapley, et al, CSR	1991	C	50	S, G
GRIM4-S1	Schwintzer, et al, GFZ	1991	S	50	S
GRIM4-C1	Schwintzer, et al, GFZ	1991	C	50	S, G, A
TEG-2	Tapley, et al, CSR	1991	C	54	S, G, A
TEG-2B	Tapley, et al, CSR	1991	C	50	S, G, A
OSU91A	Rapp, et al, OSU	1991	C	360	GEM-T2, G, A
GEM-T3S	Lerch, et al, NASA/GSFC	1992	S	50	S
GEM-T3	Lerch, et al, NASA/GSFC	1992	C	50	S, G, A
GRIM4-S2	Schwintzer, et al, GFZ	1992	S	50	S
GRIM4-C2	Schwintzer, et al, GFZ	1992	C	50	S, C, A
DGFI92A	Gruber, et al, DGFI/GRGS	1992	C	360	GRIM4-S2, G, A
GRIM4-S3	Schwintzer, et al, GFZ	1993	S	60	S
GRIM4-C3	Schwintzer, et al, GFZ	1993	C	60	S, G, A
OGE12	Gruber, et al, DGFI/GRGS	1993	C	360	GRIM4-C2, G, A
GFZ93A	Gruber, et al, GFZ	1993	C	360	GRIM4-C3, G, A
GFZ93B	Gruber, et al, GFZ	1993	C	360	GRIM4-C3, G, A
WDM94	宁津生等, WTUSM	1994	C	360	S, G, A
JGM-1S	Nerem, et al, NASA/GSFC	1994	S	60	S
JGM-1	Nerem, et al, NASA/GSFC	1994	C	70	S, G, A, D
JGM-2S	Nerem, et al, NASA/GSFC	1994	S	60	S
JGM-2	Nerem, et al, NASA/GSFC	1994	C	70	S, C, A

模型	研制者或研制单位	时间	方法	最高完全阶数	使用数据
JGM-3	Tapley, et al, NASA/GSFC	1996	C	70	S, G, A
DQM94	Motao	1996	T, C	360	OSU91A, G
GFZ95A	Gruber, et al, GFZ	1996	C	360	GRIM4-C4, G, A
DGM-E04	Scharroo	1997	T	70	JGM-3
GRIM4-S4	Schwintzer, et al, GFZ	1997	S	60	S
GRIM4-C4	Schwintzer, et al, GFZ	1997	C	72	S, G, A
TEG-3	Tapley, et al, CSR	1997	C	70	S, G, A
GFZ96	Gruber, et al, GFZ	1997	C	359	PGM055, G, A
GFZ97	Gruber, et al, GFZ	1997	C	359	PGM062w, G, A
EGM96S	Lemoine	1998	S	70	S
EGM96	Lemoine	1998	C	360	EGM96S, G, A
GPM98A, B, C	Wenzel, et al	1999	T, C	1800	EGM96, G, A
GRIM5-S1	Biancale, et al, GFZ	2000	S	120	S
GRIM5-C1	Gruber, et al, GFZ	2000	C	120	S, G, A
TEG-4	Tapley, et al, CSR	2000	C	180	S, G, A
PGM2000A	Pavlis	2000	C	360	S, G, A
WU2002	李建成, WHU	2002	C	720	S, G, A
UCPH2002-02	Howe	2002	S	90	S, SST
EIGEN-1S	Reigber, et al, GFZ	2002	S	100	S, SST
EIGEN-2	Reigber, et al, GFZ	2002	S	120	S, SST
GGM01S	UTCSR, JPL	2003	S	120	S, SST
GGM01C	UTCSR, JPL	2003	C	200	S, SST, TEG4
EIGEN-GRACE01S	GFZ	2003	S	140	S, SST
EIGEN-CHAMP03S	Reigber, et al, GFZ	2004	S	140	S, SST
GGM02S	UTCSR, JPL	2004	S	160	S, SST
GGM02C	UTCSR, JPL	2004	C	200	S, SST, TEG4
EIGEN-GRACE02S	GFZ	2004	S	150	S, SST
EIGEN-CG01C	GFZ	2004	C	360	S, G, A, SST
EIGEN-CG03C	GFZ	2005	C	360	S, G, A, SST

注:时间为模型正式公布时间。

现在迎来了第三代卫星重力数据(目前还只是 CHAMP 和 GRACE 数据)。近十多年来研究利用新一代卫星数据恢复重力场的方法和模型十分活跃,并已推出了若干 CHAMP 重力模型和 GRACE 重力模型,初步显示了新模型优于第二代模型(例如 EGM96)的结果,但初步精

度检验还在分米级或亚分米级水平，主要原因可能是还是试算阶段，采用的数据时段不长，短则10天数据，长则一年数据，还可能由于数据预处理不够完善，还有一些不确定性技术问题待研究解决（见下节）；能提供最优解（估计）的方法和计算模型还有待进一步研究探索。涉及的理论问题除上一节提出的外，还需进一步分析确认，在厘米级精度要求下，哪些非地球引力摄动力影响需要顾及，用什么方法对求解的模型实际精度进行外部检验。随着研究和试验的不断深入，可以预期，在取得了这一代卫星寿命期全部数据（包括GOCE数据）后，最终可以建立可供使用的、分辨率为100km具有厘米级精度的全球重力场模型。在此实践所获经验的基础上，可发现这一代卫星重力技术的不足之处，新的改进方案将会出现，例如设计新的SST模式或卫星重力测量模式，同时提高跟踪测量的精度，设计更高精度和稳定度的加速度计。第四代卫星重力系统可望在不久的将来出现，也许10年或20年后我们的目标将真正接近实现1厘米级精度。

12.3.2 卫星重力探测技术的基本原理

如果已知作用在空间一质量为 m 的质点上的力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}$ 为质点在惯性坐标系中的位置向量，受力质点在力的作用下产生具有加速度 $\ddot{x}$ 的运动，其运动法则遵循牛顿力学第二定律。若给定了运动质点在时刻 $t=t_0$ 的初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\dot{\boldsymbol{x}}_0$，即质点的初始位置坐标和初始速度向量，则可通过求解表达牛顿力学定律的二阶微分方程 $m\ddot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，确定质点在其运动轨迹上任一时刻 t 的运动状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$，即质点的位置和运动速度，并可计算运动质点从时刻 t_0 到时刻 t 走过的路程长度 $s(t)$。这里 $(t_0,\boldsymbol{x}_0,\dot{\boldsymbol{x}}_0,\boldsymbol{x}(t),\dot{\boldsymbol{x}}(t),t)$ 是描述质点运动过程的参数，这些参数完全确定了质点运动的全过程。已知作用力，分析质点受力产生的运动规律，可看成解牛顿力学问题的正演过程，或称正演问题。反之，当我们已知或测定了受力质点在空间运动的上述表征其运动规律的参数，并由此确定（恢复）质点所受到的未知力源 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$，是一个解牛顿力学问题的逆过程，或称为反演问题。用动力法（重力仪）测定地面点的重力和用卫星技术确定（恢复）全球重力场，都是基于这一力学反演概念，对于后者，为了计算上的方便和需要，在求解反演问题的同时，常常需要设定一个先验的全球重力场和其他力模型，通过正演计算确定一个卫星的参考运动模型，即参考轨道，这里同时用到正演和反演计算。

以用动力法测定地面绝对重力值的重力仪为例，它包括摆仪和自由落体重力仪。后者是通过测定一个检测质量（可视为质点）在重力作用下自由下落的运动参数反求重力加速度值 g。质点在重力仪顶部一起始位置从静止状态自由下落至仪器底部一终点，假定质点运动所经历的空间处于真空状态，则质点从起点下落到终点走过的路程长为 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$。其中时间 t 从下落瞬间起算，利用激光干涉装置测量长度系列 $s(t_i)(i=1,2,\cdots,n)$，并由石英钟同步测定 t_i。又假定在下落的垂直距离内 g 近似为一常值，且无其他仪器和物理环境误差，则 g 的测定值可以简单地认为是 $g_i=2s(t_i)/t_i^2(i=1,2,\cdots,n)$ 的平均值。这里已知给定的落体运动参数为 $t_0=0,x_0=0,\dot{x}_0=0$，测定的运动参数为 $x(t_i)=s(t_i)$ 和 t_i，反解得到的力为 $F(x)=mg=$ 常数。

当我们需要测定地球外空间某一点的重力，譬如离地面500km高处的一点，则必须观测在此高度处的卫星在飞行轨道上的运动参数来间接反求重力值。作为原理说明，假设一种最简单的理想情况，设卫星为一单位质点，地球为一质量为 M 的质点，不考虑其自转，其所在空间无其他质量，则地球产生一均匀重力场 $F(x)=g(x)=-GM/|x|^2$（或 $g(r)=-GM/r^2,r=$

$|x|$)，其中 G 为引力常数，则 $g(r)$ 可利用卫星的运动来测定。这时卫星是一个具有单位质量的检测质点，距地球质心的距离为 r，运行轨道为圆或椭圆（由卫星的发射参数而定），设为圆轨道，则卫星必须有一沿轨速度 v 使其维持圆周运动，即其所需向心力 $a_r = v^2/r$ 正好等于地球对卫星的引力 g_r，则 $g_r = v^2/r$。设想在地球上利用多站激光测距（SLR）对卫星进行跟踪测量，可测得卫星的速度 v 和离地心的距离 r，由此可由卫星运动参数 r（位置）和 v（速度）反求重力值 g_r。例如，在 500km 高度上，$v \approx 7.6\text{km/s}$，则 $g_r \approx 840\text{Gal}$；对一般的椭圆轨道情况，根据轨道理论中的活力公式（保守力场的能量守恒律）$V(r) = \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}V^2(r) + \frac{GM}{2a}$，其中 $V(r)$ 为地球的引力位。当椭圆长半径 a 和 GM 为已知（$GM/2a$ 为积分常数）时，测定 r 和 v 可确定轨道上任一点的引力位值，由此 $g(r) = \frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}$ 也随之确定。此简例只是说明利用卫星技术测定地球重力场的最基本的原理，即通过观测卫星在轨道上运行的运动参数，根据牛顿力学方程反演地球重力场参数。

地球的真正形状更接近于椭球而非圆球，其质量（密度）分布也不是均匀的。因此，在分析近地卫星在地球重力场作用下的运动时，取重力场模型 $V(x) = \frac{GM}{|x|}$，或 $g(x) = -\frac{GM}{|x|^2}$，只是地球重力场的零阶近似，即将地球看成总质量为 M 的均质圆球的重力场。均质圆球是一种最简单的正常地球模型，产生一种最简单的正常地球重力场，根据 Kepler 的理论，卫星在这种正常重力场的运动轨道是一个与地球相对位置不变的平面椭圆，即由这种正常重力场（模型）确定的正常轨道。若将地球看成总质量为 M 且形状和大小与全球大地水准面最接近的旋转椭球，旋转角速度等于地球自转角速度，并假设该椭球面是一重力等位面，有与大地水准面相同的重力位值，这就是目前广泛应用的更接近真实地球的一种正常地球模型，即正常地球椭球。例如国际 1980 年大地测量参考系采用的正常椭球模型。由此正常地球模型，根据位理论可精确导出其产生的正常重力场，即正常重力位的球谐级数展开式和正常重力公式，可称为正常椭球重力场模型。由卫星轨道理论可精确计算卫星在此正常重力场的运动轨道，此轨道则与一个简单的平面椭圆有差异，其轨道面与地球的相对位置也会变化（进动）。真实地球重力场与正常重力场的差异为扰动重力场，即扰动位或扰动重力。扰动重力场使卫星的实际运行轨道偏离正常轨道，即产生轨道摄动，表现为卫星的实际运动状态（位置 x 和速度 $\dot{x}$）与卫星的正常运动状态（x_R 和 $\dot{x}_R$）的偏差。因此，利用卫星技术恢复地球重力场的一种最基本的原理，就是由卫星轨道的摄动观测值，反演作用在卫星上的各种摄动力场，其中主要包括待求的地球扰动重力场，这一原理仍在广泛应用。传统的利用 SLR 技术求解位系数就是基于此原理，如上节所述，从 20 世纪 60 年代至今，利用这一原理已发展了多代多系列低阶地球重力场模型（如表 12.3 所列）。利用这些已知的低阶地球重力场模型（已知位系数），作为一种参考模型，可以精确计算卫星的相应轨道，即前述的参考轨道（相当于更接近于卫星真轨道的一种正常轨道），由此可观测卫星的真轨道相对于参考轨道的摄动。据此反演对参考模型位系数的改正，是目前实际采用的方法。

在物理学和力学中，正演问题的解通常是适定的（解存在、惟一且稳定），而反演问题的解大多是不适定的。例如在牛顿力学中，若已知一物体的形状及其密度分布函数，则通过一个积分算子（牛顿算子），可惟一地将密度函数变换为该物体的引力位函数，这是一个正演问题；反之，若已知该物体形状及其外部引力位函数，要反解密度函数，则牛顿算子的逆算子是不适定

的。对这个反演问题,可有无穷多个密度函数解。在物理学和力学中还有许多反演不适定的例子,其原因有的是物理学中一些物理过程本身是一个不可逆过程,但大多数情况是所涉及的物理场(或力场)不可能用有限个参数集合来描述。地球重力场就是如此,利用对卫星轨道的观测确定地球重力场,不管我们作了多大数量的观测,首先仅仅待确定的地球定向参数(极移 x,y 和 UT1 改正)就是观测时刻数的 3 倍,而待求解的位系数理论上又是一个无限集合,因此这一反演问题是一个显著的不适定问题(Reigber,1989)。为使问题适定,必须引入模型的近似处理,例如在有限的时间段把地球定向参数表达为一个简单的时间函数(例如由多条直线段组成的函数)、再将地球位的球谐展开截断至适当的阶次、根据不同的计算目的引入已知先验信息取代某些待定参数等。经过这样的处理,通常都可将此类不适定问题转化为一个可用最小二乘平差技术求解的超定问题(ibid)。有多余观测的最小二乘平差法理论上可求得惟一解,但问题的解仍然可能是欠定的,即观测方程和相应的法方程是病态的,方程的解呈现不稳定,其物理意义可能是多方面的。例如就 SLR 跟踪观测来说,不同倾角的轨道其本身频率(周期)特性不同,有的轨道对扰动重力场某些频谱成分(如带谐项或田谐项)的摄动敏感(甚至产生共振效应),对另一些频谱成分的摄动欠敏感或不敏感,则相应阶次的位系数难以得到准确可靠的解。又如,将卫星重力观测数据向下延拓至地面(边值界面),在 §1.1 节中已提到,由于通常下延算子有放大观测误差的作用,造成解的欠适定(不稳定)。又如,若卫星重力观测值中含某中、高频信息甚微,则对应的中、高阶待求位系数不可能有准确解。在传统的 SLR 跟踪测定轨道摄动求解扰动位系数的模式中,由于地面 SLR 站数量有限和分布不合理,不可能对轨道进行连续的全程跟踪,造成对某些波段的采样不足,缺失信号。以上种种因素均可产生病态法方程,表现为方程的条件数偏高(不佳)。因此,常常需要引入所谓正则化算法来处理病态方程,通常用 Tikhonov 准则,即构造一种关于观测误差和待求参数范数平方和的光滑函数,在取该函数极小值的准则下建立有适定解的正则化法方程。这是一种广义最小二乘法,或等价于一种病态法方程的广义逆解,结果是一种比较合理而适定的近似解。也可以针对某种轨道的频率特性将参数限定于其敏感的频带或频域,如仅限于求解带谐系数、田谐或扇谐系数。另一种较普遍采用的方法是在观测方程中引入位系数的先验信息,如利用 Kaula 准则对相应待定位系数设定先验权约束等(Kaula,1966;Reigber,1989)。

从原理上说,以上所论由卫星观测数据反演求解全球重力场位系数的不适定性是该方法本身固有的问题,只能采用适当的技术措施和方法获得适定的逼近解。前一节已提及新一代卫星重力计划(CHAMP,GRACE 和 GOCE(待发射))包含的新技术是高轨卫星跟踪低轨卫星(HL - SST),低轨卫星跟踪一个同轨卫星(LL - SST),以及卫星重力梯度测量(SGG)。高轨 GPS 卫星跟踪低轨 CHAMP、GRACE 和 GOCE 卫星,在此 GPS 卫星起到了传统地面 SLR 站的作用,实现了对低轨卫星的近连续全程跟踪,且这三颗卫星都是近极近圆轨道(倾角分别为 87°,89°和 96.5°),其轨道(或地面轨迹)形成了一个近全球的密集网状覆盖,这就在很大程度上克服了由地面 SLR 站跟踪卫星轨道的局限性和缺陷。只要有足够长的时段观测数据,通常可形成“良适定”的法方程结构,可获得位系数高精度的稳定解。模型的最高阶次取决于卫星的轨高(如 GRACE 卫星,$l_{max}\approx 120$,GOCE 卫星 $l_{max}\approx 200$,),解的高精度和稳定性得益于新卫星重力技术能提供近全球覆盖(倾角近于 90°)连续分布(采样率 30s,无重复轨道),重测率高(GRACE 每天绕地球约 15.4 圈)的观测数据,即平差系统的多余观测数高,例如 GRACE 120 阶模型。当不考虑轨道积分卫星初始状态未知参数,10 天数据的多余观测为 14 163,其数据点构成了一个近于全球分布的均匀格网,使平差系统有很强的“几何强度”,这在很大程度上

保证了解的精度和稳定性。同时，若平差系统仅包含位系数，则通过对位系数的特殊排序（见4.2.3节）可形成具有对角带结构的法矩阵，不仅可提高求逆的效率，也利于解的稳定性。

12.3.3 地面站对卫星激光测距（SLR）跟踪

在地面上安置一台对卫星的激光测距SLR仪（其中装有固体激光器以及发射和接收光学系统，还有计时装置等），根据对通过测站视野的卫星所预报的轨道根数，准确计算卫星通过的时刻、方位角、高度角和至地面的距离，输入计算机进行自动控制和对卫星的跟踪。激光测距仪通过发射光学系统向卫星发射激光脉冲，同一瞬间脉冲信号同步送至测时装置，作为计时的开门脉冲。卫星上装有特制的激光发射镜，到达卫星的激光被发射回地面站，为光学系统所接收，经放大整形后送至测时装置作为计时的关门脉冲。计时装置中的计数器记录激光脉冲往返于测距仪与卫星间的传播时间，由此可精确计算测距仪在观测时刻至卫星的距离，并获得在观测时段内测距值的时序系列。一些专用于激光测距的卫星称为激光卫星，其本身就是一个表面装有可达数百个角反射镜的球形体，目前在轨运行的激光卫星主要有法国1975年发射的Starlette卫星，美国1976年发射的Lageos卫星和1972年发射的LageosⅡ卫星，日本1986年发射的AJISAT卫星，前苏联1989年发射的Etalon—1和Etalon—2卫星。其他大地测量卫星（如测高卫星、卫星跟踪卫星）也都装有激光反射镜。

若地面SLR站在地心地固坐标系中的位置坐标已知，则利用SLR对卫星一个弧段的跟踪测距获得的时序观测系列，可对卫星进行精密定轨，确定卫星轨道的运动参数，即位置向量x_s和速度向量$\dot{x}_s$，总称为卫星的状态向量。根据上节所述用卫星重力探测技术确定重力场的基本原理，就是根据牛顿第二定律，由卫星的轨道运动参数反演其受力模型参数，其中主要为重力场参数。牛顿第二定律只在惯性坐标系中成立，以地球质心为原点的天球坐标系是一准惯性坐标系，用S_I表示该坐标系，卫星在此坐标系中的位置坐标用$X_S^I=(x_s^I,y_s^I,z_s^I)^{\mathrm{T}}$表示，则用牛顿第二定律表示的卫星轨道运动的动力学方程为

$$\ddot{X}_S^I = \frac{1}{m_s}F_I \tag{12.155}$$

或

$$\ddot{r}_S^I = \frac{1}{m_s}F_I$$

式中：$\ddot{X}_S^I=\dfrac{\mathrm{d}^2X_s^I}{\mathrm{d}t^2}$为卫星在惯性坐标系中的加速度；$r_s^I=X_s^I$称为卫星相对于坐标系原点（地心）的径向矢量；$m_s$为卫星的总质量，以下假定为单位质量，即$m_s=1$；$F_I$表示从惯性坐标系观察作用在卫星上各种力的合力，当$m_s=1$时，在$F_I$的量值即为加速度。$F_I$包括以下力场分量（Reigber，1989）：

$$F_I = a = a_k + a_R + a_B + a_E + a_O + a_D + a_S + a_A \tag{12.156}$$

其中：

a_k：地球中心力加速度；

a_R：扰动重力加速度；

a_B：第三天体（日、月和主要行星）引力加速度；

a_E：地球固体潮加速度；

a_O：海潮加速度；

a_D：大气阻力加速度；

a_S：太阳光压加速度；

a_A：地球反照压加速度。

假定所有力场分量都已模型化，即将各力模型参数化，用 P 表示参数向量，则对应分量为 $P=(P_K,P_R,P_B,P_E,P_O,P_D,P_S,P_A)^{\mathrm{T}}$，这些力模型参数大部分可以认为是已知的，少数已知其先验值，需要通过轨道观测数据反演改进。我们所关心的地球重力场模型，由于地球的离心力位可精确计算，待确定的是地球引力位，用 U 表示，其球谐展开模型为

$$U=\frac{GM}{r}\left[1+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a_E}{r}\right)^n(C_{nm}\cos m\lambda+S_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\sin\varphi)\right] \tag{12.157}$$

其中的符号意义见 12.2 节，但此处位系数 C_{nm} 和 S_{nm} 是未规格化的。$U_0=\frac{GM}{r}$ 是 U 的零阶项，是球对称的引力位，地球引力作用于卫星产生的加速度是卫星最大的加速度分量：

$$a_k+a_R=\nabla U_0+\nabla(U-U_0) \tag{12.158}$$

因此，我们要求解的参数为 $P_R=\{C_{nm},S_{nm}\}$。表 12.4 为作用于卫星的各种力源加速度量级的比较。

表 12.4　**作用于激光卫星和 GPS 卫星各种力源加速度量级（m/s^2）**

加速度类别	卫星类别 a_s(km) A_s/m_s(m^2/kg)	LAGEOS 7337 6.9×10^{-4}	STARLETTE 7869 9.6×10^{-4}	AJISAI 12266 5.3×10^{-3}	GPS 26550 2.0×10^{-4}
$\lvert a_k\rvert$		2.6	7.4	6.4	0.6
C_{20}		2×10^{-3}	8×10^{-3}	6×10^{-3}	5×10^{-5}
$\lvert a_R\rvert$					
其他		5×10^{-6}	1×10^{-4}	9×10^{-5}	3×10^{-7}
$\lvert a_B\rvert$		2×10^{-6}	1×10^{-6}	$(1\sim2)\times10^{-6}$	5×10^{-6}
$\lvert a_E\rvert$		3×10^{-8}	2×10^{-7}	$(1\sim2)\times10^{-7}$	1×10^{-9}
$\lvert a_O\rvert$		2×10^{-9}	3×10^{-8}	2×10^{-8}	1×10^{-10}
$\lvert a_D\rvert$		3×10^{-12}（经验）	$(1\sim2)\times10^{-10}$	$(1\sim2)\times10^{-10}$	0
$\lvert a_S\rvert$		4×10^{-9}	5×10^{-9}	5×10^{-8}	1×10^{-7}
$\lvert a_A\rvert$		7×10^{-11}	5×10^{-10}	8×10^{-9}	1×10^{-9}

参见图 12.8，SLR 的观测值可以是地面站 T 至卫星 S 的距离 l_{TS} 或距离变率 $\dot{l}_{TS}$。是卫星位置坐标向量和速度向量以及地面站位置坐标向量和位移速率的函数 SLR 观测值通常都在地心地固坐标系给出，用 S_T 表示该坐标系，卫星在 S_T 中的位置坐标用 $X_S^{\mathrm{T}}=(x_S^{\mathrm{T}},y_S^{\mathrm{T}},z_S^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$（注意 $()^{\mathrm{T}}$ 中的 T 表示向量转置）表示，地面位置坐标为 $X_T^{\mathrm{T}}=(x_T^{\mathrm{T}},y_T^{\mathrm{T}},z_T^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，则有观测量关于位置坐标或其速率的函数关系为：

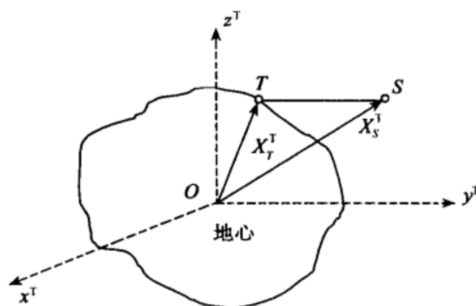


图 12.8　SLR 观测示意图

$$l_{TS} = | X_S^T - X_T^T | \tag{12.159}$$

或

$$l_{TS} = | \dot{X}_S^T - \dot{X}_T^T | \tag{12.160}$$

由式(12.159)和式(12.160)可建立观测方程，即将观测量表示为待求参数的函数，我们这里要求解的参数是力模型参数向量 P 中的部分分量，主要是重力场模型参数（位系数），并假定 X_T^T 是已知的（需要的话也可作为待定参数一并求解）。为此，首先要导出 X_S^T 或 $\dot{X}_S^T$ 关于 P 的函数关系，而这种函数关系通常十分复杂，目前还没有严密的表达式。X_S^T 和 $\dot{X}_S^T$ 是通过对卫星运动方程(12.155)的求解确定，即解这个二阶常微分方程的初值问题，因此要利用卫星动力方程建立 X_S^T 和 $\dot{X}_S^T$ 与 P 的关系，实际需要的是卫星状态向量$(X_S, \dot{X}_S)$关于 P 的偏导数关系。设

$$X_0 = X(t_0), \quad \dot{X}_0 = \dot{X}(t_0) \tag{12.161}$$

为卫星在时刻 t_0 的初始状态（这里暂时略去了下标"S"），显然对任意时刻 t 有

$$\ddot{X}(t) = f(t, X_0, \dot{X}_0, P) \tag{12.162}$$

这里式(12.162)表示方程(12.155)初值问题的解函数。将式(12.162)对 P 取偏导数，得

$$\frac{\partial \ddot{X}(t)}{\partial P} = \frac{\partial f}{\partial X_0}\left(\frac{\partial X}{\partial P}\right) + \frac{\partial f}{\partial \dot{X}_0}\left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial P}\right) + \frac{\partial f}{\partial P} \tag{12.163}$$

假定 P 不随时间变化，或在一个时间段内其变化可忽略不计（例如重力场模型的位系数），又假定 f 是 t 的连续函数，则有

$$\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial X}{\partial P}\right) \tag{12.164}$$

即 X 对时间 t 和对参数 P 的导数可交换次序，令

$$\psi = \frac{\partial X}{\partial P}, A = \frac{\partial f}{\partial X_0}, B = \frac{\partial f}{\partial \dot{X}_0}, C = \frac{\partial f}{\partial P} \tag{12.165}$$

则式(12.163)可写成以下常微分方程形式：

$$\ddot{\psi} = A\psi + B\dot{\psi} + C \tag{12.166}$$

式(12.166)称为变分方程,即关于"变分"$\partial X/\partial P$的二阶常微分方程。注意:这里$A = A(t)$,$B = B(t)$,$C = C(t)$都是时间的函数。当含卫星质量$M_s = 1$时,$\ddot{X}_s = \partial$(见式(12.156)),$A = \frac{\partial f}{\partial X_0} = \frac{\partial \ddot{X}}{\partial X_0} = \frac{\partial a}{\partial X_0}$,$B = \frac{\partial f}{\partial \dot{X}_0} = \frac{\partial a}{\partial \dot{X}_0}$,$C = \frac{\partial f}{\partial P} = \frac{\partial a}{\partial P}$。若已知各力模型加速度分量$a_j = a_j(t, x, \dot{x})$($j = K, R, B, E, O, D, S, A$)的表达式,式(12.166)的系数矩阵$A$、$B$和$C$均可求设(王正涛,2005)。实用中大部分力模型都是给定的,我们这里只考虑∂R,只有在精密定轨时要考虑∂D。

积分式(12.166)的初值条件为:$\psi(t_0) = [E_3, O_{3+n}]$,$\dot{\psi}(t_0) = [O_3, E_3, O_n]$,其中$E_3$为$3\times 3$阶单位阵,$O_3$为$3\times 3$阶零阵,$O_{3+n}$和$O_n$分别为$3\times(3+n)$阶矩阵和$3\times n$阶矩阵。方程(12.166)的解可用适当的数值积分器实现数值解。

SLR的观测方程可按式(12.159)或式(12.160)建立,下面导出其一般形式。用$l(t)$表示观测量,注意到式(12.159)和式(12.160)中的T和S的坐标是S_T中的坐标,我们要根据卫星动力方程(12.155)求解观测方程,必须利用地球定向参考将T和S的坐标均转换到S_I中。地球定向参数用O表示,其转换矩阵包括观测时刻的岁差、章动、地球自转和极移参数,则观测量可一般地表示为

$$l(t,p) = l(X_S^I(t; X_S^I(t_0), P), X_T^I(t; X_T^I, O)) \tag{12.167}$$

在上式中,假定卫星的初始状态向量$X_S^I(t_0)$,测站点坐标X_T^I和地球定向参数O都是已知的,待求解参数为P。若已知P的先验值或近似值P_0,则可将式(12.167)线性化:

$$l(t,p) = l_c(t,P_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial l}{\partial P_i}\Delta P_i \tag{12.168}$$

式中:$l_c(t,P_0)$为计算值,可根据式(12.167)计算,$\Delta P = P - P_0$为参数向量的改正向量,$\Delta P = (\Delta P_1, \Delta P_2, \cdots, \Delta P_n)$,$n$为待定参数的个数。若仅考虑重力扰动位模型参数,则$n$为位系数集合$\{C_{nm}, S_{nm}\}$的个数。式中的偏导数可表示为

$$\frac{\partial l}{\partial P} = \frac{\partial l}{\partial X_S} \cdot \frac{\partial X_S}{\partial P} \tag{12.169}$$

式中:$\frac{\partial l}{\partial X_S}$可直接由式(12.159)、式(12.160)或类似的观测量坐标表达式求得;而$\frac{\partial X_S}{\partial P}$则需要求解变分方程(12.166)确定。

至此,可由观测方程(12.168)得到线性化误差方程,即

$$V = G\cdot\Delta P + L \tag{12.170}$$

其中:V为观测量l的改正数,向量$G = \frac{\partial l}{\partial P}$为系数矩阵(设计矩阵),常数项$L = l_c(t,P_0) - l(t,P)$,这里$l(t,P)$为观测值。$\Delta P$为待求解的参数向量,可按通常的最小二乘法由式(12.170)组成法方程式求解。

以上所述是利用SLR观测值按所谓"动力法"求解重力位模型位系数的基本原理。在实际求解中,组成矩阵G和计算常数项L都相当复杂。用SLR观测值通常只能确定低阶(<36阶)位系数,由于SLR跟踪站在全球分布有限且不均匀,同时不同类型的位系数(如带谐($m = 0$)、田谐($m \neq 0, n \neq m$)和扇谐($n = m$)球函数)对卫星轨道的倾角敏感度不同,因此由式(12.170)组成的法方程通常都是欠适定的。为改善法方程的适定性,保证参数求解的稳定性,常

常需要附加约束条件。目前对较高阶位系数常采用 Kaula 规则约束，Kaula 规则为

$$\sigma_n^2 \approx 5 \cdot 10^{-11}/n^4 \tag{12.171}$$

式中：σ_n^2 为 n 阶位系数的阶方差：

$$\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^{n}(C_{nm}^2 + S_{nm}^2) \tag{12.172}$$

式(12.171)为式(12.172)的一种拟合近似表达式。假定高于某一阶次的位系数具有零均值随机量特性(这一假定对高阶位系数来说符合统计实际)，则由式(12.171)可反求 C_{nm} 和 S_{nm} 的标准差，并在误差方程(12.170)后附加以下约束条件

$$\begin{cases} C_{nm} = 0 \pm 7 \cdot 10^{-6}/n^2 \\ S_{nm} = 0 \pm 7 \cdot 10^{-6}/n^2 \end{cases} \quad n = m, \cdots, N_{\max} \tag{12.173}$$

由 C_{nm} 和 S_{nm} 的标准差($\pm 7 \cdot 10^{-6}/n^2$)可组成其先验权矩阵，下面用最小二乘通用符号表示式(12.170)：

$$V = AX + L \tag{12.174}$$

则带 Kaula 规则约束的联合观测方程的矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} V \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix},\ V' = X \tag{12.175}$$

$$P = \begin{pmatrix} P_l & 0 \\ 0 & P_X \end{pmatrix} \tag{12.176}$$

其中：P 是权矩阵，P_X 为参数 X 的先验权，E 为单位矩阵。由此组成的法方程为：

$$NX = b \tag{12.177}$$

$$N = A^{\mathrm{T}} P_l A + P_X,\quad b = A^{\mathrm{T}} P_l L \tag{12.178}$$

12.3.4 卫星跟踪卫星测量

卫星跟踪卫星(SST)测量有两种模式：一种是高轨卫星跟踪低轨卫星(SST-HL)，另一种是一个低轨卫星跟踪另一个同轨卫星(SST-LL)。

第一种模式中的高轨卫星假定已知其在任意时刻的精密轨道参数，即卫星的状态向量 $X_S = (r_S, \dot{r}_S)^{\mathrm{T}}$，这里 r_S 和 $\dot{r}_S$ 分别是卫星的地心位置向量和速度向量，和前一节中的 x_S 和 $\dot{x}_S$ 意义相同。例如 GPS 卫星跟踪低轨 CHAMP 卫星，此种模式中的 GPS 卫星其作用相当于 SLR 跟踪激光卫星的地面站 T(已知地心坐标)，CHAMP 卫星上装有 GPS 接收机，通过接收 GPS 信号可以测定至 GPS 卫星的距离，并对 CHAMP 卫星精密测轨。

第二种模式是两个在同一低轨上一前一后相隔一定距离的双星跟踪系统，例如两颗相距 220km 的 GRACE 卫星。两颗卫星上都装有 K 波段微波测距仪，用微波测距的方式实现跟踪。用 SST 技术测定重力场的基本原理，都是通过测定低轨卫星相对正常轨道(Kepler 轨道)的摄动反演重力场参数(位系数)。对 SST-HL 模式，是通过对低轨卫星的 GPS 精密定轨测定轨道摄动；对 SST-LL 模式，由于低轨卫星上也安装了 GPS 接收机，每颗卫星都构成了一个 SST-HL 模式，而 K 波段测距跟踪则可测定两颗卫星之间轨道摄动之差，表现为两星间的实测距离或距离变率相对于各自在正常轨道下相应正常值的差。利用 SST 观测数据反演求解重力场参数，也可用上述所述的动力法，观测方程和变分方程的建立原理和解算过程完全类似，只是表达形式有差别。

用动力法求解重力场参数的过程，相对说来比较复杂，为此近年来针对 CHAMP 和

GRACE 任务提出基于能量守恒法来求解重力场参数,该法具有简明直观的优点,计算过程也比动力法简单,本节将简要介绍能量守恒法,略去基于分析力学原理的严格推证。

将理论力学中的机械能守恒原理应用于卫星的轨道运动,首先对 SST-HL 模式导出卫星运动的能量守恒方程。假定低轨卫星在时刻 $t = t_0$ 的总能量 E_0 已知,且在其运动过程中始终只受地球引力作用维持其轨道运动,则卫星在任意时刻 t 的总能量保持不变。卫星的总能量包含两个部分,即卫星在轨的势能和动能。前者由卫星在轨道上的位置 X_S 确定,将卫星质量视为单位质量时,根据力学中关于势能和位函数的概念,此时卫星的势能就是地球引力位函数 $V(X)$ 在空间点 X_S 的负值,即 $-V(X_S)$。卫星的动能只由卫星的速度 $\dot{X}$ 决定,用 $K = K(\dot{X})$ 表示。在此情况下有

$$E_0 = K(\dot{X}_S) - V(X_S) \tag{12.179}$$

由于

$$K(\dot{X}_S) = \frac{1}{2}\dot{r}_S\dot{r}_S \tag{12.180}$$

故 $V(X_S)$ 可用球谐函数的级数表达,其位系数 C_{nm}、S_{nm} 是待求的。以下略去表达卫星的下标"S",则式(12.179)可表示为

$$E_0 = \frac{1}{2}r \cdot r - V \tag{12.181}$$

实际上,卫星除了受地球引力作用外还受到各种非保守力(如大气阻力,太阳光压等)和太阳、月球及行星的引潮力作用,使卫星损失能量,转化为其他形式的能量耗散于空间。用 ΔC 表示各种非保守力作用产生的能量损失,用 V_t 表示各种引潮力位之和,并略去其微小的时变效应。考虑地球的自转效应,并在地心惯性坐标系 S_I 中建立卫星的能量守恒方程,当我们在 S_I 中观察自转的地球时,地球将"带动"其引力场在 S_I 中旋转,则位函数 $V(X_S)$ 还是时间的函数,其影响表现为旋转效应,类似于在地固坐标系 S_I 中的离心力位,用 V_ω 表示,略去推证,其表达式为:

$$V_\omega = \boldsymbol{\omega} \cdot (\dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{r}_i) = \overline{\omega}(r_{ix} \cdot \dot{r}_{iy} - r_{iy} \cdot \dot{r}_{ix}) \tag{12.182}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为地球自转向量 $\boldsymbol{\omega} = (0,0,\overline{\omega})$,$\overline{\omega}$ 为地球自转角速度,$\boldsymbol{r}_i = (r_{ix}, r_{iy}, r_{iz})$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_i = (\dot{r}_{ix}, \dot{r}_{iy}, \dot{r}_{iz})$ 分别为卫星在 S_I 中的位置向量和速度向量。由此,式(12.180)应扩充并改写为以下观测方程的形式:

$$\frac{1}{2}(\dot{r}_{ix}^2, \dot{r}_{iy}^2, \dot{r}_{iz}^2) - \overline{\omega}(r_{ix} \cdot \dot{r}_{iy} - r_{iy} \cdot \dot{r}_{ix}) - V_t - \Delta C = V + E_0 \tag{12.183}$$

式中:r_i 和 $\dot{r}_i$ 可由 GPS 精密测轨得到,$\overline{\omega}$ 已知。ΔC 可由各种非保守力加速度的模型值或星载加速度计的观测值 $\boldsymbol{a}_C$ 由以下积分确定

$$\Delta C = \int_{X_0}^{X} \boldsymbol{a}_C \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}_C \times \dot{\boldsymbol{r}}_i \mathrm{d}t \tag{12.184}$$

潮汐项 V_t 是以下各类潮汐位之和:

$$V_t = V_{lunar} + V_{sun} + V_P + V_S + V_o + V_a + V_{ol} + V_{al} \tag{12.185}$$

其中:V_{lunar}——月球引潮力位;V_{sun}——太阳引潮位;V_P——行星引潮位;V_S——固体潮位;V_o——海洋潮汐位;V_a——大气潮汐位;V_{ol}——海洋负荷潮汐位;V_{al}——大气潮汐负荷位。V_t

中的所有各项都有精确模型用于计算。V 可分解为扰动位 T 和正常位 U_0 之和，即 $V=U_0+T$，且有

$$T(r,\varphi,\lambda)=\frac{\mu}{R}\sum_{n=2}^{N_{\max}}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}(\Delta\bar{C}_{nm}\cos m\lambda+\Delta\bar{S}_{nm}\sin m\lambda)\cdot\bar{P}_{nm}(\sin\varphi) \tag{12.186}$$

式中：μ 为地心引力常数；R 为地球平均半径；$\Delta\bar{C}$，$\Delta\bar{S}$ 为相对于正常重力位的扰动位完全规格化的球谐系数，是待求参数；$\bar{P}_{nm}(\sin\varphi)$ 为完全规格化的缔合球函数；(r,φ,λ) 为球坐标。则观测方程(12.183)可写为如下形式：

$$l(t,)=T(r,\varphi,\lambda)+E_0 \tag{12.187}$$

式中：

$$l(t,)=\frac{1}{2}(\dot{r}_{ix}^2,\dot{r}_{iy}^2,\dot{r}_{iz}^2)-\bar{\omega}(r_{ix}\cdot\dot{r}_{iy}-r_{iy}\cdot\dot{r}_{ix})-V_t-\Delta C-U_0 \tag{12.188}$$

E_0 可作为待求参数，但一般可通过计算确定。方法是：将扰动位 T 视为期望值为零的随机量，将从时刻 t_0 到时刻 t 中所有观测值 l 的采样取平均得到。则观测方程可写为如下形式：

$$\delta l(t)=T(r,\varphi,\lambda) \tag{12.189}$$

式中：

$$\delta l(t)=l(t)-E_0 \tag{12.190}$$

观测方程(12.189)可按最小二乘法求解，此处从略。

对于 SST-LL 模式，参见图 12.8，观测量为星间 K 波段测距的距离变率 ρ_{AB}。由 $\rho_{AB}=\boldsymbol{e}_{AB}\cdot\boldsymbol{r}_{AB}$，对时间取导数得

$$\dot{\rho}_{AB}=\boldsymbol{e}_{AB}\cdot\boldsymbol{r}_{AB} \tag{12.191}$$

式中：$\boldsymbol{e}_{AB}$是由卫星 B 指向卫星 A 的单位向量，$\boldsymbol{r}_{AB}=\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B$，注意 $\boldsymbol{e}_{AB}\cdot\boldsymbol{e}_{AB}=0$，上式表明 ρ_{AB}是两颗卫星的速度向量差在其相对视线方向上的投影，由图 12.9 中几何关系的角度符号，式(12.191)可写成

$$\dot{\rho}_{AB}=|\dot{\boldsymbol{e}}_{AB}||\dot{\boldsymbol{r}}_{AB}|\cos\gamma=|\dot{\boldsymbol{r}}_{AB}|\cos\gamma \tag{12.192}$$

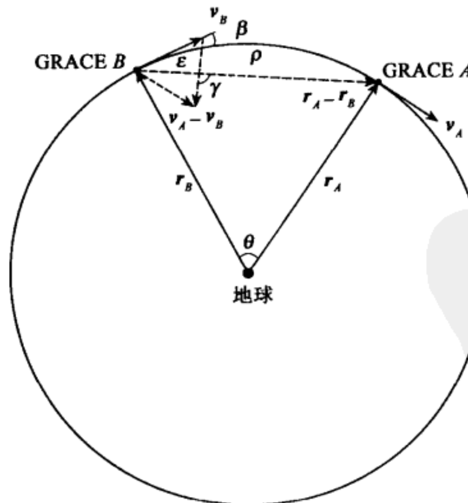


图 12.9 低－低卫星(GRACE)跟踪示意图

现在根据能量守恒原理，由观测值 $\dot{\rho}_{AB}$建立关于两个卫星能量差的观测方程，此时对每颗卫星来说，式(12.183)仍然成立，其中卫星 A 和卫星 B 的动能分别为 $K(\dot{r}_A)=\frac{1}{2}\dot{r}_A\cdot\dot{r}_A$ 和 $K(\dot{r}_B)=\frac{1}{2}\dot{r}_B\cdot\dot{r}_B$，则两星的动能差为

$$\begin{aligned}K(\dot{r}_A)-K(\dot{r}_B)&=\frac{1}{2}(|\dot{r}_A|^2-|\dot{r}_B|^2)\\&=\frac{1}{2}(\dot{r}_A-\dot{r}_B)\cdot(\dot{r}_A+\dot{r}_B)\\&=\frac{1}{2}(\dot{r}_A-\dot{r}_B)(\dot{r}_A-\dot{r}_B+2\dot{r}_B)\\&=\dot{r}_B\cdot\dot{r}_{AB}+\frac{1}{2}|\dot{r}_{AB}|^2\end{aligned}\tag{12.193}$$

式中：$\dot{r}_{AB}=\dot{r}_A-\dot{r}_B$，将上式用观测量 $\dot{\rho}_{AB}$表示，由式(12.192)得

$$|\dot{r}_{AB}|=\dot{\rho}_{AB}/\cos\gamma\tag{12.194}$$

同时

$$\dot{r}_B\cdot\dot{r}_{AB}=|\dot{r}_B|\cdot|\dot{r}_{AB}|\cdot\cos\beta=|\dot{r}_B|\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cdot\dot{\rho}_{AB}\tag{12.195}$$

角 β 的意义见图 12.9，则式(12.193)可写为

$$K(\dot{r}_A)-K(\dot{r}_B)=|\dot{r}_B|\cdot\frac{\dot{\rho}_{AB}}{\cos\gamma}\cos\beta+\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\rho}_{AB}}{\cos\gamma}\right)^2\tag{12.196}$$

其中：

$$\begin{aligned}\cos\gamma&=\frac{(r_{AB})_x(\dot{r}_{AB})_x+(r_{AB})_y(\dot{r}_{AB})_y+(r_{AB})_z(\dot{r}_{AB})_z}{|r_{AB}|\cdot|\dot{r}_{AB}|}\\\cos\beta&=\frac{(\dot{r}_B)_x(\dot{r}_{AB})_x+(\dot{r}_B)_y(\dot{r}_{AB})_y+(\dot{r}_B)_z(\dot{r}_{AB})_z}{|\dot{r}_B|\cdot|\dot{r}_{AB}|}\end{aligned}\tag{12.197}$$

则可直接将式(12.183)改写为两星能量差观测方程，其形式为

$$\begin{aligned}|\dot{r}_B|\cdot\frac{\dot{\rho}_{AB}}{\cos\gamma}\cos\beta+\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\rho}_{AB}}{\cos\gamma}\right)^2-\bar{\omega}\left[(r_{ix}\cdot\dot{r}_{iy}-r_{iy}\cdot\dot{r}_{ix})\Big|_A-(r_{ix}\cdot\dot{r}_{iy}-r_{iy}\cdot\dot{r}_{ix})\Big|_B\right]\\-\Delta V_t-\Delta C_{AB}-U_{0AB}=T_{AB}+E_{0AB}\end{aligned}\tag{12.198}$$

式中：$T_{AB}=T_A-T_B$；$E_{0AB}=E_{0A}-E_{0B}$；$\Delta V_t=\Delta V_A-\Delta V_B$；$\Delta C_{AB}=\Delta C_A-\Delta C_B$。由式(12.186)，有

$$\begin{aligned}T_{AB}&=\frac{\mu}{R}\sum_{l=2}^{l_{\max}}\sum_{m=0}^{l}\left\{\begin{aligned}&\left[\left(\frac{R}{r_A}\right)^{l+1}\bar{P}_{lm}(\cos\theta_A)\cos m\lambda_A-\left(\frac{R}{r_B}\right)^{l+1}\bar{P}_{lm}(\cos\theta_B)\cos m\lambda_B\right]\Delta\bar{C}_{lm}+\\&\left[\left(\frac{R}{r_A}\right)^{l+1}\bar{P}_{lm}(\cos\theta_A)\sin m\lambda_A-\left(\frac{R}{r_B}\right)^{l+1}\bar{P}_{lm}(\cos\theta_B)\sin m\lambda_B\right]\Delta\bar{S}_{lm}\end{aligned}\right\}\\&=\frac{\mu}{R}\sum_{l=2}^{l_{\max}}\sum_{m=0}^{l}\left\{[X_A^C-X_B^C]\Delta\bar{C}_{lm}+[X_A^S-X_B^S]\Delta\bar{S}_{lm}\right\}\end{aligned}\tag{12.199}$$

由式(12.184)，有

$$\Delta C=\int_{X_0}^{X}(a_{CA}-a_{CB})\mathrm{d}x=\int_{t_0}^{t}(a_{CA}\times\dot{r}_A-a_{CB}\times\dot{r}_B)\mathrm{d}t\tag{12.200}$$

由式(12.185),有

$$\Delta V_t = \Delta V_{lunar} + \Delta V_{sun} + \Delta V_p + \Delta V_S + \Delta V_O + \Delta V_a + \Delta V_{ol} + \Delta V_{al} \tag{12.201}$$

类似于式(12.187)和式(12.188),可将式(12.198)写成通常的观测方程形式:

$$l_{AB}(t) = T_{AB} + E_{0AB} \tag{12.202}$$

$$l_{AB}(t) = |\dot{r}_B| \cdot \frac{\dot{\rho}}{\cos\gamma} \cdot \cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\rho}}{\cos\gamma}\right)^2 - \overline{\omega}[(r_{i_x}\dot{r}_{i_y} - r_{i_y}\dot{r}_{i_x})|_A - (r_{i_x}\dot{r}_{i_y} - r_{i_y}\dot{r}_{i_x})|_B] - \Delta V_t - \Delta C_{AB} - U_{0AB} \tag{12.203}$$

式(12.47)同样可按普通最小二乘法求解,由于卫星高度(约450km)比激光距离变率 $\dot{\rho}$ 含有较高阶频谱信息,由观测方程(12.202)组成的法方程通常具有良好的适定性,即使观测值时间跨度较短(例如1~2个月)也能得到重力场参数的稳定解,重力场模型可恢复到 $n=120$ 阶,而不需要加 Kaula 规则的约束。

12.3.5 卫星重力梯度测量

重力向量是重力位场(标量场)的梯度,重力向量构成向量场,就是重力位场的梯度场。重力向量在非均匀重力空间是变化的,是空间分布的变向量,包括方向和大小(模长)的变化。数学上变向量也和标量变量一样有类似的微分或求导的定义和规划。设重力位函数为 $W=W(X)$,$(X=(x,y,z)^{\mathrm{T}})$,则重力向量 $\boldsymbol{g}_{(x)} = W_x(x) = (W_x(X), W_y(X), W_z(X))^{\mathrm{T}}$。其中 $W_x = \frac{\partial W}{\partial x}$,$W_y = \frac{\partial W}{\partial y}$,$W_z = \frac{\partial W}{\partial z}$,都是点位坐标 X 的函数,以下略去对自变量 X 的标记,则重力梯度为 $\boldsymbol{g}_x = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}}{\mathrm{d}X} = \nabla \boldsymbol{g}$;根据向量($\boldsymbol{g}$)对自变量向量 X 的求导法则,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}X^2} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{bmatrix} \tag{12.204}$$

重力梯度构成二阶协变对称张量(申文斌,2005),每一分量是位函数 W 对坐标的二阶偏导数,$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}X^2} = \{W_{ij}\}(i,j=x,y,z)$,$W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial_i \partial_j}$。有时重力梯度又用 grad $\boldsymbol{g} = \nabla \boldsymbol{g}$ 表示。

现在来解释重力梯度张量的几何意义和物理意义。假定在一个空间点 O 建立了一个以此点为坐标原点的局部坐标 $O\text{-}xyz$,例如由地心直角坐标系 $O\text{-}XYZ$ 平移到此点的坐标系,这个点上的重力向量 $\boldsymbol{g}$ 在三个坐标轴上的分量为 W_x,W_y 和 W_z。将坐标系 $O\text{-}xyz$ 沿 x 坐标轴方向移动 Δx 到一邻近点 $O'(x+\Delta x, y, z)$,该点的重力向量 $\boldsymbol{g}'$ 在 x 轴上的分量为 $\boldsymbol{g}_x$,则 $(\boldsymbol{g}'_x - \boldsymbol{g}_x)/\Delta x$ 是点 O 一个邻域重力梯度在 x 轴方向的近似值。当 $\Delta x \to 0$,取极限得

$$W_{xx} = \partial^2 W / \partial x^2 = \lim_{\Delta x \to 0} \{[W_x(x+\Delta x, y, z) - W_x(x,y,z)]/\Delta x\}$$

再将 $O\text{-}xyz$ 沿 y 轴方向移动 Δy 到另一邻点 $O''(x, y+\Delta y, z)$,O'' 点的重力向量 $\boldsymbol{g}''$ 在 x 轴上的分量为 $\boldsymbol{g}''_x$,则 $(\boldsymbol{g}''_x - \boldsymbol{g}_x)/\Delta y$ 是点 O 一个邻域中 $\boldsymbol{g}_x$ 在 y 轴方向上变化率的平均值,当 $\Delta y \to 0$ 时,取极限得

$$W_{xy} = \partial^2 W / \partial x \partial y = \lim_{\Delta y \to 0} \{[W_x(x, y+\Delta y, z) - W_x(x,y,z)]/\Delta y\}$$

最后将 $O\text{-}xyz$ 沿 z 轴方向移动 Δz 到邻点 $O'''(x,y,z+\Delta z)$,O''' 点的重力向量 $\boldsymbol{g}'''$ 在 x 轴上的分量为 $\boldsymbol{g}'''_x$,类似地 $(\boldsymbol{g}'''_x - \boldsymbol{g}_x)/\Delta z$ 是点 O 邻域中 $\boldsymbol{g}_x$ 在 z 轴方向上变化率的平均值,当 $\Delta z \to 0$,取极

限得

$$W_{xz}=\partial^2 W/\partial x\partial z=\lim_{\Delta z\to 0}\{[W_x(x,y,z+\Delta z)-W_x(x,y,z)]/\Delta z\}$$

对 W_{yx}、W_{yy}、W_{yz}和 W_{zx}、W_{zy}、W_{zz}可作完全类似的解释。重力梯度就是一点的重力向量沿不同方向的变化率,这是其物理意义。在几何意义上,重力梯度表征重力空间的“弯曲”,可用于表示水准面的曲率。以最简单的情况为例,在一个点质量 m 产生的引力场 $V=V(r)$ 中(见图 12.10),显然引力等位面由方程 $V(r)$ = 常数决定,它是以质点 m 为球心的球面,其上任一点的引力向量 $\boldsymbol{g}$ 指向球心,引力的大小 $g=|\boldsymbol{g}|$ 不变,但两相邻点 P 与 P'的引力的方向不同,设差值为 $\Delta\theta$,两点间距为 Δs,因此这两点间仍存在引力梯度,如图 12.10 所示,其平均值为

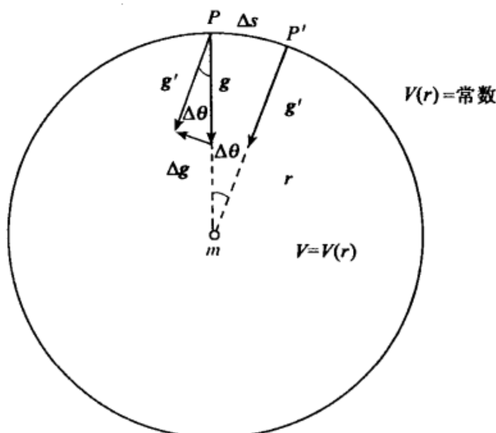


图 12.10 重力梯度与等位面曲率

$$|\Delta \boldsymbol{g}/\Delta s|=(V'_s-V_s)/\Delta s=(g\Delta\theta)/\Delta s$$

当 $\Delta s\to 0$ 时,取极限得引力梯度 $V_{ss}=g\lim\limits_{\Delta s\to 0}\Delta\theta/\Delta s$。根据曲线曲率的定义,此时等位面的曲率 $k=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\Delta\theta/\Delta s=1/r$,即球面 $V(r)$ = 常数的曲率,因此有 $k=V_{ss}/g$。对地球重力场,重力等位面则是一个包围地球的比较复杂的封闭曲面,例如大地水准面,其上一点 P 沿不同方向的曲率不同。可以证明该点平均曲率为(Heiskanen, Moritz, 1967):

$$J=-\frac{1}{2g}(W_{xx}+W_{yy}) \tag{12.205}$$

式中:g 为重力值,坐标 x,y 为 P 点等位面切平面上的局部直角坐标,z 轴和重力方向重合,W_{xx} 和 W_{yy} 为水平重力梯度。根据广义 Poisson 方程 $\Delta W=W_{xx}+W_{yy}+W_{zz}=-4\pi G\rho+2\omega^2$($G$ 为引力常数,ρ 为地球密度,ω 为地球自转速度),容易得到垂向重力梯度$\partial g/\partial z=\partial g/\partial h$ 为:

$$\frac{\partial g}{\partial h}=-2gJ+4\pi G\rho-2\omega^2 \tag{12.206}$$

上式给出了等位面曲率与垂向重力梯度的关系。注意:在地球外部空间常假定 $\rho=0$。此外,我们还可以导出铅垂线的曲率 $k=\sqrt{W_{xx}^2+W_{yy}^2}/g$。曲率是曲线和曲面的内蕴几何不变量,表征局部几何结构,因此从物理意义上说,重力梯度表征重力场的局部微分结构,研究这种关系称为重力场的微分几何学或内蕴几何。

重力梯度张量矩阵(见式12.204)应满足上述Poisson方程,在$\rho(r)=0$的情况下,应满足

$$W_{xx}+W_{yy}+W_{zz}=2\omega^2 \tag{12.207}$$

对引力位则应满足Laplace方程$\Delta V=0$。重力场是一种无旋场,即旋度$\mathrm{rot}\boldsymbol{g}=0$(旋度概念可参阅有关场论的文献),无旋场的充要条件是

$$W_{xy}=W_{yx},W_{xz}=W_{zx},W_{yz}=W_{zy} \tag{12.208}$$

因此重力梯度张量9个分量之间存在4个关系式,独立分量只有5个。

重力梯度对地球表层局部物质分布异常非常敏感,是地球物理探测特别注意获取的重力场信息。从重力位场频谱结构看,重力梯度反映重力场中短波频谱,因此物理大地测量学家特别看重利用重力梯度数据恢复重力位场的中短波分量。了解重力梯度大致的量级,可计算正常重力场模型的正常重力梯度。在正常椭球表面,正常位U的二阶梯度为$U_{xx}\approx U_{yy}=-1540\times10^{-9}\mathrm{s}^{-2}=-1.5\mu\mathrm{Gal/cm}$;$U_{yy}-U_{xx}=10.4\times10^{-9}\mathrm{s}^{-2}\cdot\cos^2\varphi$,在赤道上此值为$0.01\mu\mathrm{Gal/cm}$;$U_{zz}=3086\times10^{-9}\mathrm{s}^{-2}=3.1\mu\mathrm{Gal/cm}$;$U_{zx}=8.1\times10^{-9}\mathrm{s}^{-2}\cdot\sin2\varphi$。当$\varphi=45°$时,此值为$0.008\mu\mathrm{Gal/cm}$;$U_{xy}=U_{zy}=0$。在地形变化大的地区实测重力梯度分量可大大偏离正常值。

1880年匈牙利物理学家Roland Von Eötvös将Cavendish测定G值的扭秤设计思想发展为重力梯度测量,于1890年第一个研制成功一台固定式扭秤重力梯度仪,从此重力梯度单位符号和名称用E(Eötvös译音"厄特弗斯"),$1\mathrm{E}$(或EU)$=10^{-9}\mathrm{s}^{-2}$,相当于重力变化$10^{-9}\left(\frac{m}{\mathrm{s}^2}\right)/\mathrm{m}=0.1\mu\mathrm{Gal/m}=10^{-3}\mu\mathrm{Gal/cm}$。这种仪器在20世纪前期曾广泛用于重力测量。由于其构造较笨重又难于维护,且所需观测时间长,对局部地形效应响应强烈,不适于作大规模地面重力测量,最终为20世纪中期出现的轻便精密的相对重力仪所取代。到20世纪后半期,大地测量学家重新注意到重力梯度测量的优越性,开始研究在山区和海洋作航空重力梯度测量,研制航空重力仪,目前已有多种航空重力仪产品,在发达国家已比较普遍采用这种高效率重力测量技术。随着人造卫星的出现,提出了卫星重力梯度测量概念,认为是恢复地球重力场中短波最有希望的技术,30多年来进行了广泛的研究,设计研制了多种类型的卫星重力梯度仪,包括旋转式重力梯度仪、超导重力梯度仪和加速度差分重力梯度仪,先后用于月球和行星探测、辅助惯性导航和惯性测量。20世纪70年代末和80年代初,美国宇航局(NASA)和欧洲空间局(ESA)先后提出了卫星重力梯度测量计划,即超导重力梯度测量任务(SGGM)和Aristoteles任务,后经多种方案和筛选,到90年代中期NASA决定放弃SGGM计划,重点发展GRACE计划(重力恢复和气候实验),ESA决定实施GOCE计划(重力和海洋环流探测),GRACE卫星已于2002年发射,其重力探测模式已在上节作了介绍。GOCE卫星计划于2006年发射,将是第一个重力梯度测量卫星,采用加速度差分重力梯度仪。下面介绍其工作原理和观测方程的建立。

GOCE卫星重力梯度仪由三对互相正交且对称于卫星质心排列的静电悬浮式加速度计组成,这种加速度计主要由一个在静电作用下悬浮于一个密封容器中的试验质点及反馈电路装置组成。这个实验质点因此被隔离屏蔽于卫星体内,与卫星体无联结或接触,只受保守力(地球、月球、太阳和其他行星对卫星的引力)作用,不受非保守力(作用于卫星体的大气阻力、太阳光压等)的作用。为说明差分加速重力梯度仪的原理,首先描述试验质点随卫星在惯性空间的运动。为此定义两个坐标系,一个是惯性坐标系$O'-X'Y'Z'$,用S_I表示,另一个是固定在加速度计上的局部坐标系$O\text{-}xyz$,用S_A表示,此坐标系随卫星一道在惯性空间作自由落体运动,S_A相对于S_I存在加速度(包括平移和旋转加速度),不是惯性坐标系,(如图12.11),M是试验质点,ω是S_A的旋转向量,其平移速度和加速度分别用v_0和a_0表示,现假定已知M在S_A

中的位置矢量为 $r=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$,相对于 S_A 运动的速度和加速度分别为 $\dot{r}$ 和 $\ddot{r}$,现在要求 M 相对于 S_I 的速度和加速度 $\dot{r}$ 和 $\ddot{r}$ 即 M 的惯性速度和惯性加速度,又称绝对速度和绝对加速度。

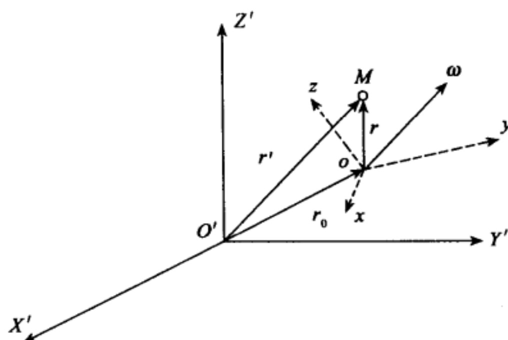


图 12.11 惯性坐标系与非惯性坐标系

根据理论力学中关于质点作相对运动的 Coriolis 定理,有(肖士珣,1979):

$$\ddot{\boldsymbol{r}}' = [\boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})] + \ddot{\boldsymbol{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} \tag{12.209}$$

上式中等号右边第一项(即中括号项)是 M 的"牵连"加速度,其中 a_0 是"牵连"平动加速度;即 S_A 的原点 O 的加速度;$\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}$ 为 M 的"牵连"切向加速度,或称 Euler 加速度;$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 是 M 的"牵连"法向加速度;第二项是 M 相对于 S_A 的加速度,即相对加速度;第三项是科氏(Coriolis)加速度。注意式中的运算符"×"为向量的叉积(向量积),$\omega=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)^{\mathrm{T}}$ 为旋转向量,$\omega_i(i=x,y,z)$ 为 ω 在第 i 个坐标轴方向的分量。若引入以下反对称矩阵 Ω

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{12.210}$$

则式(12.209)可表示为

$$\ddot{r}' = a_I = [a_0 + \dot{\Omega} r + \Omega^2 r] + a_A + 2\Omega v_A \tag{12.211}$$

式中:a_I 为试验质点 M 在 S_I 中的加速度,即惯性加速度;a_A 为 M 在 S_A 中的加速度,即相对加速度;v_A 为 M 在 S_A 中的速度,即相对速度。式(12.211)也可以利用仪器平台坐标系 S_A 与惯性坐标系 S_I 之间的变换关系得到(陆仲连,吴晓平,1994)。设 S_I 的坐标轴基向量为 e_I,质点 M 的坐标向量这里用 $X_I(=r')$ 表示;S_A 的坐标轴基向量为 e_A,坐标向量用 $X_A(=r)$ 表示。假定 S_A 以角速度 $\omega(t)$ 相对于 S_I 旋转,$\omega=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)^{\mathrm{T}}$ 是旋转向量(见图 12.11)。设 R_{AI} 为由 S_I 变换至 S_A 的正交变换矩阵,即 $e_A=R_{AI}e_I$,则有

$$X_I = R_{IA} X_A \tag{12.212}$$

分别对式(12.211)取时间 t 的一次、二次导数,则

$$\left.\begin{aligned} \dot{X}_I &= R_{IA}\dot{X}_A + \dot{R}_{IA}X_A \\ \ddot{X}_I &= R_{IA}\ddot{X}_A + 2\dot{R}_{IA}\dot{X}_A + \ddot{R}_{IA}X_A \end{aligned}\right\} \tag{12.213}$$

R_{IA}是 R_{AI}的逆变换矩阵，即有 $R_{AI}R_{IA}=E$（恒等变换矩阵），则有关系

$$R_{AI}\dot{R}_{IA}+\dot{R}_{AI}R_{IA}=0 \tag{12.214}$$

由正交变换特性有

$$\Omega=R_{AI}\dot{R}_{IA}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix} \tag{12.215}$$

则有

$$\dot{\Omega}=R_{AI}\ddot{R}_{IA}+\dot{R}_{AI}\dot{R}_{IA} \tag{12.216}$$

由式（12.214），并顾及 $R_{AI}R_{IA}=E$，有

$$\dot{R}_{AI}=-R_{AI}\dot{R}_{IA}R_{AI} \tag{12.217}$$

将式（12.217）代入式（12.216），得

$$\dot{\Omega}=R_{AI}\ddot{R}_{IA}-(R_{AI}\dot{R}_{IA})(R_{AI}\dot{R}_{IA})=R_{AI}\ddot{R}_{IA}-\Omega\Omega \tag{12.218}$$

$$R_{AI}\ddot{R}_{IA}=\dot{\Omega}+\Omega\Omega \tag{12.219}$$

用 R_{AI}左乘式（12.213）第二式，顾及以上各式的关系，并加上 S_A 的原点加速度 a_0，最后可得

$$R_{AI}\ddot{X}_I=\ddot{X}_A+2\Omega\dot{X}_A+\dot{\Omega}X_A+\Omega^2X_A+a_0 \tag{12.220}$$

由牛顿第二定律

$$m\ddot{X}_I=F \tag{12.221}$$

同样有，$mR_{AI}\ddot{X}_I=F$，即质点的作用力与坐标系无关，因此式（12.220）和式（12.211）是一致的。力 F 为作用于质点的保守力（引力）与非保守力的合力，用加速度 $a_I=\ddot{X}_I=\frac{1}{m}F$ 表示，有

$$a_I=\frac{\partial V}{\partial X}+(f^1+f^2+\cdots) \tag{12.222}$$

其中：V 为引力位，即各种保守力之和（叠加），包括地球引力位、各种地外天体的直接和间接引潮力位；$\frac{\partial V}{\partial X}=V_i(i=x,y,z)$为引力加速度；$X$ 可以是 S_I 中的位置向量，也可以是 S_A 中的位置向量。其中地球的引力加速度是卫星在自由落体运动状态（即绕地球的轨道运动）下加速度的主分量，各种地外天体产生的引力加速度影响主要是月球和太阳的引力作用，均可由相应的力模型精确计算予以顾及。令

$$f^*=f^1+f^2+\cdots \tag{12.223}$$

f^* 称为比力（Specific Force），是相对于惯性空间的绝对加速度与引力加速度之差，即 $f^*=a_I-V_i$ 是各种非保守力及约束运动下的弹力或电磁力等的合力加速度，f^* 是卫星重力梯度仪加速度计的输出，用 $f_i^*(i=x,y,z)$表示其在各坐标轴上的分量，由式（12.220）至式（12.223），可将式（12.220）写成以下矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \\ f_z^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_z & \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z & 0 & -\dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y & \dot{\omega}_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{ox} \\ a_{oy} \\ a_{oz} \end{bmatrix} \tag{12.224}$$

或

$$V_x + f^s = \ddot{r} + 2\Omega\dot{r} + \dot{\Omega}r + \Omega^2 r + a_0 \tag{12.225}$$

这是加速度计测量的基本方程。

GOCE 卫星上的差分加速度重力梯度仪如图 12.12 所示。其中┘表示三轴加速度计,实线为敏感轴,虚线为不敏感轴,中心 O 为梯度仪的质心,要求与卫星质心重合,其中 x 轴指向卫星飞行方向;z 轴指向地心,xOz 为轨道面。

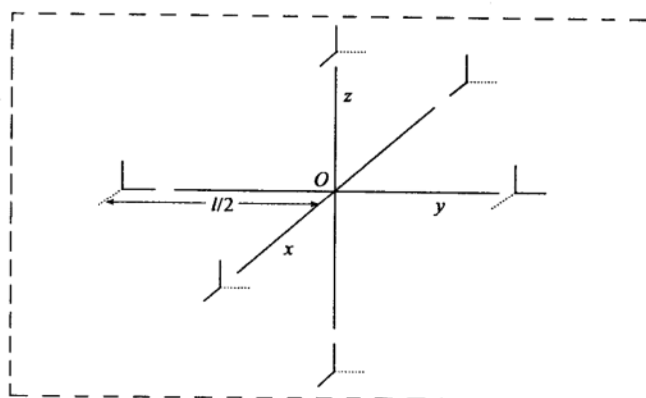


图 12.12　差分加速度重力梯度仪

y 轴与 x 轴和 z 轴构成右手正交坐标系,为轨道面的法线方向。一对对称于 O 点的加速度计间的距离(基线)为 l,l 长 60 ~ 100cm。

现在来说明差分加速度测量重力梯度的原理。以其中一对加速度计 A 和 B 为例,每个加速度计的检测质量,通过对作用力(加速度)的响应反馈系统使该质量保持在一个固定的平衡位置不变,则在 S_A 系统中总有 $\ddot{r} = \dot{r} = 0$,又将 $V_X(r)$ 在 S_A 的原点 O 展开取一次项,即 $V_X(r) = V_X(O) + V_{XX}(O) \cdot r$,其中 $V_{XX}(x,y,z)$ 为引力梯度张量,由式(12.225)可写出

$$f^s(A) = (-V_{XX} + \dot{\Omega} + \Omega^2)r(A) + a_0 - V_X(O) \tag{12.226}$$

$$f^s(B) = (-V_{XX} + \dot{\Omega} + \Omega^2)r(B) + a_0 - V_X(O) \tag{12.227}$$

对以上两式作差分（相减），令 $\Delta r = r(A) - r(B)$，$\Delta f^s = f^s(A) - f^s(B)$，则有

$$\Delta f^s = (-V_{XX} + \dot{\Omega} + \Omega^2) \cdot \Delta r \tag{12.228}$$

3 对 6 个加速度之间可作 18 个加速度差分，构成 3 阶观测张量（矩阵），共 9 个分量，每一分量用 $L_{ij}(i,j = x,y,z)$ 表示：

$$L_{ij} = \Delta f_i^s / \Delta x_j \tag{12.229}$$

则有观测方程

$$L_{ij} = -V_{ij} + \dot{\Omega}_{ij} + \Omega_{ik}\Omega_{kj} \quad (i,j,k = x,y,z) \tag{12.230}$$

令 $L = \{L_{ij}\}$，则其矩阵形式为

$$L = -V_{XX} + \dot{\Omega} + \Omega^2 \tag{12.231}$$

式中：

$$V_{XX} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix} \tag{12.232}$$

$$\dot{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\omega}_z & -\dot{\omega}_y \\ -\dot{\omega}_z & 0 & \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y & -\dot{\omega}_x & 0 \end{bmatrix} \tag{12.233}$$

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} -(\omega_y^2 + \omega_z^2) & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ \omega_x\omega_y & -(\omega_x^2 + \omega_z^2) & \omega_y\omega_z \\ \omega_x\omega_z & \omega_y\omega_z & -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{bmatrix} \tag{12.234}$$

由方程（12.231）尚不能直接确定 V_{XX}，需要将引力梯度分量与旋转分量分离，利用 V_{XX} 和 Ω^2 为对称矩阵，$\dot{\Omega}$ 反对称，并顾及 $\Delta V = 0$，则可将方程（12.231）作以下分解：

$$\frac{1}{2}(L + L^{\mathrm{T}}) = -V_{XX} + \Omega \tag{12.235}$$

$$\frac{1}{2}(L - L^{\mathrm{T}}) = \dot{\Omega} \tag{12.236}$$

根据对卫星（或者说重力梯度仪）姿态测定的输出，若已知一初始时刻 t_0 的角速度 $\Omega_{ij}(t_0)$，则可通过以下积分确定任意时刻 t 的角速度，

$$\Omega_{ij}(t) = \int_{t_0}^{t} \dot{\Omega}_{ij} \mathrm{d}t + \Omega_{ij}(t_0) \tag{12.237}$$

还有其他确定或清除旋转效应的方法，此处从略，读者可参阅有关文献（罗志才，1996）。

由卫星重力梯度计获得的重力梯度观测量属于加速度计的局部坐标系 S_A，在这里就是差分加速度重力梯度仪坐标系，S_A 在设计上应与局部轨道直角坐标系 $O' - x'y'z'$ 一致，坐标原点为卫星质心 O'，重力梯度仪的质心应与 O' 重合，x' 轴切于卫星轨道指向卫星飞行方向，z' 轴在轨道面上沿卫星地心向径指向轨道外，y' 轴与 x'、z' 轴构成右手坐标系。受卫星姿态和梯度仪的安装误差影响，S_A 和 $O' - x'y'z'$ 之间存在微小的轴向差（欧拉角），可通过测定卫星姿态角将

S_A 中的梯度观测值转换到 $O'-x'y'z'$ 中，同时还需再转换到局部轨道指北直角坐标系 $O'-\xi,\eta,\zeta$。这个坐标系是保持 z' 轴不变，即 $z'=\xi'$，根据 x' 轴在球坐标系中的方位角 A（由轨道向倾角产生），将 x' 轴转到子午圈指北方向 ξ，y' 则随之转到指东方向 η。经以上坐标转换，得到在局部轨道指北坐标系中的重力梯度张量观测值，可作为由卫星重力梯度数据确定地球重力场的输入。

由卫星重力梯度 V_{XX} 确定全球重力场模型，首先需由引力位的球谐展式 $V(r,\theta,\lambda)$（见式(12.4)）出发，建立 V_{XX} 与集合 $\{\bar{C}_{nm},\bar{S}_{nm}\}$ 的函数关系，由 $V=U+T$（其中 U 为已知正常重力位），有

$$T_{XX} = V_{XX} - U_{XX} \tag{12.238}$$

式中：U_{XX} 为正常位二阶梯度张量，可由 U 的球谐展开求二阶导数确定。由此式可将重力梯度张量观测值换算为扰动重力梯度张量观测值，但需建立 T_{XX} 与 $\{\bar{C}_{nm},\bar{S}_{nm}\}$ 的函数关系。以下仅以扰动位的二阶径向梯度 $T_{zz}=T_{rr}$（即扰动重力径向梯度 g_r）为例，给出相应的函数关系。由式(12.7)对变量 r 取二阶偏导数 $T_{rr}=\dfrac{\partial^2 T(r,\theta,\lambda)}{\partial r^2}$，并取 $R=a$（R 为地球平均半径），得

$$\begin{aligned} T_{rr}(r,\theta,\lambda) &= \frac{GM}{R^3}\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+2)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}\cdot \\ &\sum_{m=0}^{n}(\bar{C}^{*}_{nm}\cos m\lambda + \bar{S}_{nm}\sin m\lambda)\bar{P}_{nm}(\cos\theta) \end{aligned} \tag{12.239}$$

这里假定球坐标系原点与地球质心重合，因此 $n=1$ 项消失。上式是地外空间任一点 (r,θ,λ) 的扰动位二阶径向梯度，现假定卫星重力梯度数据归算到一个与卫星轨道包络面最接近的球面上，且球心位于地心，球半径为 $r=R_S$，此球面上的扰动重力径向梯度用 $T^{s}_{rr}(R_S,\theta,\lambda)$ 表示，则有

$$\begin{aligned} T^{s}_{rr}(R_S,\theta,\lambda) &= \frac{GM}{R^3}\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+2)\left(\frac{R}{R_S}\right)^{n+3}\cdot \\ &\sum_{m=0}^{n}(\bar{C}^{*}_{nm}\cos m\lambda + \bar{S}_{nm}\sin m\lambda)\bar{P}_{nm}(\cos\theta) \end{aligned} \tag{12.240}$$

利用球函数的正交性可得扰动位的位系数为

$$\bar{C}_{nm} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{R^3}{GM(n+1)(n+2)}\cdot\left(\frac{R_s}{R}\right)^{n+3}\int_{\sigma} T^{s}_{rr}(R_3,\theta,\lambda)\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda\cdot d\sigma \tag{12.241}$$

$$\bar{S}_{nm} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{R^3}{GM(n+1)(n+2)}\left(\frac{R_s}{R}\right)^{n+3}\int_{\sigma} T^{s}_{rr}(R_s,\theta,\lambda)\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda\cdot d\sigma \tag{12.242}$$

式中：T^{s}_{rr} 是地心球坐标系中的径向梯度，和前述局部轨道指北直角坐标系 $O'-\xi,\eta,\zeta$ 中径向梯度观测值是一致的，无须作坐标系的变换。但对其他梯度分量，直接利用坐标系 $O'-\xi,\eta,\zeta$ 中的梯度观测值求解位系数 $\{\bar{C}_{nm},\bar{S}_{nm}\}$，则需将 $V_{ij}=U_{ij}+T_{ij}(i,j=\xi,\eta,\zeta)$，表达为 $V_k=U_k+T_k$ $(k=r,\varphi,\lambda)$ 和 $V_{ks}=U_{ks}+T_{ks}(k,s=r,\varphi,\lambda)$ 的函数。利用两坐标系之间转换的微分公式，有以下一阶导数关系（陆仲连、吴晓平，1994）：

$$\left.\begin{aligned} V_{\xi} &= \frac{1}{r}V_{\varphi} \\ V_{\eta} &= \frac{1}{r\cos\varphi}V_{\lambda} \\ V_{\zeta} &= V_r \end{aligned}\right\} \tag{12.243}$$

二阶导数关系为：

$$
\left.\begin{aligned}
V_{\xi\xi} &= \frac{1}{r^2}V_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}V_r \\
V_{\eta\eta} &= \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}V_{\lambda\lambda} - \frac{\tan\varphi}{r^2}V_\varphi + \frac{1}{r}V_r \\
V_{\zeta\zeta} &= V_{rr} \\
V_{\xi\eta} &= V_{\eta\xi} = \frac{1}{r^2\cos\varphi}V_{\varphi\lambda} + \frac{\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi}V_\lambda \\
V_{\eta\zeta} &= V_{\zeta\eta} = \frac{1}{r\cos\varphi}V_{r\lambda} - \frac{1}{r^2\cos\varphi}V_\lambda \\
V_{\xi\zeta} &= V_{\zeta\xi} = \frac{1}{r}V_{\varphi r} - \frac{1}{r^2}V_\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{12.244}
$$

对于 U_{ij}，T_{ij}，有和以上完全相同的关系，只需将式(12.243)和式(12.244)中的 V_{ij}和 V_{ks}分别改为 U_{ij}、U_{ks}或 T_{ij}、T_{ks}。而其中 U_k、T_k、U_{ks}和 T_{ks}可对式(12.5)和式(12.7)取一阶和二阶偏导数得到，代入式(12.244)便可建立 V_{ij}与位系数$\{\bar{C}_{nm},\bar{S}_{nm}\}$之间的线性关系，其具体表达式从略，可参阅上述引用文献。

利用式(12.240)至式(12.242)可确定重力梯度单定边值问题的解。理论上，另外还有 4 个独立的梯度分量，即 $V_{\xi\xi}$(或 $V_{\eta\eta}$)、$V_{\xi\eta}$、$V_{\xi\zeta}$和 $V_{\eta\zeta}$。若联合利用所有或其中一部分不同分量梯度观测值，则可构成重力梯度超定边值问题，通常可按最小二乘方法求解，或按超定边值问题准解理论求解(罗志才，1996)。

以上方法是在空间域(即将引力位表达为空间位置坐标的函数)用求解重力梯度边值问题的调和分析法求解地球引力位球谐展开的位系数，从而确定一个地球重力场模型，由此模型可计算其他各类重力场参数，称为“空域法”。

调和分析法是基于球面上调和函数的球谐展开，以及作为边值的各类扰动引力场参数与扰动位之间的微分关系求解扰动位的位系数，例如扰动重力 $\delta g=\frac{\partial T}{\partial r}$，垂线偏差 $\xi=-\frac{1}{R\gamma}\frac{\partial T}{\partial\varphi}$，$\eta=-\frac{1}{R\gamma\cos\varphi}\frac{\partial T}{\partial\lambda}$，径向扰动重力梯度$\frac{\partial\delta g}{\partial r}=\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$等。

另一种方法是将边值条件的微分算子或其他线性算子转换为一种积分算子关系，即直接将边值通过带核函数的积分变换确定待求参数，例如由基本微分方程$\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{2}{R}T=-\Delta g$ 作边值条件导出经典的计算扰动位 $T\left(\text{或大地水准面 } N=\frac{T}{\gamma}\right)$的 Stokes 积分公式，其核函数为 Stokes 函数，由关于球面调和函数的第一边值问题的单位边值条件算子导出著名的 Poisson 积分，此法可简称“积分法”。由于卫星重力梯度数据即将可以获取，李建成按照“积分法”的思想，根据各类边值条件微分算子以及不包含零阶和一阶项的 Poisson 积分，导出了由扰动位径向二阶梯度(扰动重力径向梯度)T_{rr}作边值计算其他扰动(或异常)重力场的积分公式，这里略去推导过程，仅给出结果如下(李建成，2002，2005)：

$$
\delta g = \frac{R}{4\pi}\iint_\sigma T_{rr}L(r,\psi)\,\mathrm{d}\sigma \tag{12.245}
$$

其中：T_{rr}为球面边界上的边值，球半径为 $r=R$，核函数 $L(r,\psi)$的表达式为：

$$L(r,\psi) = -\frac{3r}{l} + \frac{6R\cos\psi}{l} - \frac{R^2}{lr} - 3\cos\psi\ln\frac{2R^2 - 2Rr\cos\psi - 2Rl}{r} -$$

$$\frac{R^2}{2}\frac{1}{r^2} - R^3\cos\psi\frac{1}{r^3} + 3 + 3\cos\psi\ln[2R(1-\cos\psi)] \tag{12.246}$$

式中:ψ 为计算点与流动积分面元 $d\sigma$ 间的球面角距;l 为这两点间的空间距离,以下同。若 $R = R_s$ 为卫星轨道球面,且计算此球面上的 δg,则 $L(r,\psi) = L(R_S,\psi) = L(\psi)$ 可简化为

$$L(\psi) = \frac{1}{\rho} - 6s + \frac{3}{2} + 2s^2 - 3(1-2s^2)\ln\frac{s+1}{s} \tag{12.247}$$

其中:

$$s = \sin\frac{\psi}{2} \tag{12.248}$$

若 $R = R_s$, $r = R_E$(地球平均半径),则式(12.87)是向下延拓公式;若取 $R = R_E$,则 T_{rr} 为由球面($R = R_s$)上的卫星重力梯度数据向下延拓到地球表面作边界值:

$$\Delta g = \frac{R}{4\pi}\iint_\sigma T_{rr} I(r,\psi)\,d\sigma \tag{12.249}$$

$$I(r,\psi) = -\frac{3r}{l} + \frac{6R\cos\psi}{l} - \frac{R^2}{lr} - \left(3\cos\psi - 2 + \frac{6}{R}r\cos\psi\right)\ln\frac{R - r\cos\psi + l}{r(1-\cos\psi)}$$

$$-\left(\frac{1}{2} - \cos\psi\right)\frac{R^2}{r^2} - R^3\cos\psi\frac{1}{r^3} + 3 - \frac{6}{R}(l - r) + \frac{R}{r} \tag{12.250}$$

若 $R = R_s$, $r = R_s$,类似地有

$$I(\psi) = \frac{1}{s} - 18s + \frac{19}{2} - (7 - 18s^2)\ln\frac{s+1}{s} \tag{12.251}$$

$$T = \frac{R^2}{4\pi}\iint_\sigma T_{rr} F_2(r,\psi)\,d\sigma \tag{12.252}$$

$$F_2(r,\psi) = \frac{3}{R}(l - r) + \frac{3}{R}\cos\psi\left[\ln\frac{R + l - r\cos\psi}{r(1-\cos\psi)}\right]$$

$$-\ln\frac{2R^2 - 2Rr\cos\psi + 2lR}{r} - \frac{R}{2}\frac{1}{r}$$

$$-\frac{R^2\cos\psi}{2}\frac{1}{r^2} + \ln[2R(1-\cos\psi)] \tag{12.253}$$

若 $R = R_s$, $r = R_s$,有

$$F_2(R_s,\psi) = F(\psi) = 6s + 2(1-3s^2)\ln\frac{s+1}{s} - 4 + s^2 \tag{12.254}$$

以上积分公式适于向上延拓(即 $r > R$)。向下延拓(即 $r < R$)对边值观测误差有放大效应,如何抑制此效应是一个需要研究的问题。

另一种由卫星重力梯度数据恢复重力场的方法称为“时域法”。卫星重力测量观测值是卫星运行过程中采集的时间序列,可将所测重力场参数视为时间的函数,即该参数的球谐展开含时间变量,因此在时域法中需将空域法中用球坐标(r,θ,λ)表示的球谐展开变换为用卫星的轨道参数表示。已知卫星的6个轨道根数就可以确定任意时刻 t 卫星在地心地固直角坐标系中的位置坐标 $X(t)$,再由 $X(t)$ 与(r,θ,λ)之间的转换关系,理论上可得到利用卫星轨道根数表示的球谐展式,这种变换的展开称为 Kaula 展开(Kaula,1966)。另外,重力梯度观测的时间序列是一个周期序列,可用一个 Fourier 级数表示,其系数由时序观测值确定。由 Kaula 展

开可以导出 Fourier 系数与包含待求位系数的所谓集总系数之间的线性关系。通过对此线性方程的求解可解出位系数。这是时域法的基本原理,通常认为此方法有较高的精度,但运算过程相对复杂,有关该方法的细节可参阅有关文献(Rummel and Sansó,1993)。

§12.4 引力反解问题的一般理论

12.4.1 引力反解问题

一个物体若已知其外部形状 S 及其内部密度分布 ρ,则可由以下牛顿积分公式计算该物体的引力位 V:

$$V(P) = G\iiint_{\Omega} \frac{\rho(Q)}{l_{PQ}} \mathrm{d}\tau_Q \tag{12.255}$$

式中:P 为引力位计算点,可以是物体外部空间一点,也可以是物体内部点;Q 为体元 $\mathrm{d}\tau$ 积分流动点;l_{PQ} 为 P,Q 两点间的距离;Ω 是 S 包围的物体体积;G 是引力常数。

由已知函数 $\rho(Q)$ 计算 $V(P)$,称为引力的正解问题,或正演问题,是一个可以精密实现计算的确定性问题,即有确定性的惟一解。牛顿积分是一种线性运算,式(12.255)可简写为

$$V = N\rho \tag{12.256}$$

式中:N 表示由式(12.255)积分运算定义的线性算子,常称"牛顿算子",即函数 ρ 经算子 N 的变换可得函数 V。函数 ρ 和 V 均假定定义在整个欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 上,且在 S 外部 $\rho=0$,在 S 内部 ρ 是分段连续,V 则在 $\mathbf{R}^3$ 中处处连续可微,同时假定曲面 S 是光滑的,即任意阶次可微。

设想将积分(12.255)离散化,例如将体积 V 划分为由足够多的小立方体组成,取每个小立方体的平均密度,积分算子的核函数取对应小立方体中心的值,则式(12.256)的右边的算子 N 便离散化为有限项(项数等于小立方体的总个数)的和式,N 则转化为一向量,即线性方程的系数向量。根据引力位的可叠加性,用这种离散化处理方法计算任一点 P 的引力位 $V(P)$(引力位正解问题)可达到任意指定的精度,只要给定的密度分布 $\rho(Q)$ 足够精确。在引力位正解问题的实际计算中通常采用这种处理方法,即数值积分法。

在式(12.256)中,当已知物体产生的引力位函数 V,要求解物体的密度分布函数 ρ,称为引力位的反解问题,或反演问题。这个问题是研究地球重力场信息地球物理解释,或一般地说地学解释所要解决的基本问题。由式(12.256),引力位反解问题可表示为

$$\rho = N^{-1}V \tag{12.257}$$

式中:N^{-1} 为 N 的逆算子。

假若在整个 $\mathbf{R}^3$ 空间给定了连续函数 V,则不仅可以确定逆算子 N^{-1},而且只要 V 是二次可微函数,可以得到函数 ρ 的惟一解,由描述引力位和密度关系的 Poisson 方程

$$\Delta V = -4\pi G\rho \tag{12.258}$$

得到

$$\rho = -\frac{1}{4\pi G}\Delta V \tag{12.259}$$

显然有

$$N^{-1} = -\frac{1}{4\pi G}\Delta \tag{12.260}$$

式中：Δ 为熟知的 Laplace 算子，在空间直角坐标系(x,y,z)中为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Poisson 方程是关于 S 内部引力位的关系式，即函数 ρ 和函数 ΔV 是一个常系数 $\left(-\frac{1}{4\pi G}\right)$ 的比例关系，在 S 外部必须满足 Laplace 方程 $\Delta V = 0$ 和 $\rho = 0$。现在我们研究的物体是整个地球，S 是地球表面，并假定 S 外部没有物质存在，以及地球是静止的（即没有自转，不考虑离心力位）。对于地球的引力位函数 V，我们可以以一定的分辨率和精度给出定义在 S 外部空间的地球引力位函数，例如各种阶次的地球引力位模型，而恰恰是 S 内部的地球引力位我们还几乎一无所知，因此不能直接应用式(12.259)计算 ρ。

以式(12.257)表达的引力位反解问题的提法是：已知地球表面形状 S，并假定是"光滑"的，又已知 S 上或包括其外部空间的引力位函数 V，要求由式(12.255)，即式(12.256)反解密度函数 ρ，注意已知的是地球质体产生的外部位，要求的是质体的密度分布。这是一个著名的不适定问题，它不存在惟一解。由位理论知，对式(12.256)，我们总可以人为地构造一种密度分布 ρ_i，使它正好产生给定的外部引力位 $V_外$，而且这种构造有无穷多种选择，即 $i = 1, 2, \cdots$。现在我们又假定对算子 N 作前述的离散化处理，则式(12.256)转化为一线性方程组：$V_外 = N\rho_i$（N 为该方程的系数矩阵），显然此时矩阵 N 将是奇异的，或者说是亏秩的。由线性代数中关于矩阵的广义逆理论，式(12.257)中的 N^{-1} 则是某种类型的广义逆，通常是一种多值解表达式，除非规定了解空间的特定范数并引入了相应正规化约束条件才可能获得惟一解。对不熟悉广义逆理论的读者，可以联系线性代数中关于相容的非齐次线性方程组 $AX = b$（在这里 A、X、b 分别相当于 N、ρ 和 V）的一般解理论来理解以下要介绍的关于引力位反解问题的一般理论。

12.4.2 零位密度和调和密度

现将式(12.256)看成一个代数线性方程组，为了区别，用下式表示

$$N'\rho' = V' \tag{12.261}$$

其中：V'是方程的 m 维常数项向量；ρ'是待求 n 维参数向量；N'是 $m \times n$ 阶系数矩阵，设其秩 $\mathrm{rank}(N') = r < n$，$\overline{N}' = [N' \vdots V']$为 N'的增广矩阵，假定 $\mathrm{rank}(N') = \mathrm{rank}(\overline{N}') = r$，即方程组是相容的，则该非齐次线性方程组 $N'\rho' = V'$有解，设其中一个特解为 ρ'_H。对应齐次方程 $N'\rho' = 0$ 有无穷多组非零解向量，但是有一个线性无关的解组 $\rho'_0 = [\bar{\rho}'_1, \bar{\rho}'_2, \cdots, \bar{\rho}'_{n-r}]^{\mathrm{T}}$，其中 $\bar{\rho}'_i (i = 1, 2, \cdots, n-r)$ 是一个非零解向量，ρ'_0 则是线性无关非零解向量子空间，称为该齐次方程组的基础解系。

由线性方程组理论知，非齐次方程组 $N'\rho' = V'$的通解可表示为

$$\rho' = \rho'_0 + \rho'_H \tag{12.262}$$

这个通解仍是一个多解表达式，不是惟一解。而且是在向量空间近似表示引力位反演问题的一般解。事实上，式(12.256)是一线性泛函方程，其中 ρ 和 V 都是函数，属函数空间，N 是线性泛函算子，引力位反解问题的现代理论自然是以泛函分析作数学工具。为避免过多严格的泛函分析概念，以下用比较初等的数学概念，按求解线性方程组的类比方法给出引力位反解问题形如式(12.262)的通解，较详细的叙述可参阅有关文献（Moritz，1990，第七章）。

前面已指出，式(12.257)中的逆算子 N^{-1}不是惟一的，它有无穷多个密度分布解可产生给

定的外部位。为从数学上进一步讨论这种不适定性，假定已知地球外部引力位函数 $V_{外}$，不妨认为它是地壳密度分布 $\rho_{地壳}$、地幔密度分布 $\rho_{地幔}$ 和地核密度分布 $\rho_{地核}$ 各自产生的引力位 $V(\rho_{地壳})$、$V(\rho_{地幔})$ 和 $V(\rho_{地核})$ 叠加而成，即有 $V_{外} = V(\rho_{地壳}) + V(\rho_{地幔}) + V(\rho_{地核})$，在此和式中仅有 $V_{外}$ 是已知的，并认定 $\Delta V_{外} = 0$。如果假定我们用某种方法确定了等式右边第一项 $V(\rho_{地壳})$，我们就可以有无穷多的方法人为地"试凑"出 $V(\rho_{地幔})$ 和 $V(\rho_{地核})$，使其与 $V(\rho_{地壳})$ 的叠加等于 $V_{外}$，此时 V 就在整个 $\mathbf{R}^3$ 中有了定义，由此可按式(12.259)惟一地确定 $\rho_{地壳}$、$\rho_{地幔}$ 和 $\rho_{地核}$，且可保证它们在地表 S 的外部空间均为零。若换一种"试凑"法，又可得到另一种相应的密度分布。若事先给定了 $V(\rho_{地壳})$ 和 $V(\rho_{地幔})$，显然也就确定了 $V(\rho_{地核}) = V_{外} - V(\rho_{地壳}) - V(\rho_{地幔})$，同理可解得一种对应的密度分布。若 $V(\rho_{地壳})$、$V(\rho_{地幔})$ 和 $V(\rho_{地核})$ 都未知，则"试凑"其和等于 $V_{外}$ 的"自由度"就更大了。现在若令 $V_{外} = 0$，显然我们可以"试凑"出三个非零项 $V(\rho^0_{地壳})$、$V(\rho^0_{地幔})$ 和 $V(\rho^0_{地核})$，使其叠加之和等于零外部位，同样可以按式(12.259)解得非零密度分布函数集合 $\rho^0_{地壳}$、$\rho^0_{地幔}$ 和 $\rho^0_{地核}$。可以证明，它构成了函数空间 $V_{外}$ 的一个子空间，即零空间。所有的 $V(\rho^0_{地壳})$、$V(\rho^0_{地幔})$ 和 $V(\rho^0_{地核})$ 都属于此零空间，我们称其为牛顿算子 N 的核，即满足

$$N\rho_0 = 0 \tag{12.263}$$

式中：$\rho_0 = \{\rho^0_{地壳}, \rho^0_{地幔}, \rho^0_{地核}\}$；$N$ 的标记为 $\ker(N) = N^{-1}(0)$；ρ_0 则称为零位密度，相当于式(12.262)中的基础解系 ρ'_0。

显然，ρ_0 中的元素必定有正有负，并保持总质量为零，否则式(12.263)不成立。因此，从实际应用的观点来看，$V_{外}$ 可认为是位异常，或者说是扰动位，则 ρ 是相应的密度异常，可有正有负。

事实上，我们可以很容易地设计出一种构造零位密度的方法，如图 12.13（为易于直观理解，图中用一维函数图像代替三维图像）。任取一函数 V_0，定义该函数在 S 之外和 S 之上恒等于零，再将 V_0 延拓至 S 之内整个地球体内部，并保证其处处连续且至少可以二次分段可微，这

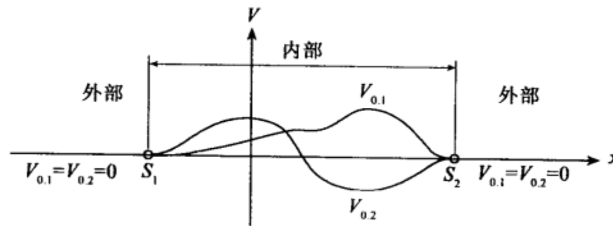


图 12.13　两种可能的一维函数 V_0 (Moritz, 1990)

样 V_0 就在整个 $\mathbf{R}^3$ 空间有定义，则可按式(12.259)惟一确定相应于 V_0 的零位密度 ρ_0，即

$$\rho_0 = -\frac{1}{4\pi G}\Delta V_0 \tag{12.264}$$

显然，在 S 外有 $\rho_0 = 0$，在 S 内 ρ_0 对应于 V_0 分段连续。由包括一切这样的可选函数 V_0 的集，可得到对应的一切分段连续的零位密度集。

现在来引出调和密度。设有一外部调和位 V，可以找到产生 V 的惟一连续的密度分布 ρ_H，它在 S 内是一个调和函数，即满足

$$\Delta\rho_H = 0 \quad （在 S 内部） \tag{12.265}$$

ρ_H 应该是"光滑"的，且是至少二次可微的，称为调和函数分布，由 Poisson 方程(12.259)，则有

$$\Delta^2 V \equiv \Delta(\Delta V) = 0 \tag{12.266}$$

上式称为 V 的双调和方程，在某种适当的边界条件下，双调和方程的解存在且惟一。

现以一个匀质球为例，其外部位等效于一个以球的总质量 M 集中于一点的点质量的外部位，即

$$V = \frac{GM}{r} \tag{12.267}$$

式中：$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。当球半径 $R=1$ 时，调和密度为

$$\rho_H = \frac{M}{4\pi/3} = \frac{\text{球质量 / 常数}}{\text{球体积}} \quad (\text{在 } S \text{ 之内}) \tag{12.268}$$

式中：常数为球的半径(当 $R\neq 1$)，对单位匀质球，略去推导，其内部位可表示为(Moritz, 1990)：

$$V_H = 2\pi G\rho_H\left(1 - \frac{1}{3}r^3\right) \tag{12.269}$$

现将式(12.256)应用于调和函数 ρ_H，即

$$V = N_H\rho_H \tag{12.270}$$

或

$$\rho_H = N_H^{-1}V \tag{12.271}$$

式中：N_H 为作用于调和密度函数的牛顿算子。显然，ρ_H 是方程(12.256)的一个特解，相当于一个非奇次线性方程的特解 ρ'_H(见式(12.262))。类似地，方程 $N_\rho=V$ 的通解就是该方程的特解 ρ_H，加上方程 $N\rho=0$ 的通解 ρ_0。即

$$\rho = \rho_0 + \rho_H \tag{12.272}$$

这样，求引力位反解问题通解的方法是：首先将给定的外部位 $V_外$ 延拓到 S 的内部，并保证延拓的连续和分段二次可微，其内部位为 $V_内(=V_0)$，得到在整个 $\mathbf{R}^3$ 中的位 $V=\{V_外, V_内\}$；然后，按式(12.264)求得零位密度 ρ_0，按式(12.272)求得 ρ_H。式(12.272)是引力位反解问题的一种原理性通解。上述方程并未告诉我们如何将 $V_外$ 向 S 内部延拓，上述方法的实现并非易事，下面要介绍 Lauricella 方法利用球的格林函数导出反解问题的显式表达。

12.4.3 Lauricella 方法(格林函数法)

Lauricella 方法的推导从以下格林第二恒等式(Heiskanen and Moritz, 1967；管泽霖，宁津生，1981)出发：

$$\iiint_v (U\Delta F - F\Delta U)\,\mathrm{d}v = \iint_s \left(U\frac{\partial F}{\partial c} - F\frac{\partial U}{\partial n}\right)\mathrm{d}s \tag{12.273}$$

式中：F 在上述文献中是用 V 表示，这一恒等式对任何光滑可微的函数 U 和 F 都成立；式中 v 和 s 及 $\mathrm{d}v$ 和 $\mathrm{d}s$ 的意义同前；Δ 是 Laplace 算子；$\partial/\partial n$ 表示沿法线方向的导数，指向以离开 v 物体为正。令

$$F = \Delta V \tag{12.274}$$

其中 V 仍然表示引力位，由此得

$$\iiint_v (U\Delta^2 V - \Delta V\Delta U)\,\mathrm{d}v = \iint_s \left(U\frac{\partial \Delta V}{\partial n} - \Delta V\frac{\partial U}{\partial n}\right)\mathrm{d}s \tag{12.275}$$

将上式中的 U 和 V 互换，再从式(12.275)减去该互换后的方程，得

$$\iiint_{v}(U\Delta^2 V - V\Delta^2 U)\,\mathrm{d}v = \iint_{s}\left(-V\frac{\partial\Delta U}{\partial n} + \Delta U\frac{\partial V}{\partial n} - \Delta V\frac{\partial U}{\partial n} + U\frac{\partial\Delta V}{\partial n}\right)\mathrm{d}s \qquad (12.276)$$

设想选择一个满足双调和方程的函数 U，即有

$$\Delta^2 U = 0 \qquad (12.277)$$

同时设想式(12.276)右边第三项和第四项能等于零，则在 S 内部一点 P 上的 V_P 就可表达为如下形式和线性泛函的组合：

$$V_P = L_1 V_S + L_2\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_s + L_3\Delta\rho \qquad (12.278)$$

式中：L_1，L_2 和 L_3 为线性泛函算子，即式(12.276)中相应项的积分算子，分别作用于 S 上的 V（即 V_s）和 $\partial V/\partial n$ 以及 $\Delta\rho$。

对式(12.259)作 Δ 运算，可得 $\Delta\rho$ 与 $\Delta^2 V$ 的比例关系，则式(12.276)左边第一项就是 $\Delta\rho$ 的泛函（即 $L_3\Delta\rho$）。我们已假定在 S 上的 V（即 V_S）及 $(\partial V/\partial n)_S$ 是给定的，而 $\Delta\rho$ 是可以任意确定的，因此可求得内部位 $V_{内}$（即 V_P）的一般解，应用格林函数可以实现上述设想，这就是 Lauricella 方法的基本思想。下面进行相关的数学推导（Moritz，1990）。

首先对式(12.276)作实用化的转换，为此选择 U，令

$$U = l \qquad (12.279)$$

式中：l 为计算点 $P(x_P, y_P, z_P)$ 至积分流动点 (x, y, z) 之间的距离（见图 12.14）。

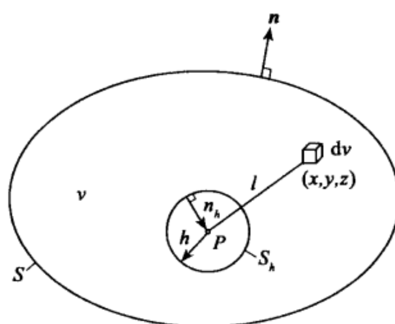


图 12.14　格林函数方法的图示

$$l^2 = (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 + (z - z_P)^2 \qquad (12.280)$$

则有

$$\Delta l = \frac{2}{l} \qquad (12.281)$$

$$\Delta^2 l = 2\Delta\left(\frac{1}{l}\right) = 0 \qquad (12.282)$$

因此所选函数 $U = l$ 满足式(12.277)的要求。惟一存在的问题是 $1/l$ 在点 P（此处 $l = 0$）奇异，不能直接应用式(12.276)，需要对此奇异点作出处理。为此，在体域 v 中以点 P 为中心挖去一个半径为 h 的小球，球面用 S_h 表示，由 S 和 S_h 围成体域 v'，则式(12.276)可直接应用于 v'，v' 在 S_h 上的法线为 n_h，按规定指向离开 v'，即指向点 P，经此处理则总有 $l \neq 0$，由此，式

(12.276)可转换为

$$\iiint_{v'} l\Delta^2 V \mathrm{d}v' = \iint_{S,S_h}\left(-2V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right)+\frac{2}{l}\frac{\partial V}{\partial n}-\Delta V\frac{\partial l}{\partial n}+l\frac{\partial \Delta V}{\partial n}\right)\mathrm{d}s \tag{12.283}$$

上式中的 n 包含体域 v'两个界面 S 和 S_h 的外法线,并且这里采用了新符号

$$\iint_{S,S_h}\mathrm{d}s = \iint_{S}\mathrm{d}s + \iint_{S_h}\mathrm{d}S_h \tag{12.284}$$

由于 h 可以足够小($h\to0$)以及 V 的连续性,则在小球内部和表面 S_h 有 $V\approx V_P$,因此有

$$\iint_{S_{hj}}\left(-2V\frac{\partial}{\partial n_h}\left(\frac{1}{l}\right)\right)\mathrm{d}S_h \approx -2V_P\iint_{S_h}\frac{\partial}{\partial n_h}\left(\frac{1}{l}\right)\mathrm{d}S_h \tag{12.285}$$

由图 12.13 可知

$$\frac{\partial}{\partial n_h} = -\frac{\partial}{\partial l} \tag{12.286}$$

顾及上式和在 S_h 上 $l=h$,可得

$$\frac{\partial}{\partial n_h}\left(\frac{1}{l}\right) = -\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{l}\right) = \frac{1}{l^2} = \frac{1}{h^2} \tag{12.287}$$

还有

$$\mathrm{d}S_h = h^2\mathrm{d}\sigma \tag{12.288}$$

式中:$\mathrm{d}\sigma$ 为单位球面元,则积分式(12.285)可写为:

$$-2V_P\iint_{\sigma}\frac{1}{h^2}h^2\mathrm{d}\sigma = -8\pi V_P \tag{12.289}$$

下面设法消去在 S_h 上进行积分的其他项。当 $h\to0$ 时,有

$$\iint_{S_h}\frac{2}{l}\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}S_h = \iint_{\sigma}\frac{2}{h}\frac{\partial V}{\partial n}h^2\mathrm{d}\sigma \to 0 \tag{12.290}$$

进而有

$$-\iint_{S_h}\Delta V\frac{\partial l}{\partial n}\mathrm{d}S_h = \iint_{\sigma}\Delta V h^2\mathrm{d}\sigma \to 0 \tag{12.291}$$

上式的导出顾及了以下关系

$$\frac{\partial l}{\partial n} = \frac{\partial l}{\partial n_h} = -\frac{\partial l}{\partial l} = -1$$

以及

$$\iint_{S_h} l\frac{\partial \Delta V}{\partial n}\mathrm{d}S_h = \iint_{\sigma}\frac{\partial \Delta V}{\partial n}h^3\mathrm{d}\sigma \to 0 \tag{12.292}$$

最后,当 $h\to0$ 时,方程(12.283)的极限形式为

$$\iiint_{U} l\Delta^2 V\mathrm{d}v = -8\pi V_P + \iint_{S}\left(-2V\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{l}\right)+\frac{2}{l}\frac{\partial V}{\partial n}-\Delta V\frac{\partial l}{\partial n}+l\frac{\partial \Delta V}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{12.293}$$

进一步消去上式右边积分中的最后两项,为此引入一个辅助函数 H,它在整个体域 v 上正则并双调和($\Delta^2 H=0$ 且二次连续可微),在边界面 S 上有

$$H_S = l_S,\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)_S = \left(\frac{\partial l}{\partial n}\right)_S \tag{12.294}$$

H 与函数 $U=l$ 的差别仅在于:H 及 ΔH 在整个 v 上处处正则(无奇异点),而 ΔU 在点 P 奇异,P 点此时认为是固定的。双调和方程 $\Delta^2 H=0$ 应满足边界条件(12.294),当 S 足够光滑,

解 H 存在且惟一。将 H 应用于方程(12.276),并顾及式(12.294)和 $\Delta^2 H=0$,得

$$\iiint_v H^2\Delta^2 V\mathrm{d}v = \iint_S\left(-V\frac{\partial\Delta H}{\partial n}+\Delta H\frac{\partial V}{\partial n}-\Delta V\frac{\partial H}{\partial n}+H\frac{\partial\Delta V}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{12.295}$$

将式(12.293)乘式(12.295),并令

$$G' = l - H \tag{12.296}$$

得

$$\iiint_v G'\Delta^2 V\mathrm{d}v = -8\pi V_P - \iint_S V\frac{\partial\Delta G'}{\partial n}\mathrm{d}S + \iint_S \Delta G'\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{12.297}$$

可以看到,由于引入边值条件(12.294),方程(12.293)最后两项被消去,由此可得

$$V_P = -\frac{1}{8\pi}\iint_S V\frac{\partial\Delta G'}{\partial n}\mathrm{d}S + \frac{1}{8\pi}\iint_S\Delta G'\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}S - \frac{1}{8\pi}\iiint_v G'\Delta^2 V\mathrm{d}v \tag{12.298}$$

由 Possion 方程,上式中的 $\Delta^2 V$ 为

$$\Delta^2 V = -4\pi G\Delta\rho \tag{12.299}$$

将式(12.298)与式(12.278),最初的设想通过引入格林函数 G'得以实现,式(12.298)提供了内部位 $V_{内}=V_\rho$ 的显式表达,从而引力位 $V=\{V_{外},V_{内}\}$ 在整个 $\mathbf{R}^3$ 中有了定义。顺便指出,在文献(Moritz,1990)中将格林函数和引力常数开始使用同一符号,这里将格林函数用 G'表示,为避免符号混淆,Moritz 又引入了一个新的符号 G_2,意义为

$$G_2 = \frac{G}{2}\times\text{格林函数 }G \tag{12.300}$$

由此式(12.298)可写为

$$V_P = -\frac{1}{4\pi G}\iint_S\frac{\partial\Delta G_2}{\partial n}V\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi G}\iint_S\Delta G_2\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}S + \iiint_v G_2\Delta\rho\mathrm{d}v \tag{12.301}$$

现在回到式(12.272)即 $\rho=\rho_0+\rho_H$,与 ρ_H(满足 $\Delta\rho=0$)对应的内部位为 $V_P=V_H$,则由式(12.301)得

$$V_H = -\frac{1}{4\pi G}\iint_S\frac{\partial\Delta G_2}{\partial n}V\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi G}\iint_S\Delta G_2\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{12.302}$$

对应 ρ_0(零位密度,满足在 S 上 $V_S=0$),对应的内部位 $V_P=V_0$,由式(12.301)得

$$V_0 = \iiint_v G_2\Delta\rho\mathrm{d}v \tag{12.303}$$

则引力位反解问题的通解有以下等价形式

$$V_P = V_0 + V_H \tag{12.304}$$

至此我们还有一个问题要解决,就是如何确定辅助函数 H,从而确定 G'的表达式。若 S 是任意光滑曲面,即使是旋转椭球面,一般也是很难求得的。现假定 S 是球面,则很容易得出格林函数 G'(见式(12.296)),利用对内部点 P 作 Kelvin 变换,即相对球面作反转,见图 12.15,即将 P 反转为同半径上的 P'。此时有

$$rr' = R^2 \tag{12.305}$$

定义函数 l_1 为:

$$l_1 = \frac{r}{R}l' \tag{12.306}$$

则满足条件的辅助函数 H 可取为

$$H = \frac{1}{2}\frac{l^2}{l_1} + \frac{1}{2}l_1 \tag{12.307}$$

格林函数 G' 为

$$G' = l - \frac{1}{2}\frac{l^2}{l_1} - \frac{1}{2}l_1 \tag{12.308}$$

有关 $\Delta^2 H = 0$ 及边界条件(12.294)的证明这里从略,读者可参阅有关文献(Moritz,1990,166～167 页)。

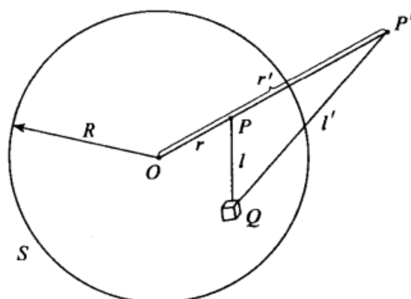


图 12.15 P 点的 Kelvin 变换图示

本节介绍了引力位反解问题的一般理论,给出了问题的通解。特别是介绍了有实用意义的 Lauricella 的通解(式(12.304)),可以提供对地球内部密度异常分布任意好的逼近。这里要求密度分布 ρ 可以是分段连续的,可用于具有圈层结构密度分布的求解。这一理论目前还未得到普遍应用,但已有初步应用研究结果发表。该理论是一种纯解析理论,我们这里用类比于求相容线性方程通解的理论说明其原理。至于如何加入先验地球密度模型(由地球物理方法导得,特别是地震波数据提供的密度分布信息)约束尚需深入研究。目前在地球物理探矿部门,易采用正则化方法处理反解问题的不适定性,类似于求线性方程的广义逆,通常是统计学方法(最小二乘法)求解此反问题,并结合最优化原理。

§12.5 地球重力场的地球物理解释

12.5.1 概述

测定和研究地球重力场的空间分布、频谱结构及其随时间的变化是大地测量学的主要分支之一,即物理大地测量学。重力场是地球质体产生的反映地球物质分布的物理场,是地球最重要的一种物理场,因此地球重力场当然也是地球物理学研究的重要领域。大地测量学侧重于研究测定地球重力场的方法和技术、利用观测的重力数据建立全球和局部重力场数学模型的理论和方法;地球物理学则侧重于研究利用重力测量数据和重力模型,并联合各种地球物理探测数据(例如地震、深部钻探、地电、地磁、地热等数据),分析解释涉及地球物质分布的固体地球构造模式、动力学机制及相关的各种地球物理现象和动力学现象,并由此建立由若干固体地球介质和结构参数表达的地球构造模型以及地球动力学模型,据此推测地球动力学环境的

变化，预测地震和地质变化，评估地下矿产资源。地球重力场是大地测量学与地球物理学一个主要的交叉研究领域，主要表现在各自提供的信息在实现各自的研究目标中得以互相支持和补充。例如物理大地测量学研究解算和建立重力场模型需要地球物理提供地壳密度数据、地壳厚度、地球潮汐数据（也是大地测量研究内容）等；地球物理研究地球构造模型和动力学模型，除了需要重力数据和模型的支持外，还需要大地测量（主要是空间大地测量）提供地壳运动和形变资料（反演弹性和粘滞参数）、地球总质量和地球形状参数等。本节围绕重力场的地球物理解释，介绍这一交叉领域的一个侧面。

就静态重力场（假定地球处于静止状态的地球引力场）而言，重力测量数据主要包括大地水准面起伏、重力异常和重力梯度。对重力数据进行谱分析（或者做球谐分析），可以建立以球谐函数作基函数展开的引力位球谐级数，即地球重力场模型。按展开的阶次划分重力场频谱结构的不同成分，一般分为长波（低频）、中波（中频）、短波（高频）和甚短波（甚高频）。长波反映全球（大于 4 000km）尺度地球物质（密度）的分布，主要是地球深部物质分布（如地幔和地核）；中波（500 ~ 4 000km）反映区域中尺度物质分布和构造，主要是上地幔岩石圈结构；短波（100 ~ 500km）反映局部地壳构造；甚短波（ <100km）则反映局部地形起伏。我们将主要介绍中长波重力场的大地构造解释，即壳—幔层的重力场特征，主要包括岩石圈板块的各类构造单元。

时变重力场包括各种不同时间尺度重力场的变化。中长时间尺度（几年到几十年和几百年）的变化反映中长周期的地球动力学过程，主要包括地幔对流、板块运动及其消长（板块更新过程）、长周期全球气候变化引起地球冰雪负荷（主要是极地冰盖、冰原和陆地冰川）的变化。例如全球变暖导致冰融，也包括冰后回弹和地球自转变化产生的重力变化。短周期（几天到几个月）变化反映地壳局部构造运动，例如活动构造带和地震孕震发震过程、火山活动等，也包括全球气候季节性或年季异常变化导致的全球水量分布变化（水循环过程变化）。我们将主要介绍长周期地球动力学过程的重力场效应，并包含在前述岩石圈板块构造单元重力场特征的描述中。短周期重力场变化将主要介绍局部构造活动的重力场效应。地球重力场的地球物理解释是一个很广泛的研究领域，涉及面广，虽然已有相当多的研究成果见之于各种文献和专著，但目前还未形成系统的和成熟的理论和方法体系。内容比较系统完整的著作是重力勘探，即重力探矿，主要是利用重力异常资料解释地壳浅层局部密度异常，评估矿储资源，本书不涉及这些内容，有兴趣的读者可阅读重力场与重力勘探方面的文献（曾华霖，2005）。随着重力测量技术的发展，特别是前述新一代卫星重力探测计划的实施，厘米级精度高分辨率重力场模型的出现，将会进一步推动重力场地球物理解释理论和方法的发展，并逐步形成它自身的完整体系。

12.5.2 几种主要海底构造单元的典型大地水准面特性

海洋占地球表面积的 71%。海底大地构造包含了全球大地构造的各类特征单元，例如对称扩张海脊（又称洋中脊）、深海沟（消减带）、大山链和孤立海山、断裂带等。大地水准面起伏是长波（数千公里）占优，其功率谱占 90% 以上，反映下地幔或核—幔边界的密度变化。以上构造单元是洋壳和海洋岩石圈组成部分，典型波长为 2 000 ~ 3 000km，是去掉低于 10 阶大地水准面后的剩余中波分量，其特性与这些构造单元较强相关（参阅安德林、卡泽纳夫主编的《空间大地测量与地球动力学》）。

(1)对称扩张海脊

在对称扩张海脊区域，大地水准面高程异常是由岩石圈的冷缩引起的，随着海底年龄的增长，大地水准面高从海脊顶部下降到多年（老龄）海盆。典型的大地水准面高度变化，在1 000～2 000km的距离上为5～10m。这一区域的大地水准面形状可用于约束岩石圈冷缩模型或约束板块推动力的大小。图12.16表示东太平洋海隆起上方的观测大地水准面高，显示从海脊顶部对称下降。一般说来，缓慢扩张的海脊，如中大西洋海脊，比快速扩张的海脊（如东太平洋海脊）有强得多的大地水准面特征。

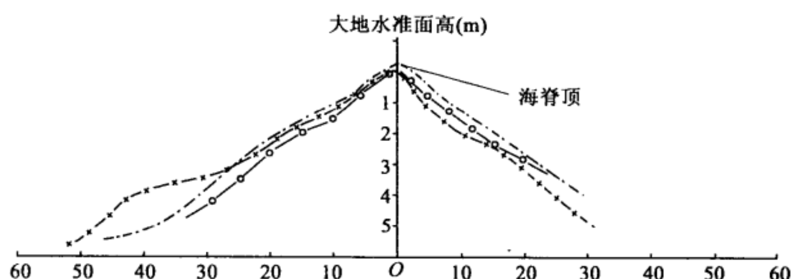


图 12.16　跨越东太平洋隆起的大地水准面剖面（垂直于东太平洋隆起的截面图）

（2）深海海沟

深海海沟在大地水准面上有很典型的特征，见图12.17。在海沟轴的正上方，大地水准面呈现出一深为5～20m，宽为100～400km的窄波谷。从海沟到陆地的一侧，通常波谷与所出现的岛弧重合程度迅速增加。把这一波谷加上短波变化，我们可以观测到从离消减板块向海一侧的海沟轴1 000～3 000km处突然出现的大面积正大地水准面异常。长波大地水准面高大约在海沟附近达到它的最大值，典型幅度在十米到几十米之间变化。虽然消减带的具体表现各有不同，但都将产生上述特征趋势的大地水准面异常。对这些异常的解释，尽管一些学者有不同的描述，但都把大面积的正大地水准面异常归因于与插入到软流圈中稠密、冷却的消减板块有关的热效应，而短波大地水准面较低则是板块在海沟轴上消减和弯曲的结果。所观测到的海沟负异常的非对称形状是向海一侧板块的绕曲所致，也可能是由于海底存在着偶然的外缘隆起。

（3）断裂带

在断裂带的上方，大地水准面异常表现为1～3m幅度的阶梯状信号，从断裂带年轻的比较浅的一边向下延伸到年老较深的一边。图12.18是显示这种大地水准面间距的例子。它是由断裂带每边的板块厚度和密度结构不同而造成的，其结果与海洋岩石圈演化的热模型所预测的相同。对断裂带大地水准面进行分析，也可估算岩石圈冷缩模型参数。

（4）火山链和孤立海山

火山链和孤立海山给出较大的正值大地水准面异常，其幅度可达5～6m，宽150km，有时位于较小的相邻最低点的两侧，见图12.19，这些异常是由两项对立的效应产生的，即起因于地形的正值大地水准面异常和起因于岩石圈内部均衡补偿的负值大地水准面异常。

（5）被动大陆边缘

被动大陆边缘也引起阶梯状的大地水准面特征，在这种情况下，是由于在大陆一边和海洋一边的地壳厚度不同所产生的。图12.20给出了一个跨过大陆边缘的大地水准面剖面图。

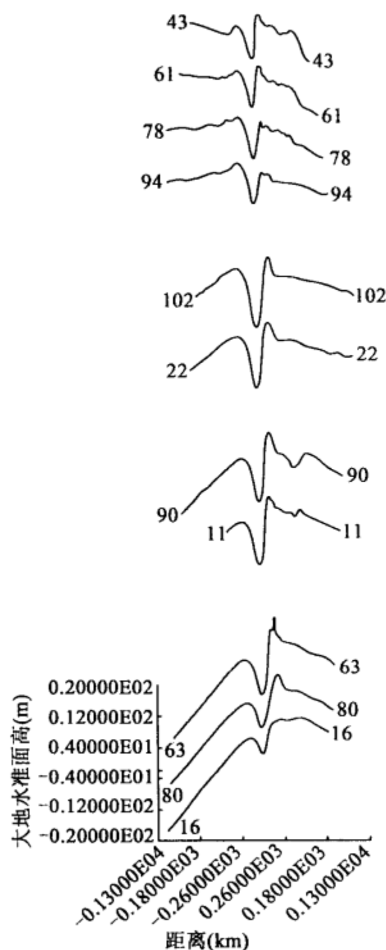


图 12.17　跨越阿留申消减带的大地水准面剖面图

12.5.3　对称扩张海脊中央(海岭)区的重力异常特性

许多穿越中央海岭的航船都取得了重力测线资料。这些测线虽因局部条件不同而有差异,但它们的重力异常图都有着相类似的形状。图 12.21 是维马号研究船在其第 17 次航行穿过大西洋中央海岭的重力异常、海底深度分布和假设的地壳结构剖面。图的左端接近(36°N,49°W),右端接近(25°N,29°W)。图中给出空间异常和布格异常。其中布格异常是采用二维模式,并取基岩密度为 2.60g/cm^3 计算得到。其地震波速度结构模型为:层 2 是基岩,v_p = 4.5 ~ 4.8km/s;层 3 是底部地壳,v_p = 6.5 ~ 7.0km/s;地幔岩石的速度 v_p = 7.9 ~ 8.4km/s。直接处于海岭下方的地幔速度和密度较低。

从图 12.21 可以看出,穿过中央海岭的空间异常的平均值,比邻近海底约大 0.2 ~ 0.3 × 10^{-3}m/s^2。在海岭附近,海洋深度最小,仅 2 ~ 3km,该处地壳最薄,莫霍界面的深度一般是

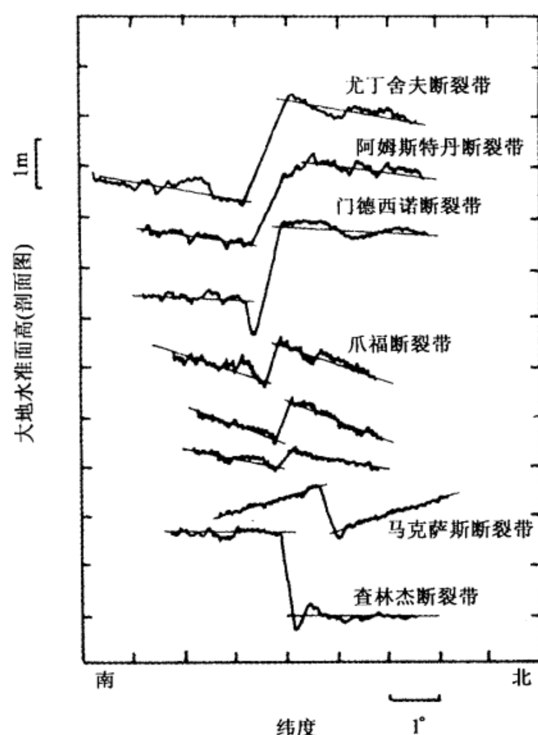


图 12.18 跨越断裂带的大地水准面，剖面在两条平行直线间计量大地水准面偏差 Δh

7km 左右。沿着海岭的重力补偿必定主要出现在上地幔顶部，这就需要有相当低的地幔密度，因而海岭处的布格异常值比附近的要低 $1.5\times10^{-3}m/s^2$。

在这里，由重力异常所建立的密度模型与由地震测深所得速度模型、由海洋磁测所建立的海底扩张概念以及由地面热流所建立的热模型是一致的。由于海底扩张，上地幔的低波速、低密度、高温物质不断上涌，从而开始海洋地壳的更新历史（参阅张少泉编著的《地球物理学概论》，1988）。

12.5.4 海沟重力异常特性

海沟重力异常的特征是，在海沟轴上有大幅度的负异常，而在朝向陆地的岛弧上是正异常。其负异常值可达（$-2.0\sim-3.0$）$\times10^{-3}m/s^2$，其正异常值可达 $3.0\times10^{-3}m/s^2$，两者落差竟达（$5.0\sim6.0$）$\times10^{-3}m/s^2$，显然是一个重力异常的高梯度带。

图 12.22 给出两条典型的海沟重力异常测量结果：一个是日本海沟，一个是阿留申海沟。在每个图上配有海底深度，其中空间异常有两个低值，最低值位于海沟轴附近，第二个低值出现在海沟朝向陆地的侧壁上。

值得一提的是，塔尔沃尼和黑斯（Talwani and Hayos）于 1967 年在理论上用岩石（$\rho=2.0g/cm^3$）把 5km 以下的海沟及其邻近的海洋填平，与此类似，在朝向海洋的内壁上，把深度小于 5km 的岩石去掉，其目的在于把空间异常中的地形影响和结构影响分开。图中标出了

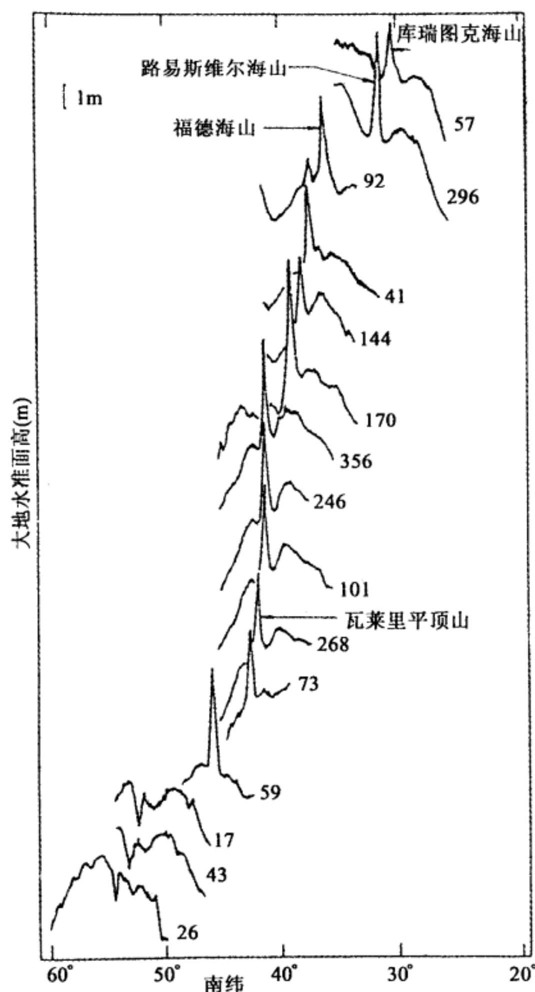


图 12.19　跨越路易斯维尔海山、乌丁特色夫断裂带及萨普断裂带的 SEASAT 卫星下降弧段的剖面,剖面按南纬增加的方向排列

5km 线，这样算出的异常基本上与地形无关。他们把这种异常称为 5km 异常。从图中可以看出,5km 异常的最小值直接位于海沟内壁面上,而不是海沟轴上,即从空间异常最小值的位置向岛弧方向移动 10 ~ 50km。造成这种位置偏移的原因,可能是由于很厚的低密度沉积物造成的,也可能是海沟轴附近的消减板块向下弯曲时,该板块上部的较低密度物质产生的。或许,两者兼而有之。

海沟重力异常的另一个特点是,在朝向海洋的海沟内壁上,具有长波长正异常特征。图 12.23 所示的异常波长为几百公里,幅度达 $0.5\times10^{-3}\,m/s^2$,它大于邻近的深海盆地异常值。除了长波正异常,还存有一些短波负异常,但后者小于前者。因而合成的结果体现为正异常。

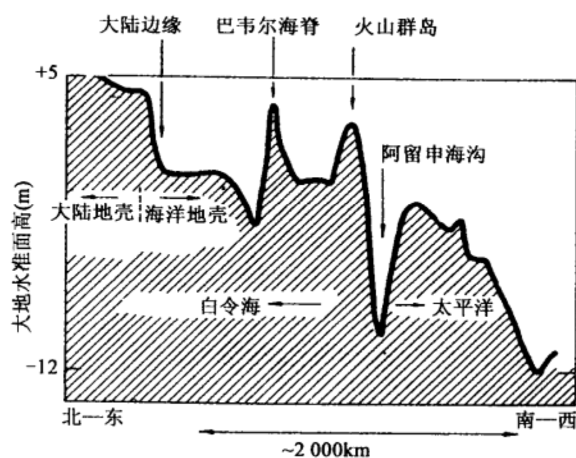


图 12.20　跨越白令海大陆边缘的大地水准面剖面图

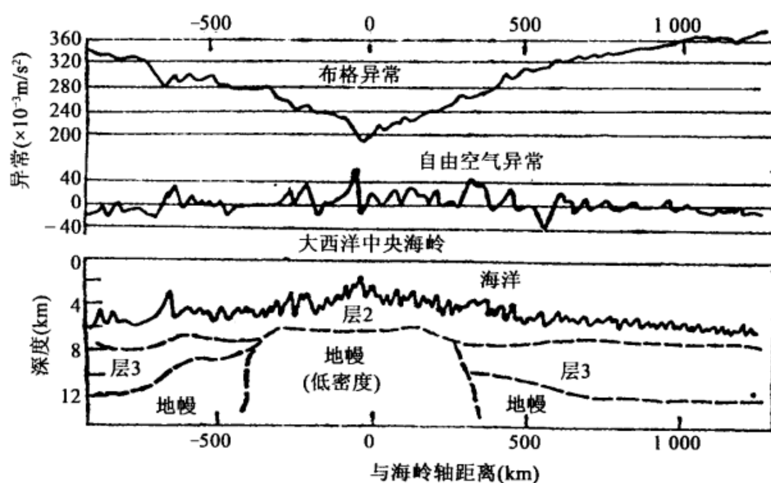


图 12.21　大西洋中央海岭处的重力异常

这种特点,也可以从卫星观测所得的空间异常图上看到。

总之,上述海岭与海沟的重力异常结果,有力地支持海岭隆起,其地幔物质密度低,海沟下陷(相应于板块下弯),其物质密度亦低的观点,而这些观点恰是海底扩张和板块构造学说的必然推论。因此,重力测量成为板块学说的另一重要支柱。顾功叙教授在 1980 年为《海洋重力学》一书的中译本代序中写道:“近年来板块构造学说的问世,是地球科学发展中的一个无可争辩的重大转折,其根据主要来自海洋,是大量海洋地球物理和海底地质观测结果的产物。今后海洋重力的观测研究,必将对这一学说的进一步完善和论证起到应有的作用。”

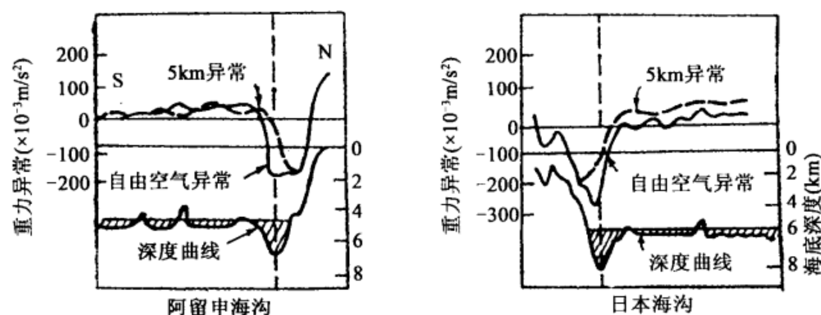


图 12.22 阿留申海沟和日本海沟的重力异常

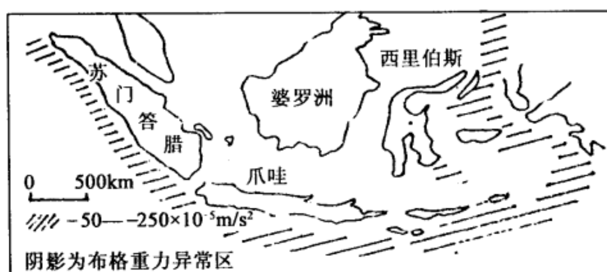


图 12.23 印尼岛弧的均衡负异常

12.5.5 均衡异常的解释

布格异常经过均衡改正(补偿改正),得到均衡异常。如果均衡异常很小,表明地壳基本上处于均衡状态。但是在地球上存在着许多均衡异常值大的地区。

大均衡异常的最显著实例是印度尼西亚群岛。沿着岛弧观测到一个均衡异常到 $-200\times10^{-5}m/s^2$ 的狭窄带(图 12.23)。根据列岛显示的褶皱作用和逆掩断层,维宁·曼尼兹(1958)认为,这些地区的地壳受强烈的横向压力。负异常意味着补偿不足,这部分未补偿的物质亏损,可能是较轻的地壳向下弯曲到较致密的地幔中。由均衡负异常提示的地壳向下弯曲,成为地球内存在横向压应力的重要证据。

较大的均衡异常的另一个显著实例是塞浦路斯岛。该地区具有非常大的正异常(图 12.24)。正异常显示地下物质过剩。因为有不同时代的基性岩,该岛地质情况相当复杂。其中,含有橄榄石的辉长岩露头,被认为是地幔物质进入地壳的监视"橱窗"。人们曾根据重力资料推断基性岩的分布和深度范围,并对地幔致密物质的上移模型作出推论。

总之,均衡异常(无论是正是负)或与地幔物质上移或与地壳强烈下弯有关。地幔物质上移需要动力,地壳下弯需要支撑,起因可能又与上地幔的物质对流和横向密度变化有关。因此,均衡异常往往需要结合地球深部(主要是地幔)的结构和运动进行解释。

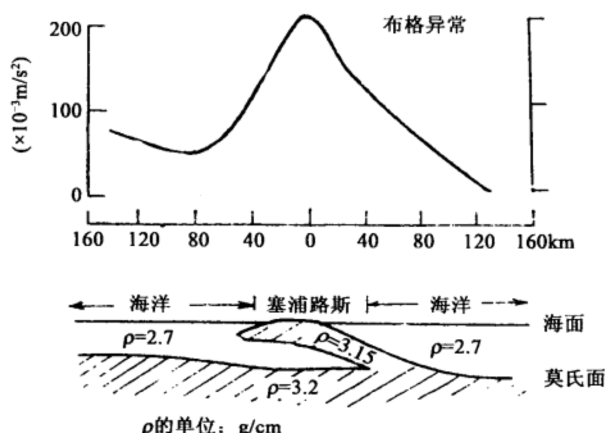


图 12.24 塞浦路斯岛的均衡正异常

12.5.6 重力与地幔对流的关系

对全球重力场模型的分析,其中很重要的一部分是地幔对流的结果。其结论有重要意义。因为板块构造运动假说仍然只是一个运动假说,其驱动机制尚不清楚。重力数据可对横向密度异常(它与对流有密切关系)施加约束,为对流模型提供一种独立的检验,最终这些观测结果可能对驱动机制的了解有所贡献。仅有的其他独立地球物理观测结果是地震波速和地表热流的横向变化,但这两种量都不能以和重力场相同的空间分辨率加以测量,而地表热流观测又被岩石圈大大地过滤了。为了建立实测重力场与地幔对流的关系,从 Pekeris(1935)的开创性工作开始,许多学者为此做出了努力,例如 Kaula(1972)研究过重力与板块构造活动之间的关系,指出板块的会聚带与正重力异常密切相关,对某些消减带尤其如此,但板块的分带则没有。Rumcorn(1964,1967)等曾尝试建立重力与对流模型的定量关系。他建立了重力位 ΔW 与整个地幔对流可能作用在岩石圈基底上的应力之间的简单关系,他的模型指出在某些板块边缘上是挤压的,而在某些洋脊上是拉张的,但其中的一个严重缺陷是假定岩石圈由于上地幔中横向温度变化或由于对流作用在岩石圈上的力而没有响应(即对流的响应中没有变形)。Mekenzie 等(1980)研究过重力与对流的平面形状之间的关系,并给出了根据二维地幔对流模型计算的海深、空间异常和大地水准面的剖面图(见图 12.25)。描述整个地幔对流(或仅限于上地幔对流)的数值和实验模型通常都显示出相当规则的平面图像。

Richter(1973)提出两种尺度的对流,一种是伴随着深部回流的大尺度板块运动,一种是仅限于软流圈的小尺度的对流。Richter 认为软流圈之上的板块运动可令小尺度的环流单元呈纵向转动,转轴平行于板块运动的方向。因此预期热流和海底地形会反映出这样一种图像:对流单元的上升冀高于平均热流,且海底逐渐升高。高热流区的重力根据来自海底变形的影响和来自对流单元内密度分布的影响不同,可为正也可为负。纵向对流转动的纵横比(横截面上垂直方向与水平方向之比)约为 1:1 的量级。若这种转动仅限于软流圈,则预期重力异常的波长为 500 ~ 1 000km。同时认为只有在快速运动的太平洋板块下面才会出现这种较小

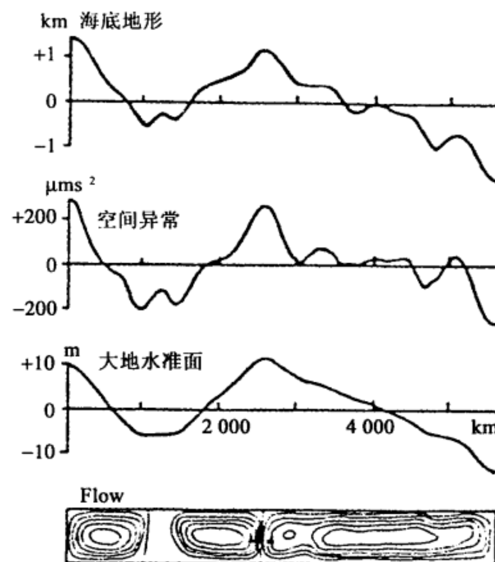


图 12.25　由二维地幔对流模型计算的海深、空间异常和大地水准面的剖面图

尺度的对流方式，而且即使在那里，这样的转动也不是软流圈稳定流（动）的特征。其他一些作者在其相关的研究中，研究了 Richter 所预期的上述次生流的图像，但未能得到令人信服的证据。

研究地幔对流的重力效应还涉及其他多种地球物理量，例如包括对流产生的热源密度异常（反差）及其重力效应、热流引起的地表变形及其重力效应。研究表明，这两种重力效应符号相反，反映在位系数的变化上，后者大于前者，因而预期热流与重力以及地形与重力之间的相关性是正的。此外，研究地幔对流机制还涉及地幔的粘滞度，Hager(1984)研究了这一问题，得出了在给定粘滞度的情况下，质量的沉降情况和大地水准面的形状，并指出当质量异常到达某个边界，超过此边界粘滞度时将急剧增加。此时上边界变形较小，下边界变形较大，总的效应是产生正的大地水准面异常。因此，异常的符号是粘滞度结构的函数，而且在原则上如果对内部密度反差有其他独立约束，就有可能根据全球重力场推算出地幔的粘滞度。

地幔对流的假说虽然被多数学者接受，但还很不成熟，以上是部分作者就地幔对流的相关重力效应研究结果的概要，其中涉及有关地幔对流理论模式的一些专用名词术语，在此假定读者已有相关地球动力学基础知识，对此可参阅有关大地构造学和地球动力学方面的教科书和文献。

第13章　大地测量反演理论与方法

认识地球动力学过程，描述这一系统运行的数学物理模型，一是要实时测定系统正在发生的各种过程的输出信号，采集能推演从古到今，特别是现今构造演变过程的记录信息；二是要探测地球内部介质分布及其物理化学特性的信息，借此建立地球构造的物理模型。只有在这两个方面取得了足够的进展，才有可能根据现有的地学理论和假说构造地球动力学模型及进行数值模拟。现代大地测量技术可实时测定现今地球动力学过程输出的力学信号，观测结果既记录了岩石圈对已知或未知动力作用的响应过程，对地壳或地幔的应变－流变性质提供外部约束，又可以用来对岩石圈内外部动力本身提供约束。地球深部构造模型主要由地球物理探测解决，但由于地球物理探测目前还不能很好地描述地球深部结构细节，而过程输出的力学信号是这些结构参数的函数，借助物理定律和某些理论假设可以建立这两者的力学方程和函数关系，因而大地测量反演（又称大地测量地球物理反演或地球物理大地测量反演）问题是一个可以同时包含动力学参数和介质物性参数的混合反演问题。大地测量反演问题是大地测量学科深入地学研究领域的核心问题。早期的大地测量反演局限于由重力异常观测结果反演地壳异常密度，以弹性位错理论为基础，根据地表常规大地测量形变观测资料反演地震震源参数。随着空间大地测量观测手段的不断发展，地表可观测覆盖面的扩大和精度的提高，研究对象由局部（如断层）扩展到地区（如板块）乃至全球。如何根据地表观测结果反演研究一般的地球动力学模式以及研究地震已成为一个十分重要的科学技术问题。本章主要阐述关于大地测量反演的基本理论与方法。

§13.1　大地测量反演问题的一般原理

大地测量反演，以大地测量观测为基础，结合地质、地震和地球物理资料，利用地球物理学建立的先验地球动力学模型，反推动力学模型参数，修正或提出新的地球动力学模型；也可以根据地表观测结果反演研究活动断层、活动块体的运动情况，探讨地壳运动与地震关系，进行地震、地质灾害的预测预报。地球物理反演理论的目的是根据观测数据求取相应的地球物理模型。大地测量反演与地球物理反演在本质上并没有区别，它也是根据观测数据（主要是大地测量数据）求取地球动力学（数学物理）模型。所以大地测量反演问题首先必须确定观测数据和地球模型（数学物理）参数之间的函数关系，由此可以根据给定的模型参数计算相应的观测数据，进行正演计算。也可以根据观测数据求取地球动力学模型的参数，实现反演分析。正演是反演的前提和条件，只有解决了正演计算，不管是靠解析的方法还是数值的方法，才能实现反演分析。在地球物理学中或地球物理大地测量学中，将观测数据和地球的物理模型参数联系起来的数学表达式叫数学物理模型。不同的地球物理问题或地球物理大地测量学问题，其数学物理模型是不同的，就是同一个地球物理问题或地球物理大地测量学问题，若观测方式不同，条件有变，其数学物理模型也不一样。虽然地球物理问题或地球物理大地测量学问题千

差万别，但把观测数据和物理模型参数联系起来的数学表达式却只有线性和非线性两大类。

如以 x 表示模型参数，y 表示观测数据，F 表示联系 x 和 y 的函数或泛函表达式，则满足

$$\begin{cases} F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) = y \\ F(\alpha x) = \alpha F(x) = y \end{cases} \tag{13.1}$$

两个条件时，称 F 为线性函数或线性泛函，其中 α 为常数。显然，不满足上式的函数或泛函就是非线性函数或非线性泛函。

不管是线性反演还是非线性反演，都涉及地球响应函数（或理论观测值）的计算。正演是反演的前提和条件，只有准确地计算出地球的响应函数，才能求得可靠的地球动力学模型。如果观测数据和地球动力学模型之间存在着确定的函数关系，具有解析表达式，则这种正演计算是不难实现的。但是如果观测数据和地球动力学模型之间不存在确定的函数关系，即不具有解析表达式，这时需要利用数值计算方法来实现正演计算。数值计算方法主要有有限单元法、样条函数拟合法、数值流形方法和积分方程等。

大地测量反演理论与地球物理反演理论一样，必须解决三大问题：

(1)解的适定性。包括解的存在性（即给定一组观测数据后，是否一定存在一个能拟合观测数据的解或模型）、惟一性（即能拟合观测数据的模型是惟一的，还是非惟一的）及稳定性（即反演问题中的数据稍有变化时其解是否会发生大的变化）。

(2)反演问题的求解方法。由于实际问题的复杂性，有时尽管作过解的存在性与唯一性的验证，但并不等于就有了求解的方法。许多问题都是通过反复的实践与演变，才最终建立起比较完整的理论的。

(3)反演问题的解的评价。研究解的评价的一系列准则及折中原则，没有给出解的评价的反演理论是不完全的，它也不同于一般正演问题的误差分析，而是在反演理论中提取真实模型的地球动力学信息的重要工具。

§13.2 大地测量反演问题的适定性讨论

大地测量反演问题中，对于容许的数据 d 的每一个集合，若问题的解 m 存在且惟一，且解连续依赖于 d，这时，大地测量反演问题称为适定问题，或说其解是适定的；部分不满足或全部不满足上述条件的问题称做不适定问题。

在实际的大地测量反演问题中，观测数据存在误差，在实际使用的计算机中，数的位数也是有限的，其指数传播的误差就可造成算法的不稳定性。如此诸多原因的每一个方面，都可能造成问题的实际物理内容的确定存在性与相应数学问题的不适定性之间的明显的矛盾。为使问题得以解决，只有对问题的解加上适当的附加条件，使问题成为适定的。我们不能强求反演问题的精确解，而应去寻求那种满足方程但近似满足定解条件，或近似满足方程但精确满足定解条件，或两者都近似满足的解。很明显，此时的解不是惟一的。于是，在数学上面临的问题是在“条件适定”概念下求解不适定问题。

对于大地测量反演问题，有

$$\underset{M\times 1}{d} = \underset{M\times N}{G}\ \underset{N\times 1}{m} \tag{13.2}$$

其中 d 是 $M\times 1$ 维向量，G 是 $M\times N$ 阶向量，m 是 $N\times 1$ 维向量。对于式(13.2)有以下4种情况：

(1)当 $M=N=r$，且 G^{-1} 存在时，方程(13.2)有惟一解，这里 r 是矩阵 G 的秩，而 G^{-1} 表示

矩阵 G 的凯利逆。

(2)当 $M>N=r$ 时,方程(13.2)是超定方程,无常规意义下的解,但有最小方差解。

(3)当 $N>M=r$ 时,方程(13.2)是欠定方程,无常规意义下的解,但有 $|m|=\min$ 意义下的最小长度解。

(4)当 $\min(M,N)>r$ 时,方程(13.2)表示一个混定方程,此时,只有同时在两种限制条件(即最小方差和模型最小长度条件)限制之下,方程才有解。

这里讲的方差和模型长度都是在 L_2 范数意义下的欧几里得空间的长度。当然,也可以在其他测度(如 L_1,L_p)为最小的意义下求解。测度定义不同,对模型参数和观测数据加权方式不同,就会派生出各种不同的反演方法。

解的非惟一性是大地测量反演中最重要问题之一。为说明解的非惟一性,考虑零向量和零空间的概念。若线性反问题 $Gm=d$ 有两个解 m_1 和 m_2,即其解是非惟一的,则有

$$Gm_1 = d \tag{13.3}$$

$$Gm_2 = d \tag{13.4}$$

两个方程相减,得

$$G(m_1 - m_2) = 0 \tag{13.5}$$

因为假定这两个解是完全不同的,所以它们的差 $m^{\text{null}}=m_1-m_2$ 是非零的,而称矢量 m^{null} 为零矢量。而有零矢量组成的空间称为零空间。可以证明,任何具有零矢量的线性反演问题的解都是非惟一的。如果 m^p 是 $Gm=d$ 的一个非零解,则 $m^p+\alpha m^{\text{null}}$ 也是一个非零解。其中 α 是一个不为零的任意常数。若给定的线性问题有 n 个独立的零矢量,则其一般解为

$$m^g = m^p + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i^{\text{null}} \tag{13.6}$$

由此看出,反演一组观测数据,就是求一个 m^p,而 m^{null} 中的任意一个都可以加到 m^p 上而仍然拟合观测数据,使解变得非惟一。

关于解的稳定性,需要用数学摄动理论。设数据在定义域 D 上的数值是 x,需要计算的数学问题为 $f(x)$,实际上我们只能知道数据的近似值 x^0,也就是说只能计算 $f(x^0)$。若 x^0 接近于 x,且 $f(x^0)$ 也与 $f(x)$ 相接近,那么,问题是良态的即稳定的。但若此时 $f(x^0)$ 与 $f(x)$ 相差甚大,即问题对数据的摄动很敏感,则问题是病态的,即不稳定。这时用 x^0 去求解它,不管用什么算法。其解总是不精确的。

同时,为了求问题的解必定要选择某种确定的算法。在数学上相当于定义一个新的函数 f^0,使对已知数据 x 产生一个近似解 $f^0(x)$。若 x^0 接近于 x,这种算法使得 $f(x^0)$ 接近于 $f^0(x)$,那么,对于良态问题($f(x^0)$ 与 $f(x)$ 相近)表示这个算法能使计算解(即近似解)接近于精确解,具有这种性质的算法是数值稳定的。反之,若算法是不稳定的,那么即使问题是良态的,计算解与精确解也会相差很大。这告诉我们,在反问题的实际计算时,仅涉及问题的性态还不够,还需要讨论实际算法的数值稳定性。

§13.3 大地测量线性反演问题及其解

线性反演理论是反演问题中应用最广、研究最为成熟的内容。实际的大地测量反演问题多是非线性的,仍可用线性反演方法来解,关键是对非线性问题线性化。线性化的常用方法有两种,一是参数代换法,另一为 Taylor 级数展开法(傅淑芳等,1998)。

通过参数置换将非线性方程线性化的方法称为参数代换法，而 Taylor 级数展开法是指：对问题给定一个初始模型 m_0，它与真实模型差异不大，则将模型函数在 m_0 处按 Taylor 级数展开，取一次项，使方程变换为线性方程。

求解线性反演问题的最简单方法是以长度的度量为基础的。对于一观测数据 d，有 $d = Gm$，假设其预测误差为 $e_i = d_i^{obs} - d_i^{pre}$，令总误差 E 是各单个误差 e_i 的平方和，即 $E = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$，或者说总误差 E 是矢量 $e(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的欧几里得长度之平方。取总误差 E 极小值求解反演问题，即是以估计数据 d^{est} 的长度的某一特定值为度量来解反问题，这也就是我们经常所说的最小二乘法，也叫 L_2 范数极小解。测量长度有不同的度量，如 L_1 范数、L_p 范数等。长度定义不同，其解的含义也就不同。

13.3.1 纯欠定问题的最小长度解(傅淑芳等，1998)

对于纯欠定问题，由于信息不足，反演问题可以有无限多个使预测误差为零的解。为克服这种不适定性的困难，从无限多个解中挑出惟一解，必须给问题附加一些在模型中未包含的信息，以约束所容许的解，此附加的信息称为先验信息，或称先验条件。它不依赖于实际数据，其种类和附加的形式可以多种多样，由此而求得的解也必然是千差万别的。有时也可求不依赖于先验信息的“平均”解，但它的意义总不如解估值那样直观明白。为求得反问题的惟一解，给出的先验条件的正确性是头等重要的。

我们给出一类简单的先验信息，即以欧几里得长度 $L = m^T m = \sum_{i=1}^{N} m_i^2$ 作为解的度量，此也称为第一类先验假设－紧约束。取长度 L 的 L_2 范数极小作为准则求解。这个准则有简单的物理意义，符合物理系统处于稳定状态的情况。此时，约束使从无限多个预测误差为零中得到惟一的解估值，这就是熟知的约束极值问题。反演问题可以这样提出：求在 $e = d - Gm = 0$ 的约束下使 $L = m^T m = \sum m_i^2$ 极小的解估值 m^{est}。可用拉格朗日乘子法将 L 的条件(约束)极值问题化为无条件极值问题来解。

引入目标函数 Φ，它的形式为

$$\Phi(m) = L + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{N} m_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (d_i - \sum_{j=1}^{N} G_{ij} m_j) \tag{13.7}$$

使函数 $\Phi(m)$ 对 m 取极小，其中的 λ_i 是拉格朗日乘子，记 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N)^T$，则 $\Phi(m)$ 又可写成

$$\Phi(m) = m^T m + \lambda^T e = m^T m + \lambda^T (d - Gm)$$

并有

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m^T} = 2m - G^T \lambda = 0$$

得

$$\lambda = 2(GG^T)^{-1} d$$

最后得到

$$m^{est} = G^T (GG^T)^{-1} d \tag{13.8}$$

(13.8)式即为反演问题的最小长度解。

13.3.2 混定问题的阻尼最小二乘解(傅淑芳等,1998)

在许多实际的反问题中,往往既不会是完全超定的,也不会是纯欠定的。当 $N > M$ 时,有可能有某种程度的欠定;当 $N < M$ 时,又有可能有某种程度的超定,此为混定问题。

混定问题的较好的解法是将未知的模型参数分为超定的与欠定的两组,分别在最小二乘解及最小长度的准则下求解,但这一划分比较费时,这里不作讨论。当反问题不太欠定时,可试验用近似的方法。

这种方法不去划分模型参数 m,而假设对模型参数确定一个由预测误差和解长度线性组合的函数,取此组合函数的 L_2 范数极小作为准则求解。为此,作目标函数

$$\Phi(m) = E + \varepsilon^2 L = e^{\mathrm{T}} e + \varepsilon^2 m^{\mathrm{T}} m \tag{13.9a}$$

式中:ε^2 为加权因子,或称阻尼系数,用它来确定预测误差和解长度的相对重要性。进一步,目标函数又可写成

$$\begin{aligned}\Phi(m) &= e^{\mathrm{T}} e + \varepsilon^2 m^{\mathrm{T}} m = (Gm - d)^{\mathrm{T}}(Gm - d) + \varepsilon^2 m^{\mathrm{T}} m \\ &= m^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} G m - 2m^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} d + d^{\mathrm{T}} d + \varepsilon^2 m^{\mathrm{T}} m\end{aligned} \tag{13.9b}$$

利用$\dfrac{\partial \Phi}{\partial m^{\mathrm{T}}} = 0$,得

$$m^{\mathrm{est}} = (G^{\mathrm{T}} G + \varepsilon^2 I)^{-1} G^{\mathrm{T}} d \tag{13.10}$$

(13.10)式即为反演问题的阻尼最小二乘解。

13.3.3 等式约束或不等式约束的反演问题(傅淑芳等,1998)

通常这是一类线性限制条件。例如,要求模型参数的算术平均值必须等于某一值 c,即 $m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_N = c$,可写成如下形式:

$$Fm = \frac{1}{N}(1, 1, \cdots, 1)\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} = c \tag{13.11}$$

式中:矩阵 F 只有一行,矩阵 c 只有一个元素 c,此称为等式约束(条件约束),等式约束不仅可以推广到多个条件约束,还可以推广到以下不等式约束。

$Fm \geqslant c$ 则为线性不等式约束。这一类约束用于必须使 m_i 为正值或当需要某些边界条件的情况。

这类线性约束要求反问题精确满足,故也称为第一类先验假设(紧约束)。对于超定问题,在最小二乘意义下,等式约束可提高解的精度。

实现等式约束的一种方法是用拉格朗日乘子法,即求反问题 $Gm = d$ 在 k 个约束 $Fm - c = 0$ 下使 $E = e^{\mathrm{T}} e$ 极小的解。引入目标函数

$$\begin{aligned}\Phi(m) &= e^{\mathrm{T}} e + 2\lambda^{\mathrm{T}}(Fm - c) \\ &= (Gm - d)^{\mathrm{T}}(Gm - d) + 2\lambda^{\mathrm{T}}(Fm - c)\end{aligned} \tag{13.12}$$

式中:$\lambda^{\mathrm{T}} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ 为拉格朗日乘子,由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial m^{\mathrm{T}}} = 2G^{\mathrm{T}}Gm + 2F^{\mathrm{T}}\lambda - 2G^{\mathrm{T}}d = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda^{\mathrm{T}}} = 2(Fm - c) = 0 \end{cases} \tag{13.13a}$$

可得

$$\begin{cases} G^{\mathrm{T}}Gm + F^{\mathrm{T}}\lambda = G^{\mathrm{T}}d \\ Fm = c \end{cases} \tag{13.13b}$$

因此可得

$$\begin{pmatrix} m \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{\mathrm{T}}G & F^{\mathrm{T}} \\ F & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G^{\mathrm{T}}d \\ c \end{pmatrix} \tag{13.14}$$

对于线性不等式约束,反演问题可演变成一个线性规划问题,一般采用 L_1 范数求解。

§ 13.4 L_1 模反问题和线性规划

线性规划(Linear Programming)简称 LP,是一种求条件极值的方法。线性规划问题指的是,在约束

$$Ax\begin{bmatrix} \geqslant \\ = \\ \leqslant \end{bmatrix}b \quad 及\ x \geqslant 0 \tag{13.15}$$

的条件下求使得 $\Phi = C^{\mathrm{T}}x$ 取极小的解估计。在管理学中,Φ 表示一个生产多种产品的工厂可实现的总利润,而每一种产品的产量用 x 表示,它的利润用 c 表示;约束条件表示劳动力及机械设备能力的限制,以及产量只能是正值。

在大地测量地球物理反问题中,如果它被归纳为欠定的线性方程组 $Gm = d$,而模型本身是一个变量 u 的函数 $m(u)$,则在连续情况模型的 L_1 模可表达为

$$L = \| m \|_1 = \int_a^b | m(u) | \mathrm{d}u \tag{13.16}$$

把区间(a,b)离散化,则模型的离散 L_1 模表示为

$$L = \sum_{j=1}^{J} | m_j | r_j \tag{13.17}$$

其中:$r_j = u_j - u_{j-1}$,在约束条件

$$\sum_{j=1}^{J} G_{ij}m_j = d_i, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{13.18}$$

之下求使 L_1 极小或负 L 极大的模型参数 $m^{\mathrm{T}} = (m_1, m_2, \cdots, m_J)$的问题便化为线性规划问题,即式(13.15)。

如果观测数据是带误差的,而且误差 δd_i 可以估计,则约束条件(13.18)又可以化为不等式的形式:

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{J} G_{ij} m_j \leqslant d_i + \delta d_i \\
-\sum_{j=1}^{J} G_{ij} m_j \geqslant -\delta d_i - d_i
\end{cases}
\tag{13.19}
$$

在用线性规划方法求 L_1 模及问题的解估计时还必须注意以下技术问题。

13.4.1 权函数

在式(13.17)中,不同的 $|m_j|$ 可能相差很大,绝对值小的 $|m_j|$ 或 r_j 对目标函数的贡献很小,对它们的估定值的分辨率相应较低,因此可以给它加较大的权,使它在目标函数中占有一定的位置。一般来说,设权函数离散化为序列 $\{W_j\}$, $j=1,2,\cdots,J$,则我们可用下式代替式(13.17)作最小化:

$$
L = \sum_{j=1}^{J} W_j r_j \mid m_j \mid \tag{13.20}
$$

若用标准差加权时,可取 $W_j = \sigma_{mj}^{-1}$。

13.4.2 在用单纯形法解线性规划问题时要求 m_j 全取正值

当模型参数 m_j 在物理上可正可负时,可以把它设为两个正变量之差:

$$
m_j = p_j - q_j \tag{13.21}
$$

其中:$p_j \geqslant 0, q_j \geqslant 0$。

相应地,目标函数变为

$$
L = \sum_{j=1}^{J} W_j r_j (p_j + q_j) \tag{13.22}
$$

相应约束条件也由式(13.21)代入式(13.18)得到,用线性规划法求出两个向量 p 和 q 之后再由式(13.21)得到模型 m。当然,这时计算工作量要增加数倍。

13.4.3 约束条件的灵活性

除了观测数据之外,在用线性规划法求解时加入新的约束条件是很方便的。例如,我们知道地球物质密度一般在 $0\sim10\text{g/cm}^3$,把类似的模型的上下界作为新的约束,常常可以提高解估计的质量。这种约束的形式为:

$$
\begin{cases}
m_j \leqslant m_j^{+} \\
-m_j \leqslant -m_j^{-}
\end{cases}
\tag{13.23}
$$

式中:m^{+} 和 m^{-} 表示上界和下界,把式(13.23)加到式(13.18)或式(13.19)的约束之中,可以增加 $2J$ 个约束不等式。除了式(13.23)形式的约束之外,还可以有以下线性组合形式的约束(如用于均值作约束)。

$$
\alpha_0 \leqslant \sum_{j=1}^{J} \beta_j m_j \leqslant \alpha_1 \tag{13.24}
$$

线性规划算法的优点之一就是约束条件的加入十分方便。把人们对地球或地下构造的先验知识以各种约束条件表示出来,然后应用线性规划反演可以提高解估计的质量。L_1 模反演的另一个优点是具有较大的韧性,即少数坏数据的存在对解估计质量的影响较小。

下面说明线性规划的算法问题。从几何的角度看,式(13.18)中的每一个等约束条件都

表示了 n 维空间中的一个超平面，因此式(13.19)中 $2n$ 个不等式约束表示了 n 维空间中的一个凸的超多边形，而满足式(13.19)约束条件的解 m 作为 n 维空间的点必定位于此凸多边形上或体内。然而，在式(13.17)中规定 m 的目标函数 L 必须取极小(或负 L 取极大)，说明 m 必定位于此凸多边形的顶点上。用式(13.17)计算每一个顶点上相应 m 的目标函数，并挑出其中最小的一个顶点，它就是线性规划问题的最佳可行解估计。由此可见，线性规划算法的步骤可分为三步：首先由约束条件解出凸多边形的顶点；然后，计算每个顶点上的目标函数；最后找出目标函数取极大或极小顶点。如果目标函数取极值的顶点不止一个，则说明线性规划问题没有惟一解，相连这些顶点之间边上的所有点都是问题的最佳可行解。但是，如果约束条件相互矛盾，它在 n 维空间对应的多边形便不是凸的或者不封闭，此时用线性规划算法得不到最佳可行解。

上述分三步的算法是可以用来求解的，然而当约束很多时计算速度极其缓慢。因为顶点数目很多，要避免计算所有的顶点，最常用的一种方法是单纯形法(Simplex Method)。

单纯形法的计算可分为以下四步：

(1)任选一个角点作始点，每个角点都与 n 条边相连。

(2)在这个角点找一条边，沿这条边上目标函数 $L(m)$ 应该逐渐减小(对于求极大的问题目标函数沿此边增大)。如果找不到这样的一条边，则在这个角点目标函数已经达到最小。此角点即为最优解。反之则做第(3)步。

(3)沿着找出的边找下一角点，然后重复第(2)步中的找边过程。此时，我们不可能返回原先的角点上去，因为目标函数在每一步都是减小的。

(4)在重复(2)~(3)步时，如果找不到一个角点沿其连接的边目标函数还可减少，则此角点 m 即为线性规划问题的解。

在具体计算时，单纯形法对式(13.19)中的每一个约束定义一个松弛变量 $\omega_j \geqslant 0, j=1,\cdots,2J$，使这个不等式变为等式。例如，松弛变量 ω_1 把

$$G_{11}m_1 + G_{12}m_2 + \cdots + G_{1n}m_n \leqslant b_1 \tag{13.25}$$

变为

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \omega_1 = b,\ \omega_1 \geqslant 0 \tag{13.26}$$

而松弛变量本身也是未知数。于是，由式(13.17)和式(13.19)的上述转化就组成了求解$(n+2J)$个方程组成的新方程

$$Ax = b \tag{13.27}$$

其中：A 为 $2J\times(n+2J)$ 阶矩阵；x 为 $(n+2J)$ 维向量，包含了 m_j 和 ω_j。线性规划问题就变成求解这个欠定方程组。

§13.5 非线性反演问题及其解

线性反演是一种理论最完整、应用最广泛而且效果也很理想的反演方法。然而，大多数大地测量地球物理问题都是非线性问题，因此必须研究非线性反演方法。

随着现代大地测量学和地球物理学的发展，近年来非线性反演法得到了迅速的发展。除了梯度法、尝试法(试凑法)、蒙特卡洛法(蒙特卡罗法)等一些传统的非线性反演法外，许多新的反演方法(如人工神经网络法、模拟退火法、遗传算法、小波分析法、区间算法等)便应运而生。随着计算技术的日新月异，特别是并行机的出现，需要大量计算时间的非线性反演法才如

鱼得水，有了迅速发展的前提条件。

所谓非线性问题，是指观测数据 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和模型参数 $m_j(j=1,2,\cdots,k)$ 之间不存在线性关系。这种非线性关系既可能呈显式 $d=g(m)$，也可能呈隐式 $F(d,m)=0$。

解决这类非线性问题的方法有如下两类：一类属于线性化的方法，即将非线性问题线性化，构成一种迭代的模式，用逐次逼近的方法求解；另一类是不涉及非线性问题线性化，通过各种途径直接解非线性问题，实现从数据空间到模型空间的映射。

不管是哪一类的反演问题，归根结底，反演过程都是一个对目标函数（或概率、概率密度）的最优化过程，只是实现最优的途径和方法不同。

13.5.1 非线性问题的迭代线性化反演

对于一个非线性问题，从本质上来讲，从有限个数据不可能求出 $F(d,m)=0$ 的惟一解，只能求在某种准则之下的 $F(d,m)=0$ 的一种逼近，即解估计。

通常令

$$F(x) = F(d,m) = \begin{bmatrix} F_1(d,m) \\ F_2(d,m) \\ \vdots \\ F_N(d,m) \end{bmatrix} \tag{13.28}$$

如将这些非线性函数构成如下目标函数：

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{N} [F_i(x)]^2 \tag{13.29}$$

则 $\Phi(x)$ 的零极小值点就是 $F(d,m)=0$ 的解。

由于 F 为非线性算子，求解估计的过程可分解为一系列线性逼近的过程，即迭代计算过程。而在每一迭代步都用线性化方法将式(13.29)化为线性泛函求解，实行线性化的基础是泛函微分。

常见的非线性问题的迭代线性化反演方法有梯度法、贝叶斯方法等。

13.5.1.1 梯度法（王家映，1998）

梯度法又称最速下降法或最速上升法，是一种传统的非线性反演法（王家映，1998）。对于式(13.29)，在多维空间中 $\Phi(x)$ 函数构成一个高次曲面。以二维空间为例，$\Phi(x_1,x_2)$ 所形成的曲面与 x_1-x_2 平面相切的点就是它的零极小值点（见图 13.1）。

如果用 $\Phi(x)=c_i(i=1,2,\cdots,k)$，这里 c_i 是常数，它相当于一系列平行于 x_1-x_2 的平面。用这些平行平面切空间曲面 $\Phi(x)=\Phi(x_1,x_2)$，可以得到一簇平面曲线。将它们投影到 x_1-x_2 平面上，如图 13.2 所示，称为曲面的等高线簇，且每一条线上的 Φ 值均相同，由外向里，Φ 值不断下降；当达到极小点时，Φ 值为零。

在任意一个初始模型 x^0 处等高线的法线方向，就是 $\Phi(x)$ 函数在该点处的梯度方向，即有

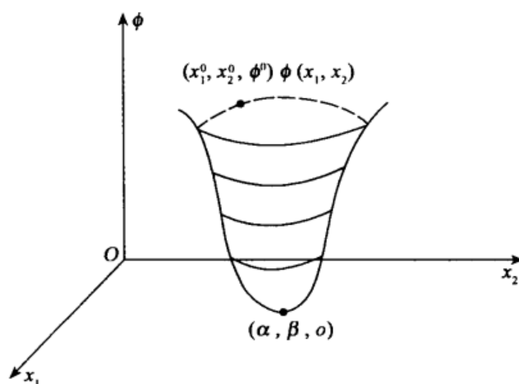


图 13.1　目标函数示意图(引自王家映,1998)

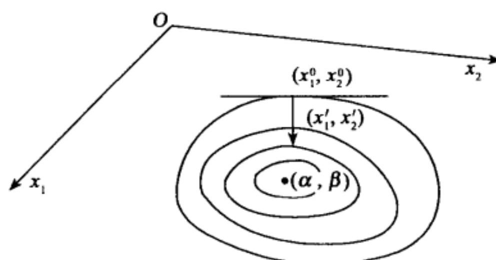


图 13.2　用等高线表示的目标函数图(引自王家映,1998)

$$\bar{g} = \begin{bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \\ \vdots \\ \bar{g}_p \end{bmatrix} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_p} \end{bmatrix} \tag{13.30}$$

沿 $\bar{g}$ 的方向是 Φ 值上升最快的方向。因此,其反方向为

$$-\bar{g} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{13.31}$$

此式就是 Φ 值下降最快的方向。

从上述分析可以看出,梯度法就是从一个初始模型出发,沿负梯度方向搜索求取 Φ 函数极小点的一种最优化方法。

为保证在校正过程中,Φ 函数逐次下降,现选择

$$x^{i+1} = x^i - \lambda \bar{g}^i = x^i + \Delta x^i \quad (i = 0, 1, 2, \cdots) \tag{13.32}$$

式中:x^i 表示第 i 次迭代之初始值;x^{i+1}表示校正后的模型参数向量;Δx^i 是校正量;λ 是校正的步长因子。

当第 i 次迭代后，再从 x^{i+1} 出发，沿 $\Phi(x^{i+1})$ 的负梯度方向进行搜索，如此反复迭代，直至到达 $\Phi(x)$ 函数的真正极小点为止。

步长因子的选择可按如下方法进行，将 $\Phi(x^{i+1})$ 按台劳级数展开，并略去高次项，得

$$\Phi(x^{i+1}) = \Phi(x^i) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \Phi(x^{i+1})}{\partial x_j} \Delta x_j^i = \Phi(x^i) + \bar{g}^{i\mathrm{T}} \Delta x^i \tag{13.33}$$

其中：$p = M + N$ 是观测数据的个数 M 和未知参数的个数 N 之和。将式(13.32)中的 $\Delta x^i = -\lambda \bar{g}^i$ 代入式(13.33)，则得

$$\Phi(x^{i+1}) = \Phi(x^i) - \lambda \bar{g}^{i\mathrm{T}} \bar{g}^i \tag{13.34}$$

设 $\Phi(x^{i+1}) = 0$，亦即经校正后使 Φ 值达到了零极小值，则从式(13.34)知

$$\lambda = \frac{\Phi(x^i)}{\bar{g}^{i\mathrm{T}} \bar{g}^i} = \frac{\Phi(x^i)}{\sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial \Phi(x^i)}{\partial x_j} \right)^2} \tag{13.35}$$

将按式(13.35)计算的 λ 代入式(13.32)后，如果

$$\Phi(x^{i+1}) < \Phi(x^i) \tag{13.36}$$

成立，说明校正方向无误，则可继续进行迭代；否则，就减小 λ。例如每次减小一半，重复上述步骤，直至满足式(13.36)为止。然后，从 x^{i+1} 出发，重复上述过程，直至求得 Φ 值的零极小值为止。

一般来说，从任意初始模型出发，梯度法都能收敛。开始收敛速度快，往后越来越慢，尤其是在零极小值附近，要向极小点前进一步，都必须付出较大的代价。实际应用过程中，常与其他方法配合一起应用，如同牛顿法配合，两种方法相互取长补短，以达到迭代速度快、收敛好的目的。

一旦求出 $\Phi(x) = 0$ 的极小点，那么，相应的向量 x 就是其隐函数 $F(d, m)$ 的解。根据式(13.28)，不难求得模型参数 m。

如观测数据 d 与模型 m 之间呈显函数时，可把目标函数设计为

$$\Phi = [d - g(m)]^{\mathrm{T}} [d - g(m)] \tag{13.37}$$

此后的做法和以上隐函数求解方法完全相同。然而，此时求出的只是待求模型 m，而不是隐函数时的 $x = (d, m)$。

13.5.1.2 轮回搜索—贝叶斯法

贝叶斯方法是反演问题中常用的一种算法，它是一种顾及被估参数的先验信息，属于用线性化迭代方法解决非线性问题，使得被估参数后验概率最大的一种估计方法。

假设 y 和 x 分别是 n 维观测值向量和 m 维模型参数向量，d 和 e 分别是 n 维观测值误差向量和 m 维模型参数误差向量，定义误差向量服从高斯正态分布且其协方差矩阵分别为 D 和 E，则可建立如下的误差方程

$$y = f(x) + d \tag{13.38}$$

其中：$f(x)$ 是 n 维 x 的非线性函数。设 x^0 是 x 的先验估计值，则先验信息可表示如下：

$$x^0 = x + e \tag{13.39}$$

根据贝叶斯理论，有

$$p(x \mid y) = c\exp\left[-\frac{1}{2} s(x) \right] \tag{13.40}$$

$$s(x) = d^{T}D^{-1}d + e^{T}E^{-1}e \tag{13.41}$$

要想得到 x 的最大似然估计值，就是要条件概率密度 $p(x|y)$ 最小，也就是使二次式 $s(x)$ 最小，因此可得到如下的基本等式

$$A^{T}D^{-1}d + E^{-1}e = 0 \tag{13.42}$$

式中：d、e 和 A 都是 x 的函数，将式(13.38)在模型起始值 x_k 处作泰勒展开，去掉高次项，非线性等式变成线性等式可以用迭代法解算。一个简单的迭代算法如下：

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k M_k^{-1}\gamma_k,\ 0 < \alpha_k \leqslant 1 \tag{13.43a}$$

$$M_k = A_k^{T}D^{-1}A_k + E^{-1} \tag{13.43b}$$

$$\gamma_k = A_k^{T}D^{-1}[y - f(x_k)] - E^{-1}[x^0 - x_k] \tag{13.43c}$$

这里，α_k 是用来调节改正向量的长度，γ_k 用来判断迭代的收敛程度，在这里给定其一个临界点 γ，则终值 $\hat{x}$ 可以定义为如下：

$$\hat{x} = x_k \quad 当且仅当\ \|\gamma_k\|^2 < \gamma \tag{13.44}$$

估计值 $\hat{x}$ 的误差的渐近协方差阵为

$$C = (A^{T}D^{-1}A + E^{-1})^{-1} \tag{13.45}$$

如果函数 $f(x)$ 在最终值 $\hat{x}$ 的可信度范围内非常接近线性化，则上式将给出一个良好的协方差阵，从而使结果达到非常满意的程度。贝叶斯方法由于它能顾及参数的先验性，具有简单、快速迭代收敛等优点。但是有时我们不可能获得比较好的先验值，譬如在利用位错模型反演断层参数时，由于对断层的深度、位错量了解不够，此时如果直接利用上式反演断层参数，则有可能能在迭代过程中得不到收敛的解。

轮回搜索法(陈绍绪等，2000)对参数初始值要求不高，不需要将非线性方程线性化，参数搜索范围大，但用这种方法算得的结果有可能是局部最优解，而不是全局最优。若将轮回搜索法得出的反演参数作为贝叶斯方法的先验信息，则可以很好地解决先验信息不明确情况下的反演问题。

设一反演问题用 $y=f(x)$ 表示，用 U 代表观测值，x 表示参数，$\pm X$ 表示参数的上下限(用以控制断层参数，防止其无限发散)，可以利用函数最小化来求得反演解，要使反演的解具有如下形式：

$$\rho(x) = \min\sum_{i=1}^{n}[U_i - f_i(x)]^2 \tag{13.46}$$

其中，n 代表观测个数，U_i 表示第 i 点的观测值，$f_i(x)$ 为第 i 点的理论观测值。轮回搜索法的基本原理是：

(1) 首先选定 m 个参数的初值 x^0，计算出其函数值 $\rho(x^0)$，然后固定其中 $m-1$ 个参数，t 用来控制函数单调递减的方向，再选定一个步长 b，$0<b<1$，对余下一个未固定的参数 x_1，令

$$x_1^{(i+1)} = x_1^{(i)} + tb \tag{13.47}$$

进行逐步尝试，使得每一次 $\rho(x^{(i+1)}) < \rho(x^{(i)})$，如果不是，则更改 t，通过令 t 等于 $+1$ 或 -1 而达到控制其保持单调递减，但要保持递减的函数在 $\pm X$ 范围内。如果达到底限，则令 x_1 为其限值，否则直到目标函数 $\rho(x)$ 达到最小为止。将其固定，得到第一个函数尝试值。

(2) 再对第二个参数 x_2 进行第一步同样的尝试，以此类推，直到最后一个参数为止。此时完成一个大的轮回搜索。

(3) 将此 m 个参数固定，设置其为初值，再重复(1)～(3)的步骤，反复轮回搜索，直到改变任何一个参数都不能使 $\rho(x)$ 再下降为止。此时，可得到函数参数最终的优化值。每一次轮

回过程都使每个参数得到优化。为了使结果更精确,每一轮回后可以适当缩小步长 b。最后的结果即可认为是满足式(13.46)的最佳结果。同时,定义目标函数的拟合误差如下:

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\rho(x)}{n-1}} \tag{13.48}$$

利用轮回搜索法进行反演不需要将非线性方程进行线性化,同时它对参数的初始值要求不高,搜索范围大。因此,此方法特别适合于那些先验信息不足的情况的反演问题,如隐伏断层参数的反演等。但是用这种方法反演算得的结果有可能是局部最优解,而不是全局最优值,盲目性比较大。

鉴于上述两种方法的特点,我们在进行实际反演时可以吸取两者的优点,即对先验信息不足的问题,首先用轮回搜索法作初步尝试,从大范围搜索比较合适的参数值,以此作为贝叶斯逼近法的先验数据,再用贝叶斯进行反演。该方法称为轮回搜索—贝叶斯法(许才军,李志才,2003),轮回搜索—贝叶斯法可解决在某些测区先验信息不足条件下反演的难题。

13.5.2 试凑法(尝试法)

对于模型 $d=g(m)$,所谓试凑法就是从一个初始模型 m_0 出发计算 $g(m_0)$,并且把它与实际观测值 d_{obs} 进行比较。然后,从已知的物理知识和先验信息出发,猜测另一个新的模型 m_1 来拟合观测数据 d_{obs},致使 m_1 比 m_0 拟合得更好。重复上述步骤,直到后续模型之理论值与观测值的方差不再减小或减小拟合误差十分缓慢至符合要求时为止。

用试凑法时,拟合好坏可以有不同的定义,如用基于 $L_1, L_2, \cdots, L_\infty$ 范数的目标函数等。当然,拟合好坏也可以靠定性估计(王家映,1998)。

通常,试凑法可在计算机终端上通过人机对话来实现。在迭代过程中,解释人员可以从屏幕上直接观察到曲线拟合的好坏,了解到参数是否符合已知的先验信息。试凑法的主要优点是:

(1)不需解决更多的数字问题。

(2)不需有较大的内存。

(3)可以设置衡量观测数据拟合好坏不同的目标函数。

(4)由于采用人机对话,整个过程极为直观。

其不足之处是,对参数较多的反演问题计算时间长,迭代次数多,且难以操作。通常试凑法只对那些对反演问题的解有先验知识、对待求模型的参数不多的情况才适宜。

13.5.3 蒙特卡罗法

多数非线性反演方法都需要充分显示模型空间,进行大量计算,才可能找到比较合理的解。但由于计算工作量太大,因而往往难以实现。

如果问题的非线性并非十分严重,模型参数较少,目标函数仅有单个极小,这类反演问题可用梯度法等求解。对于高次非线性函数,模型参数较多,且目标函数有多个极小的情况而言,用诸如梯度法等简单非线性反演方法,有着巨大的危险性。这时,在反演的过程中容易陷入局部极小。有戏剧性的是,如果我们随机地在模型空间中选择模型以求得总体极小,比规则地划分模型空间以求出总体极小所需的计算时间和耗费的经费都要少。

蒙特卡罗法是一种完全随机的反演解算方法,有点像"赌博法"。它利用随机方法确定模型参数,并将计算观测数据和实际观测数据进行比较以确定模型参数。就实际问题而言,对于

模型参数较多的情形,在模型空间内随机地选点可能要比确定非常密的格网求解经济。因此,蒙特卡罗反演方法的意义在于它能够处理较大规模的完全非线性问题而无须对目标函数线性化(王家映,1998)。

利用蒙特卡罗法进行反演解算时,首先要根据先验知识预定义每个模型参数的取值区间

$$m_i^{\min} \leqslant m_i \leqslant m_i^{\max} \tag{13.49a}$$

在具体解算中,首先产生一服从[0, 1]均匀分布的随机数据,然后利用该随机数产生一新的模型参数。如假设随机数为 r,则新的模型参数可写为

$$m_i^{new} = m_i^{\min} + r(m_i^{\max} - m_i^{\min}) \tag{13.49b}$$

这样便可通过对模型参数的随机扰动(Random Perturbation)产生一组新的模型参数向量。利用新的模型参数便可计算出和实际观测值相应的理论观测值。对实际观测值和理论观测值按照某种准则进行比较,通过反复计算便有可能获得模型参数的最优估值。

13.5.4 模拟退火方法

模拟退火算法(Simulated Annealing 或 SA)是一种能应用到求最小值问题或基于先验信息更新的学习过程(随机或决定性的)。在此过程中,每一步更新过程的长度都与相应的参数成正比,这些参数扮演着温度的角色。与金属退火原理相类似,在开始阶段为了更快地最小化或学习,温度被升得很高,然后才(慢慢)降温以求稳定。

1983 年,Kirkpatrick 将退火思想引入组合优化领域,提出一种解大规模组合优化问题的算法,对 NP 完全组合优化问题尤其有效。这源于固体的退火过程,即先将温度加到很高,再缓慢降温(即退火),使达到能量最低点。如果急速降温(即为淬火)则不能达到最低点。就函数最小值问题来说,模拟退火的主要思想是:在搜索区间(二维平面中)随机游走(即随机选择点),再以 Metropolis 抽样准则,使随机游走逐渐收敛于局部最优解。而温度即是 Metropolis 算法中的一个重要控制参数,可以认为这个参数的大小控制了随机过程向局部或全局最优解移动的快慢。

Metropolis 是一种有效的重点抽样法。其算法为:系统从能量的一个状态变化到另一个状态时,相应的能量从 E_1 变化到 E_2,概率为 $p = \exp[-(\Delta E)/kT]$。$\Delta E = E_2 - E_1$,如果 $E_2 < E_1$,系统接收此状态,否则,以一个随机的概率接收或丢弃此状态。经过一定次数的迭代,系统会逐渐趋于一种稳定的分布状态。

重点抽样时,新状态下如果向下则接受(局部最优),若向上(全局搜索),则以一定几率接受。模拟退火方法从某个初始解出发,经过大量解的变换后,可以求得给定控制参数值时组合优化问题的相对最优解。然后减小控制参数 T 的值,重复执行 Metropolis 算法,就可以在控制参数 T 趋于零时,最终求得组合优化问题的整体最优解。控制参数的值必须缓慢衰减,其中温度是 Metropolis 的一个重要控制参数,模拟退火可视为递减控制参数 T 时 Metroplis 算法的迭代。开始 T 值大,可能接受较差的非优化解,随着 T 的减小,只能接受较好的非优化解,最后在 T 趋于 0 时,就不再接受任何非优化解了。

在无限高温时,系统立即均匀分布,接受所有提出的变换。T 的衰减越小,T 到达终点的时间越长,但可使马尔可夫链越小,到达准平衡分布的时间越短。

在局部搜索的反演算法中,我们从一个参考模型开始,当且仅当 $\Delta E_{ij} \leqslant 0$ 时才接受新的模型,即这种搜索是沿一个下降方向搜索。而在 SA 中,正如我们上面讨论的 Metropolis 算法,模型在 $\Delta E_{ij} \geqslant 0$ 时,仍有一定的概率被接受,即从均匀分布 $U[0,1]$ 中得到一个随机数 r,若

$P>r$，则接受新模型。这便意味着局部方法很有可能得到和起始参考模型相邻的局部极小点，而 SA 却有一定的概率跳出局部极小值。

对于一个非线性大地测量反演问题，Metropolis 算法就是将模型参数及其相应的目标函数对应于固态物质的一个状态 i 及其能量 E_i，并利用随算法进程递减其值的控制参数 t 担当退火过程中温度 T 的角色，对于控制参数 T 的每一取值，算法重复"产生新解—判断—接受/舍弃"的迭代过程，这相当于固体在某一恒温下趋于热平衡的过程，即相当于执行了一次 Metropolis 算法。在实际计算中，渐次减少控制参数 t 的值，重复执行 Metropolis 算法，就可以在控制参数 T 趋于零时，最终求得反演优化问题的全局（整体）最优解。换言之，Metropolis 算法就是根据与 Metropolis 准则对应的接受概率 P_A（Sen, et al., 1995；党亚民，1998）

$$P_A(i \Rightarrow j) = \begin{cases} 1, & \Delta E_{ij} \leqslant 0 \\ \exp\left(\dfrac{\Delta E_{ij}}{t}\right), & \Delta E_{ij} > 0 \end{cases} \tag{13.50}$$

确定是否接受从当前解（状态）i 到新解 j 的转移。即 Metropolis 模拟退火算法就是根据式（13.50）所描述的 Metropolis 准则接受新解。由式（13.50）可以看出，Metropolis 模拟退火算法除了接受优化解之外，还在一定范围内接受非优化解，这也正是 SA 和局部搜索算法的本质区别所在。在开始时控制参数 T 较大，此时尚可接受较差非优化解，随着 T 值的减小，则只能接受较好的非优化解。当 T 值趋近于零值时，就不再接受任何非优化解了。这便是 SA 算法的优势所在，即既可以从"局部最优"中跳出，更能获得反演问题的全局最优解，且不失简单性和通用性。

13.5.5 遗传算法

遗传算法（Genetic Algorithm 或 GA）是借鉴生物的自然选择和遗传进化机制而开发出的一种面向全局优化的自适应概率搜索算法，它利用某种编码技术将一组模型参数离散为二进制数串（类似一个"染色体"），其基本思想是模拟由这些数串组成的群体的进化过程。遗传算法通过有组织的但同时也是随机的信息交换来重新结合那些适应性好的数串。在每一代中，利用上一代串结构中适应性较好的位和段生成一个新的串的群体，同时也在串结构中利用新的位和段替代那些适应性较差的部分。遗传算法是一种随机算法，但它不是简单的随机走动（random walk），它有效地利用已有的信息来搜寻那些有希望改善解质量的数串。与自然界的自然进化类似，遗传算法无须对求解的对象知之甚多，它所需要的仅是对算法所产生的每个染色体进行评价，并根据适配度（fitness）选择染色体，从而保证适应性好的染色体比适应性差的染色体有更多的繁殖机会。总之，遗传算法就是利用简单的编码技术和繁殖机制来表征复杂的现象，进而解决这些非常困难的问题。遗传算法的优越性主要表现在其搜索过程不易陷入局部最优，即使是在其适配函数是不连续的、非规则的或有噪声的情况下，它也能以很大的概率找到全局最优解。

遗传算法是一种全局随机搜索算法，这种算法是模拟自然选择并基于遗传学理论而建立的，所依据的是"适者生存"原理，主要包括编码、选择、交换以及变异等四个基本步骤，下面具体介绍这种方法。

13.5.5.1 模型参数编码

模型参数编码是遗传算法中一个突出的特点，即在搜索解算之前，首先需要将模型参数转

换成二进制编码，即用一个无符号的二进制编码表示模型参数。在大地测量反演研究中，通常都是在对反演模型具备一定先验知识的前提下建立目标函数的，即基本上可以确定需要反演求解的与大地测量资料相关的是哪些模型参数，这些模型参数便是我们所要寻找的能与大地测量观测资料在某种准则下达到最佳拟合的反演解。除此之外，我们还需要根据已有的先验知识知道这些模型参数大概的取值范围（党亚民，1998）。

对模型参数进行二进制编码首先需要确定二进制编码的长度（位数），它主要取决于模型参数的范围及所要求的分辨率。二进制码每个比特（位）相应于一个“基因”，它可以取值 0 或 1。一般地，当所有位都为“0”时，模型参数取最小值；当所有位都为“1”时，模型参数取最大值。在编码的具体实施中，通常有两种方法：一种是对每个模型参数单独进行；另一种是将模型的每个参数编码后连在一起组成一个二进制数串。这样，一个模型即对应参数空间的一个点，而参数空间的一个点则被映射到一个多位二进制变量（染色体）。

在 GA 中，对每个模型参数的编码方案（Coding Scheme）可以不同，这意味着每个模型参数的搜索空间可以被独立地定义，即每个参数的分辨率（Resulution）可以不同。这一点很重要，因为在大地测量反演中，我们可据此给那些与观测数据有较好“响应”的模型参数赋予较高的分辨率，而对那些“响应”较差的模型参数分配以较低的分辨率，从而确保大地测量观测资料的充分利用，避免“资源”浪费。因此，利用二进制表示的物理参数的编码便限制了模型参数的搜索空间，同时也定义了每个模型参数的分辨率。

在实际的反演问题中，每个反演问题可以有许多物理特征，这些物理特征便可以利用不同的模型参数进行描述。以常见的利用重力测量资料反演地壳厚度为例，设对某一地质块体（个体模型）其地壳厚度最小值为 30km，最大值则为 61km，并假设其分辨率为 1km。对于该反演参数，其编码需要 5 个位（见图 13.3）。

0	0	0	0	0	$H_{min}=30km$
0	0	0	0	1	$H=31km$
0	0	0	1	0	$H=32km$
0	0	0	1	1	$H=33km$
		⋮			⋮
1	1	1	1	1	$H_{max}=61km$

图 13.3　根据重力测量资料反演地壳厚度模型参数的二进制编码（党亚民，1998）

在编码方案确定后，将所有编码后的参数组合到一起便形成了一个很长的类似于“染色体”的二进制数串，这些数串便用于表示每个个体的遗传信息。这些遗传信息可通过算法不断得到修正。上述数串以位（bits）为单位的长度通常被用于确定人口（population）中所需个体模型的个数。一般地，个体模型一开始是在离散模型空间中被随机地选择。接着，算法需要确

定这些个体模型的适配度,这意味着上述二进制信息需要被解码成物理参数,这同时也完成了正问题的解算。这样,利用某种适配准则即可对理论观测值和实际观测值进行比较。需要指出的是,适配度的确定应视具体问题而定。

13.5.5.2 模型选择

在人口中每个个体模型的适配度被确定后,即进入了遗传算法的选择过程。所谓选择,是根据每个个体模型的适配(度)值选择出成对的个体模型,在模型选择时,适配值较高的模型要比适配值低的模型更容易被选择,这与遗传类似,适配模型将有更多的机会用于繁殖(Reproduction)下一代。这里选择概率可通过适配值或某些适配值的函数来确定。当然,也可通过低于或高于某个适配界限值来随机地去掉或选择模型。因此,模型选择的方法是比较多的,常用的有适配均衡(Proportionate)选择、排序(Rank)选择、竞争(Tournament)选择。

(1)适配均衡选择

"随机采样"选择是一种最基本的选择方法。这种方法以每个模型的适配函数与所有模型适配函数之和的比值作为选择概率,即

$$p_s(\boldsymbol{m}_i) = \frac{F(\boldsymbol{m}_i)}{\sum_{j=1}^{n} F(\boldsymbol{m}_j)} \tag{13.51}$$

式中:n 为人口中模型的个数。利用上述概率进行选择,直至原始模型子集都配成对。新的人口中个体模型总数保持不变,所保留的原个体模型的个数通过人口中模型的总数乘以其相应的选择概率作均衡选择。新的人口中选择概率较低的个体模型可能会绝灭,而选择概率较高的模型不但能生存,其个体数目还可能会增加。

(2)排序选择

在排序法中,首先对所有模型的适配值进行估算并将其按照大小排序,则每个模型对应着一个序号。个体模型的排序一般从0(最佳模型)到 $n-1$(最差模型)。选择时根据预先确定的数目,利用一定数目的最优模型代替最差模型,因此,排序选择本质上增大了两个具有几乎相同适配值模型间的差异。

(3)竞争选择

竞争选择模拟了自然界个体间"适者相配"的竞争规则,其中一种最简单的方法即从 n 个人口中以随机选择的方法配对,同时计算出其适配值(或目标函数值)。对这些适配值进行比较,并根据上面所讨论的选择概率 P_s 在两个模型中选出一个模型。通常 P_s 也被称为竞争选择数,它为一可调参数。当 $P_s>0.5$ 时,说明获得了一较好模型。这个过程不断重复便可在子女(下一代)的人口中产生出 n 个模型。因此竞争选择本质上是基于概率的排序选择。对于更一般的情形,模型选择不再是二选一,而是在一组模型中择其一。

在基本的GA算法中,如果人口中包括100个模型,根据其适配值便可选出50对模型。接着对其中的每一对模型利用交换、变异等遗传算子即可产生出两个后代(offspring),由此便可产生出一组(n 个)全新的个体人口。

上述过程即为遗传算法的一次迭代计算,在此基础上,对新的人口利用上面介绍的选择方法重新选择并拒绝一定数目的个体,因此配对的模型可能只产生一个后代,从而需要对其在可接受的模型中重新配对。

13.5.5.3 基因交换

在模型被选择并被配对后，则可利用遗传算法的重组算子——“交换”进行运算。交换的机理是配对的模型共享遗传信息。一般情况下，交换可通过两种模式完成，即“单点”(Single Point)模式和“多点”(Multi-Point)模式。所谓单点模式，即通过均匀分布，随机地选择二进制数串的一个位(Bit)，再将在该点(位)后面的所有位和其配对的模型进行交换，由此便产生了一组新的个体模型(见图13.4(a))。多点交换模式则是对每个个体模型选择“交换点”，将该点(位)后面的所有位和其配对的模型进行位交换，由此便可产生一对新的个体模型(见图13.4 (b))。

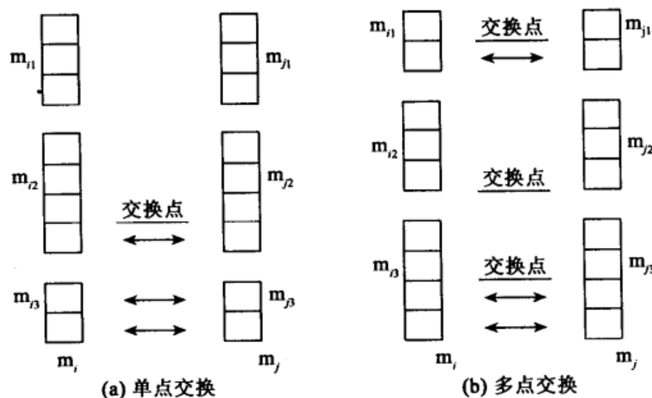


图 13.4 遗传算法常用的两种交换模式(党亚民,1998)

一旦交换点被随机地确定，是否对这些配对模型交换点后面的“位”进行交换则取决于交换的概率，即交换速率(Crossover Rate)由其概率 p_x 确定，而 p_x 的值则由 GA 的设计者指定。若交换的概率值较大，则说明配对模型可能基本上都要进行交换。

13.5.5.4 基因变异

变异是遗传算法的另外一个重要的算子。所谓变异即对数串中的任一个位作随机改变。变异可以在交换过程中实现，而变异速率也是由 GA 算法设计者预先指定。一个较低的变异概率将限制模型空间的随机走动(Random Walk)数目，而较高的变异概率将大大增加模型空间的随机走动数目，但却延迟了算法的收敛速度。如果仍以图13.3利用重力资料反演地壳厚度为例，取其中 $H_1=56\text{km}$ 的个体模型进行“变异”算子的运算，在对其1,2,…,5等位进行“变异”时，所产生的新的相应的个体模型见图13.5。

模拟生物进化过程的自然选择，通过基因交换和变异，模型将得到更新。

13.5.6 区间算法

区间分析属数值分析的一个领域，它以区间作为计算基本单元，通过“有向四舍五入”(Directed Rounding)，能够自动把解包含在一个区间内。通过区间分析设计的算法，不仅能用来解方程和优化问题，还能证明解的存在性和惟一性，被称为“自证算法”(Self Validating

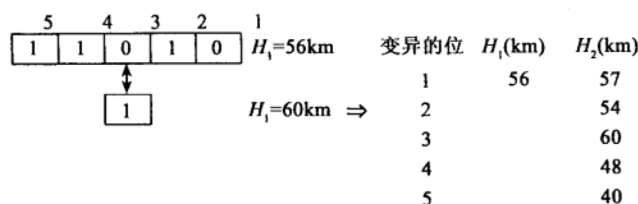


图 13.5 遗传算法中的“变异”运算(党亚民,1998)

Algorithms)。区间分析已被应用到多种领域,如线性和非线性系统、全局优化问题、模糊逻辑学、经济模型分析、生产设计质控、量子力学以及医药专家系统,等等。

区间算法求解优化问题具有无可比拟的优越性。到目前为止,大多数的优化计算,包括用得较多的随机优化方法在内,要么依赖于初值的选取,要么因为算法的随机性不能保证得到的就是全局最优解。

区间算法能够无限逼近最优解,求出解的包含区间,并自动获得逼近误差。它不依赖于初值的选取(当然有初值的情况下会节约很多时间),初始区间甚至可以选为无穷区间。通过对初始区间的细分,舍弃经判断不包含最优解的区间,保留有解的区间,并把这个区间作为初始区间重新进行判断,直至找到最优解。它的适用范围广泛,既可用于不可导和非光滑问题的优化,也可用于可导和光滑问题的优化,既可用于无约束问题的优化,也可用于约束问题的优化。由于区间运算对全局最优解的每一次逼近都是对全域的计算和检测(没有解的丢失)。因此,为了加快每一次局部最优的逼近速度,有必要把全局最优的区间算法和局部最优算法进行融合(李爽等,2003)。

下面介绍求非光滑整体优化问题全部解的区间算法(申培萍,1998)。

考虑下面的整体优化问题:

$$\text{global minimize} \quad f(x),\ f: X^{\circ} \to R \tag{13.52}$$

其中 X° 为任一闭区间,f 在 X° 上连续,分段光滑,且在非光滑点上的左、右偏导数都存在,以下称 f 为 X° 上的拟光滑函数。

对于区间算法,Asaithambi—Shen—Moore(1982)的方法是一个实用算法,但该算法仅利用目标函数的区间扩展,没有考虑广义梯度概念,收敛较慢,且只能给出整体极小点集中的某个元素(假定极小点不止一个)。本文应用区间分析理论,引入拟导数概念,给出一类求非光滑整体极小点的区间算法,该算法不仅快速、安全可靠、并行性强,而且能求出全部整体极小点,具有较高的计算效率.

定义 13.1 设 f 为一维拟光滑函数, f 在 x 点的拟导数定义为

$$g(x)=\begin{cases} f'(x) & x\text{是光滑点} \\ [\min(f'_{-}(x),f'_{+}(x)),\max(f'_{-}(x),f'_{+}(x))], & x\text{是非光滑点} \end{cases}$$

定义 13.2 设 $f: X \to R$,若存在区间值映射 $F: I(X) \to I(R)$,使对任意 $y \in I(X)$,都有 $f(y) \subseteq F(y)$,则称 F 为函数 f 的区间扩展。其中 $I(X)$ 为包含 X 的所有区间集合,$f(y)$ 为 f 在 y 上的值域。

设 $f(x)$ 是定义在 $X^{\circ}=[a,b]$ 上的拟光滑函数,其拟导数 $g(x)$ 在 X 上有可计算的区间扩展 $G(X)$,且 $G(X)$ 具有包含单调性(其中 $X \subseteq X^{\circ}$),我们的目的是求 $f(x)$ 在 X° 上的整体最小值

f^* 及最小值点集 X^*。

设拟极小(算法运行中的当前极小)为 $\bar{f}$,拟极小值点集为 Z^*,记 $F(X)$ 为 $f(x)$ 在 X 上的区间扩展,$G(X)$ 为 $g(x)$ 在 X 上的区间扩展。

13.5.6.1 $\bar{f}$ 的选取

设 $X^\circ=[a,b]$ 算法开始时,取 $\bar{f}_0=\min(f(a),f(b))$,$Z_0^*=\{x\,|\,f(x)=\bar{f}_0\}$。当算法执行到第 k 步时,记 $X_k=[a_k,b_k]$ 为区间集 $L^{(k)}$ 中宽度最大的区间,则选取

$$\bar{f}_{k+1}=\min(f(a_k),f(b_k),\bar{f}_k),\ Z_{k+1}^*=\{x\,|\,f(x)=\bar{f}_{k+1}\}。$$

13.5.6.2 删除区间中函数值大于拟极小的部分

假定在区间 X 上已选定 c 点,对任意 $y\in X$,有

$$f(y)\in f(c)+(y-c)g(X)\subseteq f(c)+(y-c)G(X)$$

其中:$g(X)=\{g(x)\,|\,x\in X\}$,$c\in X$,$G(X)=[\underline{g},\bar{g}]$。

我们希望删除 X 中满足不等式

$$f(c)+(y-c)G(X)>\bar{f}$$

的点,即删除 $y\in X\cap\left(c+\dfrac{\bar{f}-f(c)}{\underline{g}},c+\dfrac{\bar{f}-f(c)}{\underline{g}}\right)$ 的点。

13.5.6.3 单调性判别(此过程用 S_1 表示)

设 $L^{(k)}$ 为算法执行到第 k 步时所保留的区间集,$|L^{(k)}|$ 表示 $L^{(k)}$ 中的区间个数,对任意 $X_i\in L^{(k)}$,$X_i=[\bar{x}_i,\bar{x}_i]$,记拟导数 $g(x)$ 在 X_i 上的区间扩展为 $G(X_i)=[\underline{g}_i,\bar{g}_i]$,$i=1,2,\cdots,|L^{(k)}|$..若满足 $\underline{g}_i\geqslant0$,则 $f(x)$ 在 X_i 上单调增,记 $\bar{x}=\underline{x}_i$;若满足 $\bar{g}_i\leqslant0$,则 $f(x)$ 在 X_i 上单调减,记 $\bar{x}=\bar{x}_i$,如果 $\bar{f}_{k+1}\geqslant f(\bar{x})$,则取 $\bar{f}_{k+1}=f(\bar{x})$,$Z_{k+1}^*=\{\bar{x}\}$,或者将 $\bar{x}$ 归入 Z_{k+1}^*,然后删除 X_i;否则,直接删除 X_i。

13.5.6.4 算法的实现步骤

设 $w(X)$ 表示区间 X 的宽度,$m(X)$ 表示 X 的中点。

(1)给定正数 $\varepsilon_0,\varepsilon_1$,$X^\circ=[a,b]$,$K=0$。

(2)$L^{(0)}=\{X^{(0)}\}$,$\bar{f}_0=\min(f(a),f(b))$,$Z_0^*=\{x\,|\,f(x)=\bar{f}_0\}$。

(3)设第 K 步保留的区间集为 $L^{(k)}$,对 $L^{(k)}$ 中的每个区间 X_i,计算

$$F(X_i)=[\underline{F}_i,\bar{F}_i],\ X_i\in L^{(k)},i=1,2,\cdots,|L^{(k)}|$$

(4)删除 $L^{(k)}$ 中所有满足 $\bar{F}_i>\bar{f}_k$ 的区间 X_i,对 $L^{(k)}$ 中其余区间执行过程 S_1。

(5)在 $L^{(k)}$ 保留下来的区间中宽度最大的记为 $X_k=[a_k,b_k]$,令 $c=m(X_k)$,$G(X_k)=[\underline{g}_k,\bar{g}_k]$,取 $\bar{f}_{k+1}=\min(f(a_k),f(b_k),\bar{f}_k)$,$Z_{k+1}^*=\{x\,|\,f(x)=\bar{f}_{k+1}\}$:

①若 $f(c)=\bar{f}_{k+1}$,则 $Z_{k+1}^*=\{c,Z_{k+1}^*\}$,再将 X_k 分成 $[a_k,c]$ 和 $[c,b_k]$ 归入区间集中。

②若 $f(c)<\bar{f}_{k+1}$,则 $\bar{f}_{k+1}=f(c)$,$Z_{k+1}^*=\{c\}$,取 a_k 或 b_k 作为 c 点,删除 $y\in X_k\cap\left(c+\dfrac{\bar{f}_{k+1}-f(c)}{\bar{g}_k},c+\dfrac{\bar{f}_{k+1}-f(c)}{\underline{g}_k}\right)$ 的点,其余区间归入区间集中。

③若 $f(c)>\bar{f}_{k+1}$,则直接删除 X_k 中

$$y \in [a_k, b_k] \cap \left(c + \frac{\overline{f}_{k+1} - f(c)}{\overline{g}_k}, c + \frac{\overline{f}_{k+1} - f(c)}{\underline{g}_k} \right)$$

的点，其余区间归入区间集中。记此时保留下来的区间集合为 $L^{(k+1)}$，并对 X_k 中剩余区间求其相应的区间扩展。

(6)若 $L^{(k+1)}$ 中，对任意 $X_i \in L^{(k+1)}$，有

$$w(X_i) < \varepsilon_0 \text{ 和 } \overline{F}_i - \underline{F}_i < \varepsilon, i = 1, 2, \cdots, |L^{(k+1)}| \tag{13.53}$$

则转入(8)，否则转入(7)。

(7)对 $L^{(k+1)}$ 中所有不满足式(13.55)的 X_i 归入区间集中，不妨仍用 $L^{(k+1)}$ 表示，对所有满足式(13.55)的 X_i 归入区间集 L^* 中。

让 $K: = K + 1$，转入执行(3)。

(8)输出 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \overline{f}_{k+1}, Z^*_{k+1}, L^*$ 及 $L^{(k+1)}$，停机。

13.5.6.5 算法的数值分析

记 $G^{(k)}$ 为 $L^{(k)}$ 中所有区间所组成的区域，并设 X^* 仅由有限个孤立点组成。

定理 设 f 为 X 上的拟光滑函数，若对任意 $Y \subseteq X$，当 $w(Y) \to 0$ 时，有 $w(F(Y)) \to 0$，则：

(1) $G^{(k+1)} \subseteq G^{(k)}, k = 0, 1, 2, \cdots$

(2) 对任意 $K, f^* \in \bigcup_{i=1}^{m} F(X_i)$。

其中：$m = |L^{(k)}|$；$X_i \in L^{(k)}$；$F(X_i)$ 为 f 在 X_i 的区间扩展。

(3) 序列 $\{\overline{f}_k\}$ 收敛到 f^*。

证明：(1)显然成立。

(2)因为 $X^* = \{x \mid f(x) = f^*, x \in X\}$，由算法执行过程可知，对任意 k，有 $X^* \subset \bigcup_{i=1}^{m} X_i$，所以 $f(X^*) \in \bigcup_{i=1}^{m} f(X_i) \subset \bigcup_{i=1}^{m} F(X_i)$，故 $f^* \in \bigcup_{i=1}^{m} F(X_i)$。

(3) 由于对任意 k，有 $\overline{f}_k \geq f^*$，且 $\overline{f}_k$ 单调减，故 $\{f_k\}$ 必有极限(反证法)。假定存在数 $\alpha > f^*$，使 $\lim_{k\to\infty} \overline{f}_k = \alpha$。

因为对任意 $x^* \in X^*, f^* = f(x^*)$，且 X^* 为闭集，所以存在点列 $\{\xi_n\}$，$\xi_n \in X$，使 $\xi_n \to x^*$ 和 $f(\xi_n) \to f(x^*)(n \to \infty)$。若使 n 固定，使得 $f(\xi_n) < \alpha$，由于在算法执行中 ξ_n 不被删除，所以存在区间序列 $\{X'_k\}$，使 $\xi_n \in X'_k, X'_k \in L^{(k)}$。又因，当 $k \to \infty$ 时，$W(X'_k) \to 0$，所以 $X'_k \to \xi_n, (k \to \infty)$。由定理条件，$W(F(X'_k)) \to 0$，即 $f(X'_k) \to f(\xi_n), (k \to \infty)$。不妨设 $F(X'_k) = [\underline{F}'_k, \overline{F}'_k]$，则当 K 充分大时，有 $\overline{f}_k \leq F'_k < \alpha$，这与 $\lim_{k\to\infty} \overline{f}_k = \alpha$ 矛盾，故 $\lim_{k\to\infty} \overline{f}_k = f^*$。

§13.6 大地测量反演模式

13.6.1 基于位错模式的大地测量反演模型

设断层的未知参数向量为：

$$m = [d, \delta, W, L, a, b, \varphi, U_1, U_2, U_3]^{\mathrm{T}}$$

由位错理论可得有地震产生的地表位移(见第 10 章)为：

$$d = g(m) \tag{13.54a}$$

由位错公式知(13.53)是一组非线性方程,我们的任务是由地表位移 d 来反演确定断层参数 m,所以(13.53)是一个非线性反演问题,其解为

$$m = g^{-1}(d) \tag{13.54b}$$

式中:g^{-1}为 g 的逆算子。

基于位错模式的大地测量反演实质就是利用实测的地形变资料来推求地震断层参数,在震源参数的反演研究中,根据地震发生后的实地宏观考察、地质构造及地震波资料,可以获得有关地震断层的先验信息。设这种先验信息可以表示为断层参数上、下限的形式:

$$c_1 \leqslant m \leqslant c_2$$

为此可以按照上述方法求解。

由地面点的位移反推断层参数,就是反演问题。反演问题的关键是如何建立方程式。式(13.53)是一个非线性化的式子,通常要将其线性化。考虑测量坐标系中的位移为(U_X, U_Y, U_Z)与震源坐标系的位移为(u_x, u_y, u_z)的关系式,假设 β 表示这 10 个参数中的任意一个,可得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial U_X}{\partial \beta} &= \frac{\partial u_x}{\partial \beta}\cos\theta + \frac{\partial u_y}{\partial \beta}\sin\theta \\
\frac{\partial U_Y}{\partial \beta} &= \frac{\partial u_x}{\partial \beta}\sin\theta - \frac{\partial u_y}{\partial \beta}\cos\theta \\
\frac{\partial U_Z}{\partial \beta} &= \frac{\partial u_z}{\partial \beta}
\end{aligned}\right\} \tag{13.55}$$

具体公式可参考第 10 章第 3 节。

下面给出对 W、L、d、δ 求导的公式。首先定义

$$\left.\begin{aligned}
u_{x(y,z)} &= f_{x(y,z)} \| \\
\frac{\partial u_{x(y,z)}}{\partial x} &= g_{x(y,z),x} \| \\
\frac{\partial u_{x(y,z)}}{\partial y} &= g_{x(y,z),y} \|
\end{aligned}\right\} \tag{13.56}$$

式中:$g_{x(y,z),x}$是位错产生的位移量分别对 x,y 的求导。因此,我们给出对 L 的偏导数如下

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial L} &= g_{x,x\eta} \|_{\xi=x+L} + g_{x,x\eta} \|_{\xi=x-L} \\
\frac{\partial u_y}{\partial L} &= g_{y,x\eta} \|_{\xi=x+L} + g_{y,x\eta} \|_{\xi=x-L} \\
\frac{\partial u_z}{\partial L} &= g_{z,x\eta} \|_{\xi=x+L} + g_{z,x\eta} \|_{\xi=x-L}
\end{aligned}\right\} \tag{13.57}$$

式中:

$$t(\xi,\eta)_\eta \|_{\xi=x+L} = t(x+L,p) - t(x+L,p-W)$$

$$t(\xi,\eta)_\eta \|_{\xi=x-L} = t(x-L,p) - t(x-L,p-W)$$

对 W 的偏导数如下:

$$\frac{\partial u_{x(y,z)}}{\partial W} = \frac{\partial f_{x(y,z)}}{\partial \eta}_{\xi} \|_{\eta=p-W} \tag{13.58}$$

式中: $t(\xi,\eta)_\xi \|_{\eta=p-W} = t(x+L,p-W) - t(x-L,p-W)$

对 d 的偏导数如下:

$$\frac{\partial u_{x(y,z)}}{\partial d} = \sin\delta \frac{\partial f_{x(y,z)}}{\partial \eta} \| - \cos\delta \frac{\partial f_{x(y,z)}}{\partial q} \| \tag{13.59}$$

对 δ 的偏导数如下：

$$\frac{\partial u_{x(y,z)}}{\partial \delta} = -q \frac{\partial f_{x(y,z)}}{\partial \eta} \| + p \frac{\partial f_{x(y,z)}}{\partial q} \| + \frac{\partial f_{x(y,z)}}{\partial \delta} \| \tag{13.60}$$

13.6.2 基于时空地壳形变量的网络反演滤波模型

若给定 GPS 观测站的速度或用光电测距仪测得的基线长度的变化率，就可求得断层滑移速率的空间分布。而观测站位置的日估计提供了比平均速度丰富得多的信息。因而，从频繁采样、密集的大地测量网中得到的数据，我们可以提出如下的一些问题：在时间和空间上，断层滑移速率的形式如何？在深度方向上存在着无震传播的滑动波吗？在大地震发生之前，无震滑移速率的形式有所改变吗？亦即我们希望弄清在整个时空域上的断层滑移速率的全貌，而不仅仅是平均滑移速率。同样，在进行与时间相关的滑移速率的反演中也存在着很多的问题：首先，我们不知道所求的时间变量的先验特征。其次，在进行大地测量时，存在着大气层延迟、多路径效应、基准站的随机运动等，使得数据中包含有很多与时空相关的误差。再次，地方基准的运动使瞬时地壳运动的探测变得复杂。因此，任何可行的估计方法都需考虑在断层滑移中时间变量的总体的非参数估计，并对观测值间的相关误差进行解释。为了解决这些问题，Paul Segall 等 1997 年建立了基于时空地壳形变量的网络反演滤波模型，进行与时间相关的大地测量反演（Segall et. al. ,1997）。

网络反演滤波法是一种时间域滤波法，不再逐条基线逐条基线地进行分析，而是同时分析整个大地测量网，这样做便于从地方基准运动中分离出随时间变化的构造信号。时间域滤波法能自动地探测出基本滑移速率的改变。网反演滤波法的步骤如下：给定一组形变时间序列，用一组基函数展开源模型；形成一个高斯模型来求这组基函数前随时间变化的系数，以加强先前对源模型是稳定状态的假设；进一步用高斯模型来求地方基准运动及每个站的观测误差；根据所有的已知观测数据，用递归线性卡尔曼滤波估计过去某些时刻的最佳平滑值或将来某些时刻的最佳预测值；用极大似然法来估计各个高斯处理中的尺度参数。网反演滤波法有以下的一些特点：

（1）能从局部运动中分离出空间相干信号。

（2）考虑了实时探测的异常性。

（3）能处理随时随地任意方法得到的观测数据。

（4）避免了解大量的线性方程，而采用高效的回归运算，能直接给出最优估值。

网络反演滤波法具体介绍如下：

将地球表面 $u_r(x,t)$ 的位移模型以空间坐标 x 和时间 t 的函数表示为：

$$u_r(x,t) = \int_{\sum} s_p(\xi,t) G_{pq}^r(x,\xi) n_q(\xi) \mathrm{d} \sum(\xi) + \Gamma(x,t) + \varepsilon \tag{13.61}$$

式中：$p,q,r=1,2,3$，为求和指标。等号右边各项分别表示基本的形变信号、地方基准运动和测量误差。其中，第一项假设在同质的、各向同性的弹性半空间中，穿过一个或多个平面断层表面的真形变都可以用随时空变化的位移不连续性或滑移 $s_p(\xi,t)$ 完全表示；$n_q(\xi)$ 表示断层表面 $\mathrm{d}\sum(\xi)$ 的单位法线；$G_{pq}^r(\mathbf{x},\xi)$ 与弹性格林张量的导数成比例。测量误差满足标准正态分

布，其方差可以从 GPS 的数据处理中得到，假设小于某一尺度因子 σ^2。为了分析局部运动，我们把它假设为以 τ 为尺度因子的布朗运动，如式(13.62)所示。

$$B(t) = \tau\int_0^t \mathrm{d}\omega(t') \tag{13.62}$$

其中：$\mathrm{d}\omega$ 为白噪声，τ^2 的单位为长度^2/时间。但对于非构造运动过程，如由大规模流体收缩引起的凹陷或广阔的山崩，就不能用随机点位移模型表示，应该区别对待。

若将滑动估值用一空间函数 $\beta(x)$ 的线性组合表示：

$$S_p(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{M} c_k^{(p)}(t)\beta_k(\boldsymbol{x}) \tag{13.63}$$

其中：M 为基函数的个数。

通常根据滑移分布结果是否满足先验期望的性质来选择基函数。

把式(13.63)代入式(13.61)，有

$$u_r(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{M} c_k^{(p)}(t)F_{rk}^{(p)} + L(\boldsymbol{X},t) + \varepsilon \tag{13.64}$$

其中：

$$F_{rk}^{(p)} \doteq \int_{\sum}\beta_k(\xi)G'_{pq}(\boldsymbol{X}_n,\xi)n_q(\xi)\,\mathrm{d}\sum(\xi) \tag{13.65}$$

如果网包括 N 个站，其坐标为 $x_n, n=1,2,\cdots,N$，其 $3\times N$ 个位移分量组成向量

$$d_i(t_j) = u_r(\boldsymbol{X}_n,t_j),\quad i = 3(n-1)+r \tag{13.66}$$

再假设 $m=3(k-1)+p$，则观测方程变为如下形式：

$$d_i(t_j) = \sum_{m=1}^{3M} c_m(t_j)F_{im} + L_i(t_j) + \varepsilon_{ij} \tag{13.67}$$

大量的大地测量观测数据表明间震期形变是以接近稳态的方式积聚的(Savage and Lisowski,1995)。假设式(13.63)中的基函数是近似规格化(正交化)的，则 $\ddot{c}_m$ 很小，故用以 α^2 为变量的相互独立的白噪声序列 $\dot{w}_m$ 来表示，有

$$\ddot{c}_m(t) = w_m(t) \tag{13.68}$$

对式(13.68)两次积分，得

$$c_m(t) = v_m t + W_m(t) \tag{13.69}$$

不失一般性，假设在第一次观测时刻的滑移为零，即 $c_m(t=0)=0$。其中：

$$W(t) = \int_0^t B(t')\,\mathrm{d}t' \tag{13.70}$$

是随机移动的积分，尺度参数为 α，单位为[长度]^2/[时间]^3。

13.6.2.1 状态空间模型

状态空间模型不仅易于模拟地方基准运动的随机方程和与时间相关的构造信号，而且只需一个状态向量就能表示整个随机过程。这个状态向量能以时间线性展开，也与数据线性相关。在整个频域法中这种方法的优异之处还在于它不要求数据对时间的规则采样。因而，在各个观测时刻的测站数可以变化，而且在某个站上丢失了一些数据对结果的影响不大。

x_k 表示在 t_k 时刻的状态向量，用状态空间模型表示观测方程如下

$$\mathbf{d}_k = H_k\mathbf{x}_k + \varepsilon_k,\quad \varepsilon_k \sim N(0,R_k) \tag{13.71}$$

状态变换方程为

$$\mathbf{x}_{k+1} = T_{k+1}\mathbf{x}_k + \delta_{k+1}, \quad \delta_k \sim N(0, Q_{k+1}) \tag{13.72}$$

用状态空间模型来表示地方基准的运动。令 $\mathbf{x}_k = B(t_k)$，则状态转换方程变成

$$T_k = I, \quad Q_k = \tau^2(t_k - t_{k-1}) \tag{13.73}$$

此时，式(13.6.2.9)用状态向量表示为：

$$\mathbf{X}_k = [v, W(t_k), \dot{W}(t_k)]^{\mathrm{T}} \tag{13.74}$$

$$c(t_k) = [t_k, 1, 0]\mathbf{X}_k \tag{13.75}$$

同时，设状态转换矩阵及协方差阵分别为

$$T_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (t_k - t_{k-1}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13.76}$$

$$Q_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \dfrac{(t_k - t_{k-1})^3}{3} & \alpha^2 \dfrac{(t_k - t_{k-1})^2}{2} \\ 0 & \alpha^2 \dfrac{(t_k - t_{k-1})^2}{2} & a^2(t_k - t_{k-1})^2 \end{pmatrix} \tag{13.77}$$

对于整个网的状态向量，可表示为

$$\mathbf{X}_k = [v_1, W_1(t_k), \dot{W}_1(t_k), v_2, W_2(t_k), \dot{W}_2(t_k), \cdots v_M, W_M(t_k), \dot{W}_M(t_k), B_1(t_k), B_2(t_k), \cdots B_N(t_k)]^{\mathrm{T}} \tag{13.78}$$

其中：M 为基函数的个数；N 为测站的个数；前面的 $3M$ 个参数表示每个基向量的状态；其余 N 个参数表示每个站的随机游动部分。

网反演滤波的状态转换矩阵及协方差阵如下：

$$T_k = \begin{pmatrix} T_k^W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_k^W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{N\times N} \end{pmatrix} \tag{13.79}$$

$$Q_k = \begin{pmatrix} Q_k^W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_k^W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau^2(t_k - t_{k-1}) I_{N\times N} \end{pmatrix} \tag{13.80}$$

其中：T_k^W 的形式如式(13.76)，Q_k^W 的形式如式(13.77)。这里我们假定每一站的随机游动方差相同。事实上并非如此。至于每一测站上不同的随机游动统计由式(13.80)简单前推得到，然而，这会使极大似然估计的方差参数复杂化。

观测矩阵变为

$$H_k = \left(F \begin{bmatrix} t_k & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_k & 1 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \end{bmatrix}, I_{N\times N} \right) \tag{13.81}$$

其中：子矩阵 F 映射了基函数对数据的影响，矩阵 I 映射了每个站上的地方基准运动情况。通

过解观测方程(13.81),可得到方差 R_k,由于 $\sum_k$ 可从 GPS 数据处理得到,所以可通过下式计算出 σ^2:

$$R_k = \sigma^2 \sum_k \tag{13.82}$$

13.6.2.2 滤波与平滑

每一时刻 t_k 的状态分量 X_k 由递归线性卡尔曼滤波和平滑估计得到。假设在时刻 k 的状态的条件平均数及协方差阵可以通过时刻 j 的给出,有

$$\hat{X}_{k|j} = E[X_k \mid d_1, d_2, \cdots, d_j] \tag{13.83}$$

$$\sum_{k|j} = \operatorname{cov}\lfloor X_k \mid d_1, d_2, \cdots, d_j \rfloor \tag{13.84}$$

假设向前一个时刻的预测方程为

$$\hat{X}_{k+1|k} = T_{k+1}\hat{X}_{k|k} \tag{13.85}$$

$$\sum_{k+1|k} = T_{k+1}\sum_{k|k} T_{k+1}^{\mathrm{T}} + Q_{k+1} \tag{13.86}$$

而向后一个时刻的预测方程为

$$\hat{\mathrm{X}}_{k|k} = \hat{\mathrm{X}}_{k|k-1} + G_k v_k \tag{13.87}$$

$$\sum_{k|k} = \sum_{k|k-1} T_{k+1}^{\mathrm{T}} - G_k H_k \sum_{k|k-1} \tag{13.88}$$

这里,残差 v_k 是 t_k 时刻的观测值与该时刻条件估值的差。有如下的定义:

$$v_k \approx \mathrm{d}_k - H_k \hat{\mathrm{X}}_{k|k-1} \tag{13.89}$$

Kalman(放大系数)增益矩阵 G_k 由下式给出

$$G_k \approx \sum_{k|k-1} H_k^{\mathrm{T}} (R_k + H_k \sum_{k|k-1} H_k^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{13.90}$$

给定一个先验估计 $\hat{\mathrm{X}}_{1|0}$ 和协方差 $\sum_{1|0}$,就可以用式(13.87)和式(13.88)求得后一时刻的值 $\hat{\mathrm{X}}_{1|1}$ 和 $\sum_{1|1}$;然后用式(13.85)和式(13.86)来估计 $\hat{\mathrm{X}}_{2|1}$ 和 $\sum_{2|1}$,如此反复,直到遍历了所有的数据,计算出最后一个时刻的值(如下式所示)后停止计算:

$$\hat{\mathrm{X}}_{Ne|Ne} = E[X_{N_e} | d]$$

$$\sum_{Ne|Ne} = \operatorname{cov}[X_{N_e} | d]$$

其中:N_e 为观测时刻的个数。

为了完成整个过程,还得根据所得到的数据对各个状态的值进行验后估计,用同样的递归方法,由下式可以得到

$$\hat{\mathrm{X}}_{k|N_e} = \hat{\mathrm{X}}_{k|k} + S_k(\hat{\mathrm{X}}_{k+1|N_e} - \hat{\mathrm{X}}_{k+1|k}) \tag{13.91}$$

$$\sum_{k|N_e} = \sum_{k|k} + S_k(\sum_{k+1|N_e} - \sum_{k+1|k}) S_k^{\mathrm{T}} \tag{13.92}$$

在第 k 个时刻的平滑矩阵为

$$s_k = \sum_{k|k} T_k^{\mathrm{T}} \sum_{k+1|k}^{-1} \tag{13.93}$$

13.6.2.3 滤波参数的极大似然估计

实践证明,适当选择加速度变量或称为空间平滑参数 α^2 很关键,同样也有必要对随机游

动的尺度参数 τ^2 和测量误差 σ^2 进行估计。对于独立基线来说,很难把地方基准运动和随时间变化的滑移速率区分开来。换句话说,τ^2 和 σ^2 的估值不相关和很难确定。但对于网反演滤波法,却并非如此。由于它同时分析了所有的基线,而且在网中,随时间变化的断层滑移是连续的,基准的运动是不连续的,因而可以用这种方法区分出这些影响。

用极大似然法来估计滤波过渡参数 σ^2、τ^2 和 α^2。似然法的递归计算是以期望误差的分解为基础的。在已知参数向量 Θ 的情况下,N_e 个观测值的联合概率密度函数可由每个观测值的条件概率密度函数得到,则有

$$p(d_1,\cdots,d_{Ne}\mid\Theta)=\prod_{k=1}^{Ne}p_k(d_k\mid\Theta;d_1,\cdots,d_{k-1})\tag{13.94}$$

参数向量 Θ 由 σ^2,τ^2 和 α^2 组成。一般地,观测误差 R_k 是 σ^2 的纯量倍数,如果状态转换方程里 Q_k 和先验协方差 $\sum_{1|0}$ 的误差能由 σ^2 来衡量,则我们只需对 α^2/σ^2,τ^2/σ^2 进行最优的似然估计了。

由式(13.94),在观测值向量 d 已知的情况下,就可得到参数向量 Θ 的对数极大似然估计

$$L(\Theta\mid d_1,\cdots,d_{N_e})=\sum_{k=1}^{N_e}\log[p_k(d_k\mid\Theta;d_1,\cdots,d_{k-1})]\tag{13.95}$$

对正态数据而言,其条件概率密度函数也是正态的,均值和方差分别为

$$E(\boldsymbol{d}_k\mid\boldsymbol{d}_1,\cdots,\boldsymbol{d}_{k-1})=\hat{\boldsymbol{d}}_{k|k-1}\tag{13.96}$$

$$E\lfloor(\boldsymbol{d}_k-\hat{\boldsymbol{d}}_{k|k-1})^2\rfloor=\sigma^2V_k\tag{13.97}$$

所以,有对数的极大似然估计

$$L(\Theta/\sigma^2\mid\mathbf{d})=-\frac{1}{2}N_d\log\sigma^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{Ne}\log\mid V_k\mid-\frac{1}{2}\sigma^{-2}\sum_{k=1}^{Ne}v_k^{\mathrm{T}}V_k^{-1}v_k\tag{13.98}$$

其中:N_d 是数据的总数;$N_d=\sum_{k=1}^{N_e}n_k$,n_k 为每个时刻的观测数。

对式(13.89)做一个变换,得

$$v_k=\mathrm{d}_k-\hat{\mathrm{d}}_{k|k-1}=\mathrm{d}_k-H_k\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}\tag{13.99}$$

其中:H_k 和 $\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}$ 都由参数向量 Θ 决定,因而可得对应的协方差

$$V_k=R_k+H_k\sum\nolimits_{k|k-1}H_k^{\mathrm{T}}\tag{13.100}$$

由式(13.98),可得 σ^2 的极大似然估计

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{N_d}\sum_{k=1}^{Ne}v_k^{\mathrm{T}}V_k^{-1}v_k\tag{13.101}$$

把式(13.101)代入到式(13.98),可得

$$L(\Theta/\sigma^2\mid\mathbf{d})=-\frac{1}{2}(N_d-N_d\log N_d)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{Ne}\log\mid V_k\mid-\frac{1}{2}N_d\log\Big[\sum_{k=1}^{Ne}v_k^{\mathrm{T}}V_k^{-1}v_k\Big]\tag{13.102}$$

网反演滤波法联合了线性反演理论和离散时间 kalman 滤波法,用密集的、频繁采样的大地测量数据来估计在时间和空间上的断层滑移的分布。该方法也适宜用其他类型的数据,包括蠕动和应变数据。只要其噪声范围能很好地被表征出来。

网反演滤波法可以进行断层的瞬时滑移的非参数估计,也可在有足够的站密度和信噪比信号的情况下,求得断层瞬时滑移(包括在断层中传播的滑移),还能很容易地从随机基准运

动中识别出重大的瞬时滑移,而一般的方法是无法探测这些类似的事件的发生的(虽然应变仪比 GPS 基线向量对形变有更强的敏感性,但是很少有地方能用足够的应变仪来区分构造应变和局部变形)。

网反演滤波法也为分析火山爆发和地震等发生前的瞬时形变提供了一种可行的方法。

13.6.3 基于固体力学的大地测量反演问题

对于一个变形体,可以根据固体力学的基本方程和基本假设得出如下一组方程(赵少荣,1991):

$$\begin{cases} \varepsilon = Lu \\ L^{\mathrm{T}}\sigma + P = 0 & (\text{在 } V \text{ 内}) \\ L_1^{\mathrm{T}}\sigma = q & (\text{在 } S_T \text{ 上}) \\ \sigma = f(\varepsilon) \\ u = u_0 & (x,y,z) \in S_u \end{cases} \tag{13.103}$$

其中:ε 代表变形体的应变;σ 代表变形体的应力;u 为变形体的位移;P 为变形体的体积力载荷;q 为变形体表面 S_T 上的面力载荷;V 为变形体的体积,L、L_1 为算子。

实际工作中,如研究板块运动、断层运动产生的应变、应力问题等,所采用的基本方法,都是在一定的假设条件下,求解上述边值问题。解算上述边值问题可看做是已知"原因"推求"结果"的微分方程的正问题,即已知载荷作用,变形体的本构方程,求解变形体的位移、应变和应力。如果我们在变形体上进行了大地测量工作,获得了变形体表面上的大地测量结果,包括位移、应变、倾斜、重力以及它们的变化,那么我们需要讨论的问题是如何根据获得的结果来求解上述边值问题,这就产生了已知"结果"反推"原因"的边值问题反问题。由于所讨论的问题是以微分方程形式表示的,因此,这类反问题在数学上称为微分方程反问题。

对于由变形体的外部(或部分内部)的大地测量观测结果来推求变化发生的内部原因的一类问题,称为大地测量反演问题。

由于微分方程反问题的解算困难,通常采用数值计算方法。数值计算方法常用的有有限单元法,差分法,样条函数拟合法等。利用有限单元法可将所讨论的边值问题转化为一组由系统节点位移表示的泛函方程组:

$$KU = F \tag{13.104}$$

大地测量反演问题通常可以划分为以下三类情况(赵少荣,1991):

(1)第一类大地测量反演问题

设所求的模型参数为 X,B_1、B_2 是距离空间,$U \in B_1$,$X \in B_2$,算子 K:$B_1 \to B_2$,考虑泛函方程式

$$K \cdot U = X \tag{13.105}$$

若设 K 的逆算子存在,记为 $A = K^{-1}$,则得

$$A \cdot X - U = 0 \tag{13.106}$$

由式(13.105)或式(13.106)表示的一类大地测量反演问题称第一类大地测量反演问题。

(2)第二类大地测量反演问题

设所求的模型参数为 Y,考虑泛函方程式

$$K(Y) \cdot U = F$$

其中:$K(Y)$关于 Y 是连续的。设 B_1, B_2 是距离空间,$Y \in B_1, F \in B_2$,算子 $D: B_1 \to B_2$,且满足 $DY = K(Y) \cdot U = F$,可得如下算子方程:

$$DY = F \tag{13.107}$$

或

$$K(Y) \cdot U = F \tag{13.108}$$

由式(13.107)或式(13.108)表示的一类大地测量反演问题称第二类大地测量反演问题。

(3)第三类大地测量反演问题

考虑问题(13.104)中,待求参数 X, Y 同时包含在 K 和 F 项中,可得

$$K(X) \cdot U = F(Y) \tag{13.109}$$

式中:$K(X)$、$F(Y)$分别关于 X, Y 是连续的。

式(13.109)表示的一类大地测量反演问题称第三类大地测量反演问题。

一般来说,在大地测量反演研究中,首先要根据实际问题选择一个近似地球物理模式,例如在震源参数反演中,一般采用弹性位错模式。若选择的模型在理论上过于"真实",由于数学处理困难,常使反演工作无法进行,因此,实际应用中必须在"模型"与"算法"之间取折中方案。从断层力学角度来看,断层力学模式可分成线性和非线性两类。一个物理非线性模式通常指非线性介质和非线性断层破裂分布等,而在弹性位错理论的基本假设中,包含了各向同性均匀介质和断层均匀错动假设。因此,以这种模式为基础提出的反问题,不适合于一般力学模式下的反问题研究,必须作进一步扩展。从全球角度来看,随着动态大地测量资料的不断积累,有可能利用大地测量资料反演地壳构造应力场。这就要求建立基于一般力学模式下的大地测量反演理论(赵少荣,1993)。

对于含有断层Π和边界 Γ 的空间域 Ω,根据断层劈节点有限元模型(Melosh and Raefsky, 1981)可给出含断裂点的三维边值问题有限元方程

$$KU = F \tag{13.110}$$

式中:$K = \sum_{e=1}^{M_e} K^e$, $F = \sum_{e=1}^{M_e} F^e$。

M_e 是单元总数、K^e 和 F^e 分别是单元刚度和单元载荷向量,且有

$$K^e = [K_{pq}^e], \quad F^e = [F_p^e], \quad 1 \leqslant p, q \leqslant M_d$$

式中:$M_d = M_{en} \cdot M_e$,M_{en}为第 e 个单元中的节点数目,M_e 为 e 单元中节点自由度数目,M_d 为 e 单元中的自由度数目。单元载荷向量为

$$F_p^e = \int_{\Omega^e} N_a^e f_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma^e} N_a^e h_i \mathrm{d}\Gamma - \sum_{q=1}^{M_d} K_{pq}^e g_q^e - \sum_{q=1}^{M_d} K_{pq}^e \Delta u_q^e \tag{13.111}$$

式中:N_a^e 为与第 e 个单元的 a 节点有关的形函数;p, q 为单元方程号码;g_q 为边界 Γ 的位移;Δu_q 为断层Π上的位移。

$$g_p^e = \begin{cases} g_i(X_b^e) & X_b^e \in \Gamma \\ 0 & X_b^e \notin \Gamma \end{cases}$$

$$\Delta u_q^e = \begin{cases} \Delta u_j^e(X_b^e) & X_b^e \in \Pi \\ 0 & X_b^e \notin \Pi \end{cases}$$

各单元的应力为:

$$\{\sigma^e\} = [D]^e B^e(X_b^e)(U^e + \Delta u^e) \tag{13.112}$$

其中：

$$\Delta u^e = \{\Delta u_p^e\}$$

$$\Delta u_p^e = \begin{cases} \Delta u_i^e(X_a^e) & X_a^e \in \prod \\ 0 & X_a^e \notin \prod \end{cases}$$

$$p = 2(a-1)+i, \quad i = 1,2$$

由于式中的积分项一般可采用适当的方法求出（高斯积分法），不失一般性，下面将上述有限元方程归结为如下矩阵方程式：

$$\underset{n\times u}{K}\ \underset{u\times 1}{U} = \underset{n\times 1}{F} + \underset{n\times t}{G}\ \underset{t\times 1}{\Delta u} \tag{13.113}$$

其中：G 是系数矩阵，它与矩阵 K 中的元素有关，$\Delta u = \mathrm{vec}(\underset{p\times 3}{\Delta u})$，可看做是断层的三维位错量，且有：$\underset{p\times 3}{\Delta u} = [\underset{p\times 1}{\Delta u_x}\underset{p\times 1}{\Delta u_y}\underset{p\times 1}{\Delta u_z}]$，$p$ 为断层点的数目。

如果已知刚度矩阵 K，节点力 F 及断层错动量 Δu，就可求得式（13.113）的广义逆解

$$U = K^{+}(F + G\Delta u) \tag{13.114}$$

这就是有限元计算的正演解。参考大地测量网中基准的定义，这样求得的解与一种物理模式相对应，即假定所考虑区域的重心点位置不变。如果我们假定地球质心的位移为零，那么在对全球区域进行有限单元计算时，可以考虑使用这个方法。在一般的应用中，需根据实际问题的性质施加位移约束，可将问题变为

$$\begin{cases} \overline{K}\,\overline{U} = \overline{F} + \overline{G}\cdot\overline{\Delta u} \\ \underset{n_1\times 1}{U_f(0)} = \underset{n_1\times 1}{U_0} \end{cases} \tag{13.115}$$

即施加 n_1 个位移约束。为了保证求解上述问题时凯利逆存在，对于三维问题，$n_1 \geqslant 4$；对于二维问题，$n_1 \geqslant 3$。这时可将式（13.114）中的位移约束代入第一式，化简后求得唯一解：

$$U = K^{-1}(F + G\Delta u) \tag{13.116}$$

上式即为目前普遍采用的有限元正演解，当断层点不存在时，$\Delta u = 0$，可得

$$U = K^{-1}F \tag{13.117}$$

讨论式（13.116）和式（13.117），三类大地测量反演问题如表 13.1 所示。

表 13.1　　三类大地测量反演问题

类　型	已知项	未知项	备　　注
第一类	U, F_0	F_X	$F = [F_0 \quad F_X]^{\mathrm{T}}$，（13.117）式
	U, F, K	Δu	（13.116）式
第二类	U, F	X	$K = K(X)$，（13.117）式
第三类	U, F_0, K_0	X, F_X	$K = [K_0 \quad K(X)]^{\mathrm{T}}$ $F = [F_0 \quad F_X]^{\mathrm{T}}$，（13.117）式
	U, F, K_0	$X, \Delta u$	$K = [K_0 \quad K(X)]^{\mathrm{T}}$，（13.116）式
	U, F_0, K	$F_X, \Delta u$	$F = [F_0 \quad F_X]^{\mathrm{T}}$，（13.116）式

§ 13.7 大地测量地球物理联合反演理论的应用

Haines and Holt(1993)提出了利用地震矩张量获得的地壳应变率反演地壳运动速度场的方法。目前,该方法已被发展为利用大地测量、活断层运动速率和地震矩张量资料综合反演地壳运动速度场(Haines and Holt,1995;Jackson et al.,1995; Shen-Tu and Holt,1995;Tinnon and Holt,1995; Kreemer and Holt,2000; Holt et al.,2000; Beavan and Haines,2001,许才军等,2002,2003)。该方法的主要思想是利用"双三次样条函数",通过反演方法在一定厚度的板壳上拟合构造应变率分布,从而求出连续的地壳运动速度场。

联合反演目标函数

$$\min = \sum_{i=1}^{N}(\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{fit}} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{obs}})(V)_{ij,pq}^{-1}(\dot{\varepsilon}_{pq}^{\text{fit}} - \dot{\varepsilon}_{pq}^{\text{obs}}) + \sum_{i=1}^{M}(u_i^{\text{fit}} - u_i^{\text{obs}})C_{ij}^{-1}(u_j^{\text{fit}} - u_j^{\text{obs}}) \quad (13.118)$$

其中:

$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{fit}}$:由双三次贝塞尔样条函数模型求出的平均应变率值;

$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\text{obs}}$:由地震矩张量求出的平均应变率值;

u_i^{fit}:由双三次贝塞尔样条函数模型求出的速度场;

u_j^{obs}:大地测量观测资料(GPS)得出的速度场;

$(V)_{ij,pq}^{-1}$:地震矩张量求出的平均应变率值的先验权阵;

C_{ij}^{-1}:GPS 站速度场的先验权阵。

$(V)_{ij,pq}^{-1}$相当于一个总体上具有各向异性特点的粘性张量,在给定的范围内它相当于区域物质的粘度值,控制各个单元介质的强弱和各向异性特点。通过调整应变率先验权矩阵就可以得到各种边界条件和初始条件下介质的变形反映。$(V)_{ij,pq}^{-1}$元素的具体确定公式为(Haines et al.,1998):

$$\text{var}(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \left[\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{M_{ij}^k}{2\mu VT}\right)^2\right] + \sigma_0^2\frac{1}{2}(1+\delta_{ij}) \quad (13.119)$$

$$\text{cov}(\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{lm}) = \left[\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{M_{ij}^k}{2\mu VT}\right)\left(\frac{M_{lm}^k}{2\mu VT}\right)\right] \quad (13.120)$$

其中:$\sigma_0^2\frac{1}{2}(1+\delta_{ij})$用来改正地震资料不全造成的影响;$\sigma_0^2 = \frac{\eta h}{V} = \frac{\eta}{S}$,$\eta$ 表示不完全因子,它是为了弥补地震或者 GPS 资料的不完整而给的先验值,一般根据断层滑动速率来确定;S 表示网格的面积。GPS 站速度场的先验权可以通过 GPS 观测值的方差和协方差得到。

采用双三次贝塞尔样条函数模型进行拟合(Haines and Jackson,1998),样条函数是一种分段多项式,在各段的多项式间又具有某种连接性质,这样样条函数既保持了多项式的简单性和逼近性,又在各段之间保持了相对独立的局部性质,即样条函数能更好地反映局部性质。

利用三次样条函数方法反演速度场、应变率场首先需将所研究区域划分成格网,然后求出格网的节点处的旋转参数,并分别对每一个网格采用样条拟合。格网的划分直接影响到计算结果。本文采用不规则网格勾画构造带和板块边界带,将中国大陆地区划分为 279 个网格(见图 13.6)。

网格划分的基本原则是根据地震震源机制和第四纪主要活动断层的分布,让一个网格内

的区域具有相同的地质构造性质。对于变形剧烈的区域，网格尽量划分得密一些，而对于近似刚性的块体，如华北块体、华南块体、东北块体等网格可以划分得稀疏一些。本文所采用的网格中，将北部的西伯利亚地块、南部的印度板块视为刚性体，刚性是通过赋予它们中的网格节点相同的旋转参数来实现的。其中，将西伯利亚地块作为整个模型参考框架，其他块体的运动速度都是相对于参考框架的。本文所采用的地震矩张量主要来源于 Holt(1995)和美国哈佛大学地震研究中心网站，从 1902 年到 2003 年共有 911 个。文中采用的 GPS 数据属于 GPS2000 网的子网结果，原始观测数据有 495 个，其中去掉了一部分和当地大部分测站运动趋势明显不一样的点，实际参加反演拟合计算的 GPS 点为 463 个。

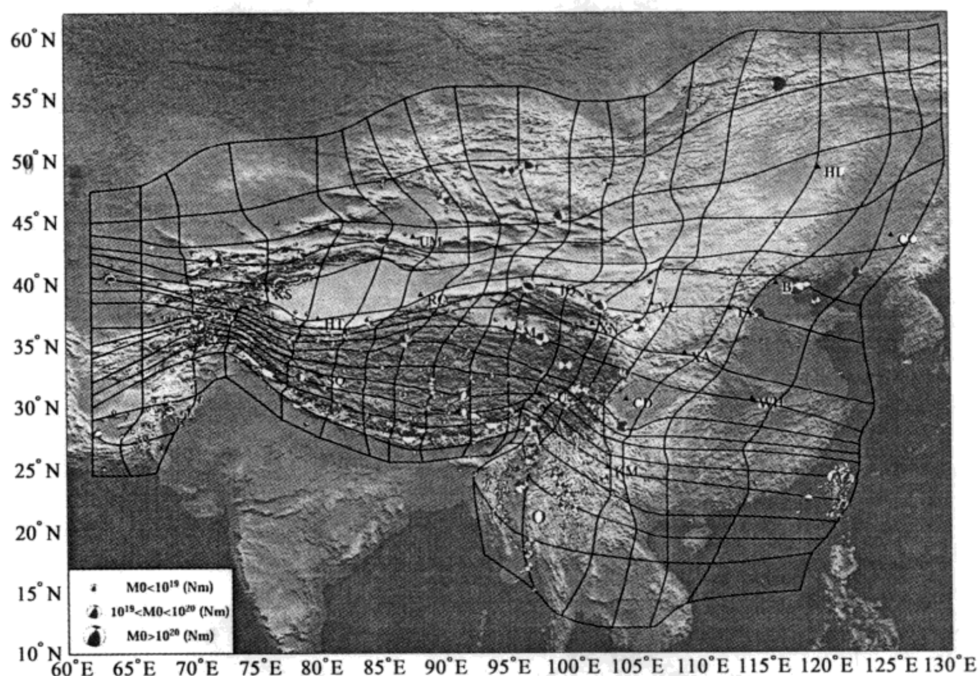


图 13.6　中国大陆地震分布及其震源机制，网格划分概况

在地震资料和 GPS 资料的联合反演中，地震的作用主要是确定变形的方式和方向，而 GPS 资料的作用则主要是确定速度和变形的大小(Scholz, C. H. and P. A. Cowie ,1990)。然而，由于地震分布的不均匀性，它能够确定应变方式和方向的效果也是不同的，因此，文中根据地震的分布和断层滑动速率来分别预先确定各个网格的变形性质，即考虑各向异性和非均匀性的影响。本文采用的活断层滑动速率主要参考了有关文献(洪汉净，汪一鹏，沈军等，1998；邓起东，张培震，冉勇康等，2002)。反演计算得出的相对于西伯利亚地块的中国大陆地壳运动速度场见图 13.7，中国大陆地壳运动应变率场见图 13.8。

由图 13.7 和图 13.8 可以看出：中国大陆地壳运动总体上为 SN-NE 向的压性运动和 EW-NW 向的张性运动；水平运动自西向东逐渐往东南偏转，偏转最显著的区域是西藏东南和川滇地区，形成一种顺时针旋转的运动图像；中国大陆构造变形和应变都具有明显的分块特性，华

南地块、鄂尔多斯地块、东北地块具有较好的整体性,西部的运动和应变明显强于东部,块体交界处的应变强于块体内部。强应变主要集中在喜马拉雅块体、西藏块体东部、天山块体西部、川滇块体。进一步分析我们可以知道,中国大陆变形既有沿巨大断裂走滑和块体的横向滑移特征,也有地壳的缩短和增厚特征。

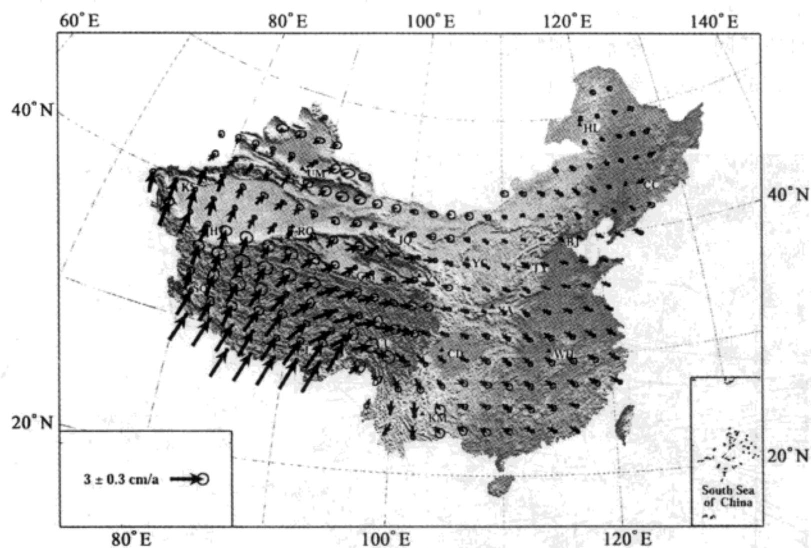


图 13.7　中国大陆地壳运动速度场

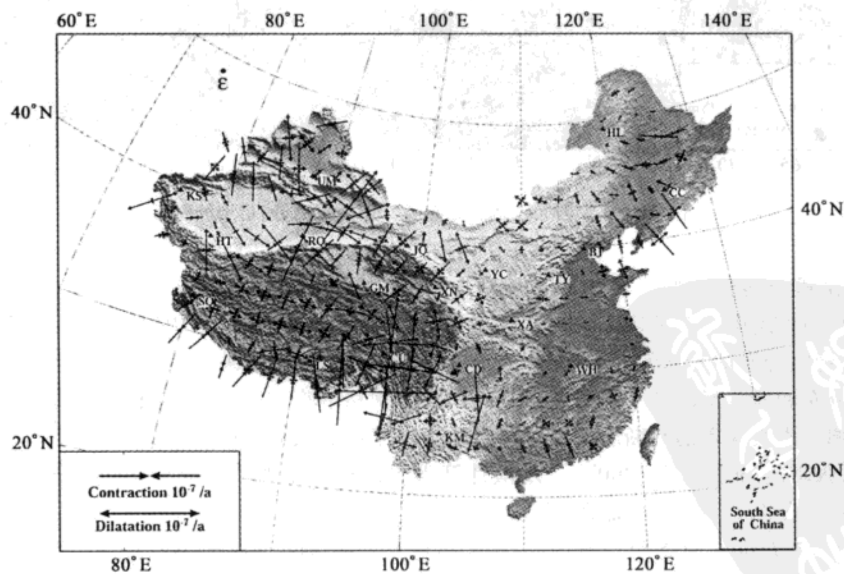


图 13.8　中国大陆地壳运动应变率场

参 考 文 献

[1]阿莱格尔 C J. 活动的大陆. 孙坦,张道安译. 北京: 科学出版社,1987

[2]Anderle R J. Comparison of Doppler and optical pole position over twelve years. Naval Surface Weapons Center, Dalgren Laboratory Technical Report, 1976, 3464: 10

[3]Anderle R J. Determination of polar motion from satellite observations. Geophys. Surv., 1973, 1: 146 ~ 161

[4]Anderle R J, Beuglass L K. Doppler satellite observations of polar motion. Bull. Geod., 1970, 96: 125 ~ 141

[5]Anderson D L. Isotopic evolution Of the mantle: A model. Earth Planet Sci Lett, 1982, 57: 13 ~ 24

[6]Anderson D L. Temperature and pressure derivatives Of elastic withap—placation to the mantle. J GeophysRes, 1988, 93: 4688 ~ 4700

[7]Anderson O L, Sumino Y. The thermodynamic properties of the Earth's lower mantle. Phys. Earth Planet Inter, 1980, 23: 314 ~ 331

[8]Anderson O L et al. Some elastic constant data On minerals relevant to geophysics. Rev Geophys Space Phys., 1968, 6: 491 ~ 524

[9]Argus D F, Gordon R G. No-Net-Rotation model of current plate velocities incorporating plate motion model NUVEL1 [J]. Geophysical Research Letters, 1991, 18 (11): 2039 ~ 2042

[10]Asaithambi NS, Shen Z, Moore RE. On computing the range of values. Computing, 1982, 28: 225 ~ 237

[11]Avouac J P, Tapponnier P. Active thrusting and folding along the northern Tien Shan and Late Cenozoic rotation of the Tarim relative to Dzungaria and Kazakhstan. J. Geophys. Res. 1993, 98 (B4): 6755 ~ 6804

[12]Backus G E. Converting vector and tensor equations to scalar equations in spherical coordinates. Geophys. J., 1967, 13: 71 ~ 101

[13]Barton M A, Stacey F D. The Grunesein parameter at high pressure: a molecular dynamic study. Phys. Earth Planet Inter., 1985, 39: 167 ~ 177

[14] Baudry N, Kroenke L. Intermediate-wavelength (400—600km) South Pacific geoidalundulations: their relationship of volcanic chins. Earth Planet Sci. Lett., 1991, 102: 430 ~ 443

[15]Bender P L et al. The lunar laser ranging experiment. Science, 1973, 182: 229 ~ 238

[16]Bercovici D, Schubert G, Zebib A. Geoid and topography for infinite prandlt number convection in spherical shell. J Geophys Res, 1988

[17]Blewitt G et al. A new global mode of earth deformation: seasonal cycle detected. Science,

2001, 294: 2342 ~ 2345
[18] Boucher C, Altamimi Z, Feissel M, et al. Results and analysis of the ITRF94, IERS TECHNICAL NOTE20, Observatire de Paris, 1996
[19] Boucher C., Z Altamimi, Sillard P. The 1997 International Terrestrial Reference Frame (ITRF97), IERS Technical Note 27, May 1999
[20] Buffett B A. Geodynamic estimates of the viscosity of the Earth's inner core. Nature, 1997, 388: 571 ~ 573
[21] Bullard E C C et al. The westward drift of the Earth's magnetic field. Phil. Trans. R. Soc., 1950, A243: 67 ~ 92
[22] Bullen K E. Models for the density and elasticity of the Earth's lower core. Geophys. J., 1965, 9: 233
[23] Bullen K E. Seismology. London: Methuen and Co., 1954
[24] Bullen K E. 地球的密度. 北京: 地震出版社, 1982
[25] 陈俊勇. 地面参照系的现代定向理论和地球自转运动. 北京: 测绘出版社, 1991
[26] 陈俊勇. 现代大地测量的进展. 测绘科学, 2003, 28(2): 1 ~ 5
[27] 陈鑫连, 黄立人, 孙铁珊等, 动态大地测量. 北京: 中国铁道出版社, 1994
[28] 陈运泰, 滕吉文, 张中杰, 地球物理学的回顾与展望. 地球科学进展, 2001, 16(5): 634 ~ 642
[29] Creager K C. Inner core rotation from small-scale heterogeneity and time-varying travel times. Science, 1997, 287: 1284 ~ 1288
[30] 党亚民, 基于反演理论的大地测量形变分析与解释的理论与方法, 博士学位论文, 武汉测绘科技大学, 1998
[31] Dong D, Herring T A, King R W. Estimating regional deformation from a combination of space and terrestrial geodetic data. Journal of Geodesy, 1998, 72: 200 ~ 214
[32] DeMets C, Gordon R, Argus D. Current plate motions. Geophysical Journal of International, 1990, 101: 425 ~ 478
[33] DeMets C., Gordon R, Argus D, et al. Effect of recent revisions to the geomagnetic reversal time scale on estimates of current plate motions. Geophysical Research Letters, 1994, 21: 2191 ~ 2194
[34] 邓起东, 张培震, 冉勇康等, 中国活动构造基本特征, 中国科学(D辑), 2002, 32(12): 1020 ~ 1029
[35] Dennis D, McCarthy. IERS Conventions. IERS TECHNICAL NOTE 21, Observatire de Paris, 1996
[36] Dicke R H. Average acceleration of the Earth rotation and the viscosity of the deep mantle. J. of Geophys. Res., 1969, 74: 5895 ~ 5902
[37] Dickman S R. Secular trend of the Earth's rotation pole: consideration of the motions of the latitude observations. Geophys. J., 1977, 51: 229 ~ 244
[38] 丁国瑜. 活动亚板块、构造块体相对运动. 丁国瑜主编, 中国岩石圈动力学概论, 北京: 地震出版社, 1991. 142 ~ 143
[39] Drew A, Snay R A. DYNAP: Software for estimating crustal deformation from geodetic data.

Tectonophysics, 1989, 162, 331 ~ 343
[40] Drewes H. Combination of VLBI, SLR and GPS determined station velocities for actual plate kinematic and crustal deformation models. In R. Forsberg, M. Feissel, R. Dietrich (Eds.), Geodesy on the Move, IAG Symposia (119) 377-382, Springer, 1998
[41] Dziewonsky A M, Anderson D L. Preliminary reference Earth model. Phys. Earth Planet Inter., 1981, 25: 297 ~ 356
[42] Dziewonski A M. in E. Boschi, G. Ekstroem (eds). A problems in geophysics for the new millennium. Italy, Bologna: Editrice Compositori, 2000. 289 ~ 349
[43] Einstein A. Zür Allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag). Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber, 1915b, p. 799 ~ 801
[44] Einstein A. Zür Allgemeinen Relativitätstheorie. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber, 1915a, p. 778 ~ 786
[45] Elsasser W. The Earth's interior and geomagnetism. Rev. Mod. Phys., 1950, 22: 1 ~ 35.
[46] Elsasser W, Takeuchi H. Non uniform rotation of the Earth and geomagnetic drift. Trans. Am. Geophys. Union, 1955, 36: 584 ~ 590
[47] England P, Molnar P. Active deformation of Asia: from kinematics to dynamic. Science, 1997b, 278: 647 ~ 650
[48] England P, Molnar P. The field of crustal velocity in Asia calculated from quaternary rates of slip on faults. Geophy. J. Int., 1997a, 130: 551 ~ 582
[49] 方俊. 固体潮. 科学出版社, 1984
[50] Forward R L. Review of artificial satellite gravity gradiometer techniques for geodesy. In Veis G. (ed), The use of artificial satellite for geodesy and geodynamics. Geophysical Monograph (American Geophysical Union, Washington), 1974, 17: 157 ~ 192
[51] 傅承义,陈运泰,祁贵仲. 地球物理学基础. 北京: 科学出版社,1985
[52] 傅容珊, 黄建华. 地球动力学. 北京: 高等教育出版社, 2001
[53] 傅淑芳,朱仁益,地球物理反演问题,北京: 地震出版社,1998
[54] 符养,朱文耀,王小亚等. 利用中国地壳运动观测网络研究中国大陆相对于 ITRF97 板块模型形变,地球物理学报,2002,45(3):330 ~ 337
[55] 傅征祥,中国大陆地震活动性力学研究,北京: 地震出版社,1997
[56] 盖宝民. 地球演化 I、II、III (第三版). 北京: 科学技术出版社, 1996
[57] Garland G D. 地球物理学引论. 陈颐等译. 北京: 地震出版社,1987
[58] Gerlach Ch, Foeldvary L, Svehla D, Gruber Th, Wermuth M, Sneeuw N, Frommknecht B, Oberndorfer H, Peters Th, Rothacher M, Rummel R, Steigenberger P. A CHAMP-only gravity field model from kinematic orbits using the energy integral. Geophysical Research Letters, 2003, 20 (20), 2037, doi:10.1029/2003GL018025
[59] Gerlach Ch, Sneeuw N, Visser P, · Svehla D. CHAMP gravity field recovery using the energy balance approach. Advances in Geosciences, 2003, 1: 73 ~ 80
[60] Glatzmaier G A, Roberts P H. A three dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. Phys. Earth Planet Inter., 1995b, 91: 63 ~ 75

[61]Glatzmaier G A, Roberts P H. A three dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reseaval. Nature, 1995a, 377: 203 ~ 209
[62]Glatzmaier G A, Roberts P H. Rotation and magnetism of Earth's inner core. Science, 1996, 274: 1887 ~ 1891
[63]Gordon R G, Stein S. Global tectonics and space geodasy. Science, 1992, 256 (17): 333 ~ 342
[64]Greiner-Mai H, Jochmann H, Barthelmes F. Influence of possible inner-core motions on the polar motion and the gravity field. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 2000, 117: 81 ~ 93
[65]Gripp A E et al. Current plate velocities relative to the hotspots incorporating the NUVEL-1 global plate motion model [J]. JGR, 1990, 17(8): 1109 ~ 1112
[66]管泽霖，宁津生. 地球形状及外部重力场(上下册). 北京：测绘出版社，1981
Gubbins D. Rotation of the inner core. J. Geophys. Res., 1981, 86(B12): 11695 ~ 11699
[67]国家地震局科技监测司，地震地形变观测技术，北京：地震出版社，1995
[68]国家自然基金会，地球物理学，北京：科学出版社，1994
[69]郭俊义. 地球物理学基础. 北京：测绘出版社，2001
[70]Haines A J, Jackson J A, Holt W E, Agnew D C. Representing distributed deformation by continuous velocity fields, Sci. Rep. 98/5, 100pp., Inst. Of Geol. And Nucl. Sci., Lower Hutt, New Zealnad, 1998
[71]Harris A W, Williams J G. Earth rotation study using lunar laser ranging data. In: Scientific Applications of Lunar Laser Ranging (ed Mulholland), 1977, pp. 179-189, Dordrecht: D. Reidel
[72]Haubrich R A, Munk W. The pole tide. J. Geophys. Res., 1959, 64: 2373-2388
[73]Hawking S W. A brief history of time: from the big bang to black holes. New York: Bantam Bookes, 1988
[74]Hide R. Interaction between the earth's liquid core and solid mantle. Nature, 1969, 222: 1055-1056
[75]Hide R. Towards a theory of irregular variations in the length of day and core-mantle coupling. Phil. Trans. R. Soc. Lond., 1977, A284: 547 ~ 554
[76]Hike K. The Amurian plate motion and current plate kinematics in East Asia. Journal of Geophysics Research, 1999, 104: 29147 ~ 29155
[77]Holt W E, Li M, Haines A J. Earthquake strain rates and instantaneous relative motions within central and eastern Asia. Geophys. J. Int., 1995, 122: 569 ~ 593
[78]Holt W E, Chamot-Rooke N, LePichon X, Haines A J, Shen-Tu B, Ren J. Velocity field in asia inferred from quaternary fault slip rates and GPS observations. J. Geophys. Res., 2000, 105: 19185 ~ 19209
[79]洪汉净，汪一鹏，沈军等. 我国大陆地壳块体运动的平均图像及其动力学意义，活动断裂研究理论与应用，1998，6: 17 ~ 29
[80]胡明城，鲁福. 现代大地测量学(下册). 北京：测绘出版社，1994
[81]黄立人，地壳运动的参考框架，大地测量与地球动力学，2002，22(3): 102 ~ 108

[82]IERS. ITRF2000 Datum Definition. http://large. ensg. ign. fr/ITRF/ITRF2000, 2001
[83]IGS Central Bureau. Annual Report 1998 of the CODE Analysis Center of the IGS. CA:J PL, 1999
[84] Irvine R D, Stacey F D. Presure dependence of the thermal Gruneisen parameter, with application to the Earth's lower mantle and outer core. Phys. Earth Planet. Inter., 1975, 11: 157
[85]ITRF96. IERS TECHNICAL NOTE24. Observatire de Paris, 1998
[86]Jacobs J A. A textbook on geonomy. London: Adam Hilger, 1974
[87]Jeanloz R, Thompson A B. Phase transition and mantle discontinuities. Rev. Geophys. Space Phys., 1983, 21: 51 ~ 74
[88]Jeanloz R. Properties of iron at high pressures and the state of core. J. Geophys. Res., 1979, 84, No. B11
[89]Jeffreys H. The Earth (1st ed). Cambridge: Cambridge University Press, 1929
[90]Jeffreys H. The origin of Earth (6th edition). Cambridge University Press, 1976
[91]Jeffreys H, Vicente R O. The theory of nutation and the variation of latitude: The Roche model core. Mon. Not. R. Astron. Soc., 1957a, 117: 162 ~ 173
[92]Jeffreys H, Vicente R O. The theory of nutation and the variation of latitude. Mon. Not. R. Astron. Soc., 1957b, 117: 556 ~ 576
[93]江在森,丁平,王双绪等. 中国西部大地形变监测与地震预测. 北京:地震出版社, 2001
[94]Karato S. The dynamic structure of the deep Earth. Princeton University Press, 2003
[95]King R W, Counselman C C, Shapiro I I. Universal time: results from lunar laser ranging. J. Geophys. Res., 1978, 83: 3377 ~ 3381
[96]Kirkpatrick S et al. Optimization by simulated annealing. Science, 1983, 220: 671 ~ 680
[97]Lambeck K. The Earth's variable rotation: geophysical causes and consequences. Cambridge: Cambridge University Press, 1980
[98]Lambeck K. 地球物理大地测量学-地球的慢变形. 黄立人等译,北京:测绘出版社,1995
[99]Larson K M. Global plate velocities fromthe global positioning system. JGR., 1997, 102 (B5): 9961-9981
[100]Laske G, Masters G. Limits on differential rotation of the inner core from an analysis of the earth's free oscillations. Nature, 1999, 402: 66 ~ 69
[101]Lavallee D, Blewitt D G. Degree-1 earthdeformation from very long baseline interferometry measurement. Geophys Res Lett., 2003, 29(20): doi:10.1029/2002GL015883
[102]利布特里 L. 大地构造物理学和地球动力学. 孙坦译,北京:地质出版社,1986
[103]力武常次. 地震预报. 冯锐和周新华译,北京:地震出版社, 1978
[104]李英冰. 固体地球的环境变化响应. 博士论文. 武汉大学, 2004
[105]李宗伟,肖兴华. 天体物理学. 北京:高等教育出版社, 2000
[106]刘斌,张群山,王宝善,傅容珊,Kern H, Popp T. 地球内核的地震波速各向异性与其自转有关. 科学通报, 1999, 44 (11): 1209-1211
[107]刘光鼎. 回顾与展望——21 世纪的固体地球物理. 地球物理学进展, 2002, 17(2): 191 ~ 197

[108]刘经南，施闯，许才军，姜卫平. 利用局域复测 GPS 网研究中国大陆块体现今地壳运动速度场，武汉大学学报信息科学版，2001，26(3)：189～195
[109]刘琳. 核幔差异旋转对地球重力场的影响. 学士学位论文. 武汉大学，2005
[110]刘南. 行星地球概观. 北京：高等教育出版社，1987
[111]Lyttleton R A. Dynamical calculations relating to the origin of the solar system. Mon. Not. Roy. Astr. Soc.，1960，121：551
[112]马宏生，张国民，刘杰等. 中国大陆及其邻区强震活动与活动地块关系研究. 地学前缘，第 10 卷特刊，74～80
[113]马杏垣. 中国岩石圈地球动力学图集. 北京：中国地图出版社，1989
[114]马宗晋等. 中国大陆区现今地壳运动的 GPS 研究. 科学通报，2001，46(13)：1118～1120
[115]McCarthy D D. IERS technical note 21. Observatoi re de Paris. 1996，10～11
[116]McCrae W H. Densities of the terrestrial planets. Nature，1969，224：28
[117]Misner C W，Thorne K S，Wheeler J A. Gravitation. San Francisco：W. H. Freeman and Company，1973
[118]Moffatt H K. Topographic coupling at the core-mantle interface. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.，1978，9：279～288
[119]Molodensky M S. The theory of nutation and diurnal Earth tides. Comm. Obs. R. Belg.，1961，288：25～56
[120]Moritz H. über die Konvergenz der Kugelfunktionsentwichlung für des Aussenraumpotential an der Erdoberfläche. österr. Z. Vermess.，1961，49：11～15
[121]Moritz H. On the convergence of the spherical harmonic series of the geopotential at the Earth surface. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini，1978，37：363～381
[122]Moritz H. Avanced physical geodesy. Karlsruhe：Wichmann，1980
[123]Moritz H，Mueller I I. Earth Rotation (Theory and Observation). Ungar：The Ungar Publishing，1987
[124]Munk W H，Revelle R. On the geophysical interpretation of irregularities in the rotation of the Earth. Monthly Notice，Royal Astron. Soc.，Geophysical Supplement，1952，6：331
[125]Munk W H.，MacDonald G J F. The rotation of the Earth. Cambridge：Cambridge University Press，1960
[126]Murray C A. On the precession and nutation of the Earth's axis of figure. Mon. Not. R. Astron. Soc.，1978，183：677～685
[127]牛顿 I. 自然哲学之数学原理宇宙体系，王克迪译. 武汉：武汉出版社，1992
[128]宁津生. 现代大地测量参考系统. 测绘学报，2002，31(增刊)：7～11
[129]宁津生. 现代大地测量的发展. 测绘软科学研究，1997，2：2～7
[130]Ohanian H C. Gravitation and spacetime. New York：W. W. Norton & Company，1976
[131]Okada Y. Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space. Bulletin of the Seismological Society of America，1985，75：1135～1154
[132]Peltier W R，Wu P. Mantle phase transitions and the free-air gravity anomalies over Fennoscandia Laurentia. Geophys. Res. Lett.，1982，9(7)：731～734

[133] Peltier W R. Constraint on deep mantle viscosity from LAGEOS acceleration data. Nature, 1983, 304: 434 ~ 436

[134] Peltier W R. Dynamics of the ice age Earth. Adv. Geophys., 1982, 24: 1 ~ 146. problems. New York: John Wiley & Sons, 1982

[135] 佩尔蒂埃 W R. 地球形状和引力场的缓慢变化：冰川作用史和内部粘弹性原理. 安德林，卡泽纳夫主编，空间大地测量与地球动力学. 北京：解放军出版社，1990

[136] Petroskaya M S. A new form of representing the geopotential. Bulletin Geod. 1976, 50: 353 ~ 362

[137] 钱伟长，叶开沅. 弹性力学. 北京：科学出版社，1980

[138] 强元棨. 经典力学. 北京：科学出版社，2003

[139] Rikitake T. Electromagnetism and the Earth's Interior. Amsterdam: Elsevier, 1966

[140] Roberts P H. Dynamo theory. Lectures in Applied Mathematics, 1971, 14(2): 129 ~ 206. American Mathematical Society, Providence, RI

[141] Roberts P H. Electromagnetic core-mantle coupling. J. Geomagn. Geoelectr., 1972, 24: 231 ~ 259

[142] Robertson D S. Recent results of radio interferometric determinations of polar motion and Earth rotation. IAU Symposium 82, 1979, Cadiz, Spain

[143] Rochester M G. Geomagnetic drift and irregularities in the Earth's rotation. Phil. Trans. R. Soc. Lond., 1960, A252: 531 ~ 555

[144] Rochester M G. Perturbations in the Earth's rotation and geomagnetic core-mantle coupling. J. Geomagn. Geoelectr., 1968, 20: 387 ~ 402

[145] Roden R B. Electromagnetic core-mantle coupling. Geophysics J., 1963, 7: 361 ~ 374

[146] Rubinca M. Postglacial rebound observed by LAGEOS and the effective viscosity of the lower mantle. J. Geophys. Res., 1984, 89: 1077 ~ 1087

[147] Rummel R, Sanso F, van Gelderen M, Brovelli M, Koop R, Miggliaccio F, Schrama E, Sacerdote F. Spherical harmonic analysis of satellite gradiometry. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series No. 39, 1993

[148] Seno T, Stein S. Can the Okhotsk plate be discriminated from the North America plate ?. Journal of Geophysics Research, 1996, 101: 11305 ~ 11315

[149] Shapiro I I, Knight C A. Geophysical applications of long-baseline radio interferometry. In Mansinha L, Smylie D E and Chapman C H (eds), Earthquake Displacement Fields of and the Rotation of the Earth, 1970. 284 ~ 301

[150] Shapiro I I et al. Transcontinental baseline baselines and the rotation of the Earth measured by radio interferomertry. Science, 1974, 186: 920-922

[151] Shearer P. Introduction to seismology. Cambridge: Cambridge University Press, 2003

[152] 申培萍. 求非光滑整体优化问题全部解的区间算法. 数值计算与计算机应用, 1998, 3: 212 ~ 217

[153] Shen W B. A general expression of the Earth's gravitational potential's series expansion. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 1995, 54: 361 ~ 372

[154] Shen W B. The separability of gravitation and inertia according to general relativity theory.

Dissertation. Graz Technical University, Graz, 1996

[155]Shen W B, Moritz H. Separation of gravitation and inertia in airborne gradiometry. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 1996a, 55: 145 ~ 159

[156]Shen W B, Moritz H. On the separation of gravitation and inertia and the determination of the relativistic gravity field in the case of free motion. The Journal of Geodesy, 1996b, 70: 633 ~ 644

[157] Shen W B. Lecture notes on satellite geodesy. Presented at Royal Inst. of Techn., Stockholm, Sweden, 2005a

[158]Shen W B. On the convergence problem. Paper presented at the"Dynamic Planet 2005"IAG Meeting, Aug. 22-26, 2005b, Cairns, Australia

[159]申文斌. 引力位虚拟压缩恢复法. 武汉大学学报(信息科学版), 2004, 29(8): 720 ~ 724

[160]申文斌. 地球物理力学基础. 武汉大学印刷, 武汉, 2005

[161]申文斌, 宁津生, 李建成, 晁定波. 论大地水准面. 武汉大学学报信息科学版, 2003, 28: 52 ~ 54 (特刊)

[162]申文斌, 梁毅强. 论地球自转轴倒转的可能性(2004 地球物理年会). 西安制图出版社, 2004, 451 ~ 452

[163]申文斌, 刘琳, 宁津生. 内核超速旋转及其对重力场的影响. 地球物理学报, 2005 (已提交)

[164]申文斌. 张量分析及若干问题 9 讲. 武汉大学教材处印刷, 2003b

[165]Shen W B, Ning J Sh. The super rotation of the inner core. Presented at the 2nd AOGS General Assembly, June 20-24, 2005, Singapore

[166]Shen Zhengkang, Zhao Chengkun, Yin An et al. Contemporary crustal deformation in east Asia constrained by Global Positioning System measurements. J. Geophys. Res., 2000, 105 (B3): 5721 ~ 5743

[167]施闯. 大规模高精度 GPS 网平差与分析理论及其应用. 北京: 测绘出版社, 2002

[168]Sillard P, Altamimi Z, Boucher C. The ITRF96 realization and its associated velocity field. Geophys. Res. Lett. 1998, 25 (17): 3223 ~ 3226

[169] Sjöberg L E. On the convergence problem for the spherical harmonic series of the geopotential at the surface of the Earth. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 1980, 39: 261 ~ 272

[170]Sjöberg L E. On the convergence problem of the satellite derived spherical harmonic series of the geopotential at the surface of the Earth. Proc. 5th Int. Symp. "Geodesy and Physics of the Earth", 1984

[171]Smith S W. Wobble and nutation of the Earth. Geophys. J., 1977, 50: 103 ~ 140

[172]Smylie D E, Szeto A K M, Rochester M G. The dynamics of the Earth's inner and outer cores. Reports on Progress in Physics, 1984, 47: 855 ~ 906

[173]Solomon S C, Sleep N H. Some simple physical models for absolute plate motions. J. Geophys. Res., 1974, 79(17): 2557-2567

[174]Song X D, Richards P R. Observational evidence for differential rotation of the Earth's inner

core. Nature, 1996, 382: 221 ~ 224
[175]宋晓东，许晓霞. 地核——20世纪的发展及展望. 张有为，尹安主编：地球的结构、演化和动力学，pp. 91 ~ 115. 北京：高等教育出版社，2002
[176]Souriau A. New seismological constrains on differential rotation of the inner core from Novaya Zemlya events recorded at DRV Antarctica. Geophys. J. Int., 1998, 134: F1-F5
[177]Souriau A, Poupinet G. Inner core rotation: A critical appraisal, in: V. Dehant et al. Eds. Core dynamics, structure and rotation, Am. Geophys. Un. Monograph. Geodyn. Series 31, 2003, pp. 65 ~ 82
[178]Souriau A, Garcia R, Poupinet G. The seismological picture of the inner core: structure and rotation. Comptes Rendus Geoscience, 2003, 335: 51 ~ 63
[179]Stacey F D. Physics of the Earth. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1977
[180]Stacey F D. 地球物理学. 北京：地震出版社，1981
[181]Su W J, Dziewonski A M. Inner core anisotropy in three dimentions. J Geophys Res., 1995, 100: 9831 ~ 9852
[182]Su W J, Dziewonski A M, Jeanloz. Planet within a planet: Rotation of inner core of Earth. Sciece, 1996, 274: 1883 ~ 1887
[183]苏宜. 天文学新概论. 武汉：华中科技大学出版社，2002
[184]孙付平，地球参考系的实现，解放军测绘学院学报，1995，12(4)：243 ~ 249
[185]孙付平，赵铭. 全球五大板块的运动和形变——用卫星激光测距数据导出的站速度分析. 地球物理学报，1994，37(5)：596 ~ 605
[186]Takeuchi H, Elsasser W M. Fluid motions near the core and the irregular variations in the Earth's rotation. J. Phys. Earth Jap., 1954, 2: 39 ~ 44
[187]陶本藻. 自由网平差与变形分析. 武汉：武汉测绘科技大学出版社，2001
[188]滕吉文. 20世纪地球物理学的重要成就和21世纪的发展前沿. 地学前缘，2003，10(1)：117 ~ 140
[189]滕吉文. 固体地球物理学概论. 北京：地震出版社，2003
[190] Turcotte D L, Schubert G. Geodynamics applications of continum physics to geological problems. New York: John Wiley & Sons, 1982
[191]Van Dam T M., Blewitt G, Herlin M B. Atmospheric pressure loading effects on global positioning system coordinates determination. J. Geophys. Res., 1994, 99: 23939 ~ 23950
[192]Van Dam T M., Wahr J M. Displacements of the earth's surface due to atmospheric loading: effects on gravity and baseline measurements. J. Geophys. Res. 1987, 92(B2): 1281 ~ 1286
[193]Vidale J E, Earle P S. Fine-scale heterogeneity in the Earth's inner core. Nature, 2000, 404: 273 ~ 275
[194] Visser P N A M, Sneeuw N, Gerlach C. Energy integral method for gravity field determination from satellite orbit coordinates. J. of Geod., 2003, 77: 207 ~ 216
[195]Voorhies C V. Inner core rotation from geomagnetic westward drift and a stationary spherical vortex in Earth's core. Phys. Earth Planet. Inter., 1999, 112: 111 ~ 123
[196] Wallcott R I. Rheological models and observational data of glacio-isostatic rebound. In

Mörner NA (ed), Earth Rheology, Isostasy, and Eustasy, 1980. 3 ~ 10, New York: Wiley
[197]王超,张红、刘智. 星载合成孔径雷达干涉测量. 北京: 科学出版社,2002
[198]王家映. 地球物理反演理论. 武汉: 中国地质大学出版社,1998
[199]王谦身等. 重力学. 北京: 地震出版社, 2003
[200]王仁. 我国地球动力学的研究进展与展望. 地球物理学报,1997,40(增刊): 50 ~ 59
[201]王正行. 近代物理学. 北京: 北京大学出版社, 1995
[202]Wang Q, Zhang P Z, Freymueller J T, et al. Present-day crustal deformation in China constrained by Global Positioning System measurements. Science, 2001, 294: 574 ~ 577
[203]Wang Y M. On the error of analytical downward continuation of the Earth's external gravitational potential on and inside the Earth's surface. J. Geod., 1997, 71: 70 ~ 82
[204]威利 PJ. 动力地球学. 朱夏译, 北京: 地质出版社,1978
[205]Weinberg S. Gravitation and Cosmology. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1972
[206]Williams J G. Present scientific achievements from lunar laser ranging. In Mulholland (ed), Scientific Applications of Lunar Laser Ranging, 1977, pp. 37-48, Dordrecht: D. Reidel
[207]Woolaad E W. Theory of the rotation of the Earth around its center of mass. Astron. Pap. Am. Ephem. Naut. Alm., 1953, 15: 3 ~ 165
[208]吴斌, 彭碧波, 高布锡. 地心变化的测定. 科学通报, 1999, 41(10): 1106 ~ 1108
[209]Wu P, Peltier W R. Viscous gravitational relaxation. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1982, 70: 435 ~ 486
[210]谢鸿森等. 地球深部物质科学导论. 北京: 科学出版社,1997
[211]许才军. 青藏高原地壳运动模型与构造应力场. 北京: 测绘出版社,2002
[212]许才军,李志才. 贝叶斯法及其在大地测量反演中的应用,武汉大学学报(信息科学版),2003,28(6): 658 ~ 662
[213]许才军,温扬茂. 活动地块和应变模型辨识. 大地测量与地球动力学. 2003,23(3): 50 ~ 55
[214]Xu Caijun, Wang Hua, Xu Jusheng. Present-day movement and tectonic strain rate field of active crustal blocks in China continent. In Sanso F (ed.), A Window on the Future of Geodesy. Association of Geodesy Symposia, Vol. 128, 2005, XVIII, p. 495 illus., Hardcover, ISBN: 3-540-24055-1
[215]许啸天. 老子. 成都: 成都古籍书店(复制), 1989
[216]杨福家, 王炎森, 陆福全. 原子核物理. 上海: 复旦大学出版社, 2002
[217]杨挺青. 粘弹性力学. 武汉:华中理工大学出版社,1990
[218]叶叔华, 黄珹. 天文地球动力学. 山东: 山东科学技术出版社, 2000
[219]叶叔华,黄珹,现代地壳运动与地球动力学研究,科技导报,1995,1:21 ~ 24
[220]叶叔华,朱文耀等. 运动的地球. 湖南: 湖南科学技术出版社, 1995,44 ~ 45
[221]Yukutake T. The effect of change in the geomagnetic dipole moment on the rate of the Earth's rotation. J. Geomagn. Geoelectr., 1972, 24: 19 ~ 47
[222]张国民, 张培震. 近年来大陆强震机理与预测研究的主要进展. 中国基础科学, 1999, 224: 47258
[223]张国民, 张培震. "大陆强震机理与预测"中期学术进展. 中国基础科学, 2000, 10: 4 ~

10
[224]张国民等. 地震预报引论. 北京：科学出版社，2001
[225]张培震. 中国大陆岩石圈最新构造变动与地震灾害. 第四纪研究. 1999，5：404～413
[226]张培震，邓起东，张国民等. 中国大陆强震活动与活动地块. 中国科学(D)，2003，33(增刊)：12220
[227]张培震，王琪，马宗晋. 中国大陆现今构造运动的GPS速度场与活动地块. 地学前缘，2002，9(2)：430～441
[228]Zhang Qiang，Zhu Wenyao. Global plate motion models incorporating the velocity field of ITRF96. Geophysical Research Letters，1999，26 (18)：2813～2816
[229]赵进义. 天体力学（易照华修订）. 上海：上海科学技术出版社，1983
[230]赵少荣. 动态大地测量反演及物理解释的理论和应用. 博士学位论文,武汉测绘科技大学,1991
[231]泽纳夫. 空间大地测量与地球动力学. 北京：解放军出版社，1990
[232]中国地震局. 地震及前兆数字观测技术规范(试行)：地壳形变观测. 北京：地震出版社,2001
[233]中国地震局监测预报司. 地震地形变数字观测技术. 北京：地震出版社,1995
[234]中国岩石圈动力学地图集编委会. 中国岩石圈动力学地图集. 北京：中国地图出版社，1989
[235]中国岩石圈动力学地图集编委会. 中国岩石圈动力学概论. 北京：地震出版社,1991
[236]周衍柏. 理论力学. 上海：江苏科学技术出版社，1984
[237]朱文耀，程宗颐，王小亚，等. 中国地壳运动的全球背景场. 科学通报，1999，44(14)：1537～1539
[238]朱文耀，符养，李彦等. ITRF2000的无整体旋转约束及最新全球板块运动模型NNR-ITRF2000VEL. 中国科学(D辑),2003,33(增刊)：1～11

